Министерство образования Российской Федерации
ВОСТОЧНО - СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.И. Олзоева

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Издательство ВСГТУ
Улан – Удэ, 2004

УДК 681. 3

Рецензент: профессор, доктор технических наук **Кутузов О.И**

Олзоева С.И. Моделирование и расчет распределенных информационных систем: Учебное пособие. – Улан - Удэ, 2004.

Излагается метод анализа разомкнутых экспоненциальных СеМО и его применение для расчета производительности распределенных информационных систем. Значительная часть материала (пример расчета, задание на проектирование) ранее не отражалась в учебной литературе.

Содержание пособия отражает специальные разделы курсов «Моделирование систем», «Инфомационные сети»

Пособие предназначено для студентов специальностей «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети », «Автоматизированные системы обработки информации и управления»

Ключевые слова: система массового обслуживания, сеть массового обслуживания, разомкнутая сеть массового обслуживания, интенсивность обслуживания требований

П Р Е Д И С Л О В И Е

В данном пособии представлен учебный материал для практических занятий по курсу «Моделирование систем» и предназначен для развития у студентов навыка проектно-конструкторской работы в области разработки распределенных информационных систем с использованием математического моделирования. Известно достаточно большое количество методов построения математических моделей и средств реализации моделирующих алгоритмов. Наиболее распространенными из них являются системы и сети массового обслуживания. Целью использования системы массового обслуживания (СМО) как модели является анализ качества функционирования разнообразных систем: экономических, производственных, биологических, социальных, транспортных, вычислительных, коммерческих и т.д.

Однако усложнение структур и режимов реальных систем затрудняет применение классических методов теории массового обслуживания ввиду возрастающей размерности решаемых задач. При моделировании сложных систем приходится исследовать системы, включающие в качестве подсистем многие системы массового обслуживания. Такие системы в целом могут быть представлены в виде сети массового обслуживания (СеМО).

Наиболее развита теория экспоненциальных СеМО, с использованием ее результатов разработаны точные методы расчета вероятностно-временных характеристик (ВВХ) сложных систем. В пособии существенное место занимает теоретический материал по методу анализа разомкнутых экспоненциальных СеМО. Приводится пример использования аппарата разомкнутых экспоненциальных СеМО для расчета системы телеобработки заданий.

Список литературы представлен небольшим числом книг, в которых можно при желании получить сведения по теме пособия, в м числе и библиографические. В пособие включены учебные задания и численные примеры, принадлежащие В.Н. Задорожному [5], отличающиеся методической направленностью и понятным стилем изложения.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

СМО – система массового обслуживания

СеМО – сеть массового обслуживания

РСеМО – разомкнутая сеть массового обслуживания

Λ – интенсивность входного потока СМО

μ – интенсивность обслуживания требований

$\overline{T}_{\text{обс}}$ – среднее время обслуживания требования (заявки)

$\overline{T}_{\text{пр}}$ – среднее время пребывания требования в системе

$\rho = \lambda / \mu = \lambda \cdot \overline{T}_{\text{обс}}$ – коэффициент загрузки СМО

K – число каналов обслуживания в системе

$P = \left\| P_{ij} \right\|$ – матрица вероятностей передач между СМО сети

α_j – передаточный коэффициент (среднее число проходов заявки через j–ю СМО)

I_j – интенсивность внешнего потока, поступающего на вход j–й СМО

Введение

Современное информационное обеспечение корпораций, холдингов строится с использованием сетевых технологий. Корпоративная сеть холдинга объединяет локальные сети (ЛС) подразделений. Достаточно часто на практике приходится сталкиваться с таким фактом, когда закупленное и установленное сетевое оборудование оказывается загруженным на 10 ÷ 20 %, и даже в ближайшей перспективе не видно признаков к повышению нагрузки. И это притом, что на рынке сетевых технологий достаточно быстро (2÷3 года) появляются программно – аппаратные средства с большей производительностью [6]. И то, что было закуплено «вчера» и загружалось слабо, «сегодня» стоит значительно дешевле. Естественно потребовать закупать аппаратно- программное сетевое обеспечение не «на глазок», а опираясь на соответствующие сетевые характеристики.

При построении корпоративных информационных сетей наиболее широко используется архитектура «Клиент-сервер». На ее основе строится распределенная информационная система управления (РИСУ) Сервер, как правило, содержит ресурс (чаще всего базы данных либо банки данных), которым пользуются многие рабочие группы. Совокупность данных, связанных с тем или иным бизнес-процессом, как правило, достаточно объемна и разнородна. Так, например, в банке данных, обеспечивающем решение функциональных задач верхнего уровня системы управления ОАО «СЗП» содержится систематизированная информация о клиентах, о часто изменяющихся ценах, приуроченных к определенному времени, о накопленных рутинных делах и т.п. Большой объем занимают данные, связанные с маркетингом, контролем и управлением экспортом по индустриально развитым странам, по странам Восточной Европы, по развивающимся странам. Такой банк данных используют практически все группы верхнего уровня системы управления холдингом (внешнеэкономической деятельности, дивидендов, взаимных расчетов, ценообразования юридической службы) как источник информации, когда требуются, к примеру, следующие сведения: перечень изготовителей какой-либо продукции, сгруппированных по величине оборота, производства, количеству рабочей силы и т.п.; информация об изготовителях по районам; информация о ситуации на рынке/конкуренции: информация о заключении счетов и балансе; экономическая информация. При этом названные рабочие группы имеют дело с удаленным решением заданий, направляемых к серверу как к ресурсу коллективного пользования [1].

Естественен вопрос, как оценить требуемую производительность ЛС? Какую схему расчета использовать?

Пособие содержит две части и приложения. В первой излагаются необходимые сведения о разомкнутых экспоненциальных сетях массового обслуживания и их анализу. Во второй части показано, как, используя аппарат СеМО, решать задачу комплексирования системы обработки информации. Приложения содержат контрольные вопросы и задания.

1. Задача анализа сетей массового обслуживания

1.1. Проектирование РИСУ и анализ их производительности

Проектирование информационной системы можно представить как решение последовательности проектных задач, которые включают задачи синтеза и задачи анализа системы и ее частей.

Любая задача синтеза состоит в том, чтобы построить из заданного множества элементов некоторую систему, обладающую заранее указанными свойствами. Задача анализа является обратной по отношению к задаче синтеза и состоит в выделении отдельных элементов заданной системы и установлении их параметров. При проектировании РИСУ задача анализа РИСУ рассматривается как задача проверки того, обладает ли построенная система заранее указанными свойствами. Решение задач анализа и синтеза РИСУ и её частей осуществляется с помощью моделей проектируемой РИСУ, в качестве которых используются описания, схемы, чертежи, математические модели и т.д.

Комплекс заранее указанных свойств, которыми должна обладать проектируемая РИСУ, подразделяется на два подытоживающих свойства, называемых работоспособностью и эффективностью. *Работоспособность* РИСУ состоит в правильном выполнении заданных функций, т.е. в правильной реализации заданного множества алгоритмов обработки информации. *Эффективность* РИСУ заключается в ограниченности или минимальности разного рода затрат, связанных с изготовлением и применением РИСУ. Таким образом, задачи анализа РИСУ сводятся при проектировании к анализу работоспособности и анализу эффективности РИСУ.

Результаты решения задач анализа используются при решении задач синтеза, а результаты синтеза вновь подвергаются анализу. Этот цикл представлен на рис.1. Он повторяется многократно для равных частей или для одной и той же части применяемых моделей РИСУ. Модели РИСУ развиваются, уточняются и на определённой стадии превращаются в проект РИСУ, т.е. в совокупность документов, содержащих сведения, необходимые и достаточные для изготовления спроектированной РИСУ в заданных условиях.

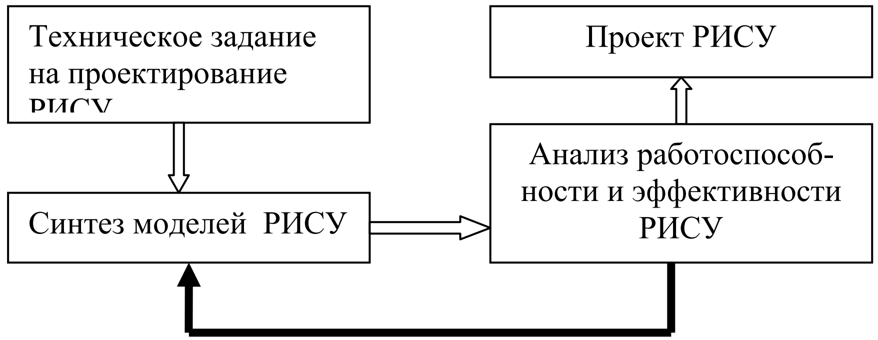


Рис. 1. Цикл анализа и проектирования РИСУ

Анализ эффективности РИСУ осуществляется путём оценки *показателей* эффективности, т.е. величин, характеризующих затраты на изготовление и эксплуатацию РИСУ. К таким величинам, например, относятся габариты РИСУ и её устройств, быстродействие устройств, вероятность получения ошибочного результата и т.д.

Показатели, характеризующие затраты времени на получение системой каких-либо полезных результатов, называются показателями *производительности*. К их числу относятся, например, средние значения времён ответа РИСУ на разные типы запросов, средние числа задач разного типа, решаемых системой в единицу времени, коэффициенты загрузки устройств РИСУ и другие показатели. Многие (если не все) показатели эффективности РИСУ могут быть сведены к форме показателей производительности. Имея ввиду это обстоятельство, термин "производительность" иногда употребляют как равносильный термину "эффективность". Можно не принимать столь широкого толкования этого термина, но нельзя не признать, что задача анализа производительности является одной из важнейших среди задач проектирования РИСУ.

В общем виде задача анализа производительности РИСУ состоит в том, чтобы оценить показатели производительности при заданных параметрах технического, программного обеспечения РИСУ и внешней среды РИСУ. К таким параметрам могут относиться быстродействия устройств, характеристики сложности программ, интенсивности потоков требований на выполнение программ и другие. Решая задачу анализа производительности, как правило, необходимо учитывать случайную природу многих факторов, от которых зависит производительность РИСУ. Так, случайными часто являются моменты поступления в РИСУ требований, объёмы подлежащей обработке информации, последовательность необходимых для ее обработки операций. Сложность структуры РИСУ и необходимость учёта случайных факторов делают задачу анализа производительности РИСУ очень сложной, причём по мере прогресса вычислительной техники сложность этой задачи возрастает. Поэтому все более широкое распространение для анализа производительности РИСУ получает метод математического моделирования.

Моделирование – один из наиболее распространенных методов исследования процессов функционирования сложных систем. Известно достаточно большое количество методов построения математических моделей и средств реализации моделирующих алгоритмов. Наиболее распространенными из них являются системы и сети массового обслуживания.

В терминах *систем массового обслуживания* (СМО) описываются многие реальные системы: вычислительные системы, узлы сетей связи, системы посадки самолетов, магазины, производственные участки – любые системы, где возможны очереди и (или) отказы в обслуживании.

В вычислительной системе роль обслуживающего прибора играет ЭВМ, роль заявок – решаемые задачи. Источником заявок служат терминалы пользователей. Моментом выдачи заявки является момент нажатия клавиши для подачи директивы о запуске задачи на решение. Операционная системы ЭВМ исполняет роль диспетчера: определяет очередность решения задач. В роли ячеек буфера выступают ячейки памяти ЭВМ, хранящие сведения о задачах, требующих решения.

В системе разгрузки судна, другой пример реальной системы, источниками заявок являются направления, откуда прибывают суда. Момент выдачи заявки – это момент прибытия судна в зону морского порта для разгрузки/погрузки. Обслуживающим прибором является причал вместе с персоналом и техническими средствами, организующими разгрузку/погрузку. Роль буфера играет акватория порта.

Усложнение структур и режимов реальных систем затрудняет применение классических методов теории массового обслуживания ввиду возрастающей размерности решаемых задач, что особенно характерно для систем с сетевой структурой. Одним из возможных путей преодоления размерности является использование моделей в форме сетей массового обслуживания (СеМО).

СеМО представляет собой совокупность конечного числа обслуживающих узлов, в которой циркулируют заявки, переходящие в соответствии с маршрутной матрицей из одного узла в другой. Узел всегда является разомкнутой СМО. При этом отдельные СМО отображают функционально самостоятельные части реальной системы, связи между СМО – структуру системы, а требования, циркулирующие по СеМО, – составляющие материальных потоков (сообщения (пакеты) в коммуникационной сети, задания в мультипроцессорных системах, контейнеры грузопотоков и т.п.).

1.2. Методы моделирования информационных сетей

Система массового обслуживания – одна из основных моделей, используемых инженерами-системотехниками. Как *модель* СМО рассматривается в теории массового обслуживания (другое название – теория очередей). Первые работы в этой области были вызваны потребностями практики, в частности широким развитием телефонных сетей. Поэтому в работах по теории СМО широко используется терминология, заимствованная из телефонии: требования, вызовы, заявки, каналы (приборы) обслуживания и т.п.

Теория массового обслуживания связана с разработкой и анализом математических, т.е. абстрактных, моделей,

которые описывают процесс обслуживания некоторых объектов, поступающих на вход обслуживающего прибора в виде некоторого потока, и образующего в общем случае очередь на входе обслуживающего прибора.

Поскольку рассматриваются абстрактные модели, совершенно не важна природа обслуживаемых объектов и их физические свойства (будь то вызовы, управляющие или информационные кадры в сети связи или посетители магазина, или детали на автоматической линии и т.п.). Существенным являются моменты появления этих объектов и правила, законы (математические) их обслуживания, так как от этих моментов и законов зависит адекватное отображение эволюции моделируемого объекта во времени. Поэтому, когда говорят о методах анализа очередей, имеют в виду математические (абстрактные) модели, а из контекста всегда должно быть ясно, для исследования какой реальной системы применяются эти модели.

Целью использования СМО как модели является анализ качества функционирования указанных систем-оригиналов.

В свою очередь, СеМО используют для определения важнейших системных характеристик информационных систем: производительности; времени доставки пакетов; вероятности потери сообщений и блокировки в узлах; области допустимых значений нагрузки, при которых обеспечивается требуемое качество обслуживания и др.

В теории СеМО фундаментальным является понятие состояния сети. Важнейшая характеристика сетей МО – вероятности их состояний. Для определения вероятностей состояний СеМО исследуют протекающий в сети случайный процесс. В качестве моделей протекающих в СеМО процессов наиболее часто используют марковские и полумарковские.

Марковским процессом с непрерывным временем описывают функционирование экспоненциальных СеМО. Сеть называется экспоненциальной, если входящие потоки требований в каждую СМО пуассоновские, а времена каждого этапа обслуживания, реализуемого на любой СМО сети, имеют экспоненциальное распределение. Это позволяет считать, что этапы обслуживания независимы между собой и не зависят ни от параметров входящего потока, ни от состояния сети, ни от маршрутов следования требований.

Теория экспоненциальных СеМО наиболее разработана, и ее широко применяют как для исследования сетей ПД так и для исследования мультипроцессорных вычислительных систем (ВС). Разработаны практические формы расчета вероятностно-временных характеристик (ВВХ) таких сетей и систем.

Попытки глубокого анализа немарковских моделей сетевых систем наталкиваются на значительные трудности, которые обусловлены в частности отсутствием независимости длительностей пребывания требований в различных узлах моделей сетевых систем с нестандартными дисциплинами. Так например, при достаточно реалистическом предположении о том, что длина требования остается постоянной в процессе его передачи через узлы сети, необходимо прослеживать путь каждого требования, что делает невозможным аналитический расчет характеристики для сети с числом узлов $M>2$.

Анализ работ, посвященных исследованию или расчету немарковских моделей, показывает, что решения, как

правило, получены алгоритмически путем сложных численных расчетов с использованием преобразований Лапласа-Стилтьеса, реализуются программно, отличаются большой трудоемкостью, либо значительными погрешностями в оценке показателей производительности информационных систем (ИС) в области средней и большой нагрузки. Поэтому для моделирования СеМО, выходящих из класса мультипликативных, используют приближенные методы.

Сравнительный анализ приближенных методов моделирования СеМО и примеры, приведенные в [1-5] показывают, что пользоваться приближенными методами расчета СеМО необходимо с большой осторожностью, что при расчете конкретных СеМО в процессе решения различных прикладных задач представляется необходимым проведение исследований в целях оценки точности и чувствительности применяемого метода, а также проведение эксперимента по имитационному моделированию исходной СеМО для достаточно большого множества значений варьируемых параметров.

Таким образом, аналитические методы расчета характеристик ИС базируются, как правило, на анализе экспоненциальных СеМО. При использовании этого математического аппарата удается получить аналитические модели для решения широкого круга задач исследования систем. СеМО – это, прежде всего, совокупность взаимосвязанных систем массового обслуживания. Поэтому необходимо вспомнить основные особенности этих систем.

1.3. Система массового обслуживания как модель

Система массового обслуживания (СМО) – одна из основных моделей, используемых инженерами-системотехниками. Дадим ее краткое описание.

Заявки (требования) на обслуживание поступают через постоянные или случайные интервалы времени. *Приборы* (каналы) служат для обслуживания этих заявок. Обслуживание длится некоторое время, постоянное или случайное. Если в момент поступления заявки все приборы заняты, заявка помещается в *ячейку буфера* и ждет там начала обслуживания. Заявки, находящиеся в буфере, составляют *очередь* на обслуживание. Если все ячейки буфера заняты, заявка получает *отказ* в обслуживании и теряется. *Вероятность потери заявки* (вероятность отказа) – одна из основных характеристик СМО. Другие характеристики: *среднее время ожидания* начала обслуживания, средняя длина очереди, коэффициент загрузки прибора (доля времени, в течение которого прибор занят обслуживанием) и т.д.

В зависимости от объема буфера различают *СМО с отказами*, где нет буфера, *СМО с ожиданием*, где буфер не ограничен (например, очередь в магазин на улице) и *СМО смешанного типа*, где буфер имеет конечное число заявок. В СМО с отказами нет очереди, в СМО с ожиданием нет потерь заявок, в СМО смешанного типа то и другое возможно.

Иногда различают заявки по их *приоритету*, т.е. по важности. Заявки высокого приоритета обслуживаются в первую очередь. *Абсолютный приоритет* дает право прервать обслуживание менее важной заявки и занять ее место в приборе (или буфере, если все приборы заняты столь же важными заявками). Вытесненная заявка либо теряется, либо поступает в буфер, где ждет дообслуживания. Иногда приходится возобновлять обслуживание вытесненной заявки с начала, а не продолжать с точки прерывания. Если заявка вытеснена из буфера, она, естественно, теряется. Примером заявки с абсолютным приоритетом является судно, получившее пробоину и нуждающееся в срочной разгрузке. В вычислительных системах абсолютным приоритетом обладают команды оператора. *Относительный приоритет* дает право первоочередного занятия освободившегося прибора. Он не дает право на вытеснение заявки из прибора или буфера. Лица, имеющие льготы при обслуживании в кассе, у врача и т.п., как правило, имеют относительный приоритет. Абсолютный и относительный приоритеты различаются и моментом действия: абсолютный реализуется в момент поступления, а относительный - в момент освобождения прибора.

Различают фиксированные и динамические приоритеты. Фиксированные приоритеты чаще называют дисциплиной обслуживания.

Дисциплина обслуживания задает порядок выбора из очереди в освободившийся прибор заявок одинакового приоритета. Выделим следующие дисциплины: FIFO (First Input - First Output): первым пришел – первым обслужен, LIFO (Last Input - First Output): последним пришел – первым обслужен, RAND (Random): случайный выбор из очереди. В быту обычно действует дисциплина FIFO. Дисциплина LIFO реализуется в буфере, организованном по принципу стека. Такая дисциплина может оказаться целесообразной, например, при передаче информации, если ее ценность быстро падает со временем.

В теории массового обслуживания важным является понятие *случайного потока,* как некоторой последовательности событий, наступающих в случайные моменты времени.

Случайный поток может быть задан функцией распределения величины промежутка (интервала) времени между моментами наступления событий

$$\tau_j = t_j - t_{j-1}, \qquad P(\tau_j \le t)$$

Если величины τ_j независимы в совокупности, то поток обладает *ограниченным последействием.*

В случае $P(\tau_j \le t) = P(\tau \le t)$ для всех $j \ge 2$ поток является *рекуррентным*. Рекуррентный поток, для которого $P(\tau \le t) = 1\text{-}\exp(\text{-}\lambda t)$, называется *пуассоновским.* Для такого потока вероятность наступления за промежуток времени $[0,t]$ n событий есть $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t)$, а математическое ожидание числа событий, наступивших за время t, λt, где λ - среднее число событий, наступающих в единицу времени.

Пуассоновский поток характеризуется отсутствием последействия.

Если кроме этого выполняются условия *стационарности* и *ординарности,* то пуассоновский поток будет *простейшим.*

Напомним, что для стационарного потока распределение не зависит от положения интервала τ на оси времени и зависит только от длительности τ. Отсутствие последействия означает независимость числа событий в неперекрывающихся интервалах τ_j. Свойство ординарности заключается в том, что вероятность появления более одного события на бесконечно малом интервале имеет порядок малости выше, чем вероятность появления одного события на этом интервале.

Величину λ в случае пуассоновского потока называют *интенсивностью* потока событий. Если $\tau_j = \tau = \text{const}$, то поток является регулярным или детерминированным.

Для обозначения типа СМО Кендаллом и Башариным [2-4] предложена система обозначений, имеющих вид $\Delta|\Theta|\Xi|\Omega$. Здесь Δ – обозначение закона распределения вероятностей для интервалов поступления заявок, Θ – обозначение закона распределения вероятностей для времени, Ξ – число каналов обслуживания, Ω – число мест в очереди.

Обозначение законов распределения в позициях Δ и Θ выполняется обычно буквами из следующего списка:

M – экспоненциальное,

E^k – эрланговское порядка k,

R – равномерное,

D – детерминированное (постоянная величина),

G – произвольное (любого вида) и т.д.

Если число мест в очереди не ограничено, то позиция Ξ не указывается. Например, $M \mid M \mid 1$ означает простейшую СМО (оба распределения экспоненциальные, канал обслуживания один, очередь не ограничена), а обозначение $R \mid D \mid 2 \mid 100$ соответствует СМО с равномерным распределением интервалов поступления требований, фиксированным временем их обслуживания, двумя каналами и 100 местами в очереди. В этой СМО заявки, приходящие в моменты, когда все места в очереди заняты, покидают систему (т.е. теряются).

Если в СМО поступает n потоков заявок (у каждого потока свой приоритет), то Δ и Θ приписывают число n в виде индекса. Например, $M2 \mid M2 \mid 1$ обозначает СМО с двумя потоками заявок, на входе имеющими экспоненциальное распределение, с экспоненциальным временем обслуживания, своим для каждого потока. В системе $M2 \mid M \mid 1$ время обслуживания всех заявок имеет одно и то же распределение. В случае нескольких входных потоков, имеющих разные приоритеты, необходимо дополнительно указывать типы приоритетов – абсолютные, относительные.

1.4. Экспоненциальная система массового обслуживания

1.4.1. Одноканальная однородная экспоненциальная СМО

Одноканальная экспоненциальная СМО определяется следующими свойствами. СМО имеет канал. В СМО приходят *заявки*. Если СМО пустая (нет заявок), то приходящая заявка занимает канал. Приходящая в непустую СМО заявка становится в очередь последней. Любая занявшая канал заявка обслуживается, освобождает канал и уходит из СМО. Если в момент ухода очередь непустая, первая в ней заявка выходит из очереди и занимает канал. Кружком (рис.2) обозначен канал K, тремя прямоугольниками – очередь.

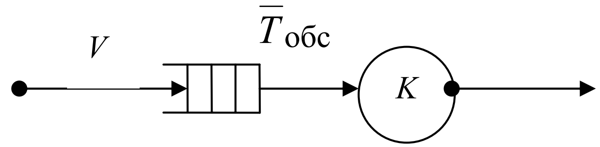


Рис. 2. Обозначения в СМО

Стрелки указывают направление движения заявок, точки у стрелок – вход и выход СМО. Приходы заявок образуют пуассоновский поток событий. Это означает, что время между приходами любых двух последовательных заявок есть независимая случайная величина с экспоненциальной функцией распределения вероятностей

$$F(X) = 1 - e^{-VX} \tag{1.1}$$

Параметр V есть интенсивность потока заявок, т.е. среднее число заявок, приходящих в единицу времени, равно V. В дальнейшем интенсивность прихода заявок в СМО будем обозначать через λ. Время обслуживания заявки – тоже независимая случайная величина с экспоненциальной функцией распределения вероятностей вида (1.1). Но параметр V в этом случае имеет другое значение. Будем обозначать его через μ. Величину 1/ μ, равную среднему времени обслуживания заявки, обозначим через $\overline{T}_{обс}$.

В виде одноканальной экспоненциальной СМО можно промоделировать, например, периферийное устройство мультипрограммной вычислительной системы. Тогда приходы заявок будут соответствовать обращениям программ к устройству для выполнения операции ввода или вывода информации; λ будет интенсивностью таких обращений, $\overline{T}_{\text{обс}}$ – средним временем выполнения требуемой операции.

Одноканальная экспоненциальная СМО задается параметрами λ, $\overline{T}_{\text{обс}}$. Цель ее анализа заключается в расчете характеристик, важнейшие из которых следующие:

- коэффициент загрузки ρ;
- средняя длина L очереди;
- среднее число M заявок в СМО;
- среднее время $\overline{T}_{\text{ож}}$ ожидания обслуживания;
- среднее время $\overline{T}_{\text{пр}}$ пребывания заявки в СМО.

Коэффициент загрузки рассчитывается по формуле

$$\rho = \lambda \cdot \overline{T}_{\text{обс}}. \qquad (1.2)$$

Если выполняется условие

$$\rho \le 1, \qquad (1.3)$$

то существует стационарный режим функционирования СМО. В стационарном режиме все вероятностные характеристики системы являются постоянными во времени величинами. Сами происходящие в СМО события остаются при этом случайными. Если (1.3) не выполняется, то стационарного режима у СМО не существует.

В стационарном режиме среднее число M заявок в СМО постоянно, поэтому среднее число заявок, приходящих в СМО в единицу времени, равно среднему числу заявок, в единицу времени, уходящих из СМО. Следовательно, в стационарном режиме интенсивность потока уходящих заявок равна λ. Коэффициент загрузки ρ в стационарном режиме есть:

а) среднее значение той части единицы времени, в течение которой канал занят;

б) вероятность того, что канал занят;

в) среднее число заявок в канале.

В последующем речь будет идти только о стационарных значениях характеристик.

Средняя длина очереди (среднее число заявок в очереди) в одноканальной экспоненциальной СМО рассчитывается по формуле

$$L = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (1.4)$$

Среднее число M заявок в СМО равно сумме среднего числа L заявок в очереди и среднего числа ρ заявок в канале:

$$M = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (1.5)$$

Заявка перемещается в очереди в среднем с постоянной скоростью. Среднее число переходов заявки в очереди на одно место вперед за единицу времени равно λ.

При такой скорости перемещения L переходов произойдет за время, равное в среднем

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{\overline{T}_{\text{обс}} \cdot \rho}{1-\rho}. \qquad (1.6)$$

Формула (1.6) дает среднее время прохождения заявки через очередь. Это есть среднее время ожидания.

Среднее время пребывания заявки в СМО есть сумма среднего времени ожидания и среднего времени обслуживания заявки:

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \frac{\overline{T}_{\text{обс}}}{1-\rho}. \qquad (1.7)$$

Вероятность наличия в системе k требований определяется с помощью геометрического закона распределения в виде

$$(1-\rho)\cdot\rho^{k}, k = 0,1,2,...$$

Характеристики (1.2) – (1.7) могут давать ценную информацию о моделируемой в виде СМО системе. Пусть, например, СМО изображает периферийное устройство вычислительной системы. Тогда ρ равен коэффициенту использования устройства, (1- ρ) – коэффициенту простоя. Необходимо, чтобы коэффициент использования был достаточно велик. Величина $\overline{T}_{\text{ож}}$ характеризует среднее время, в течение которого программы ожидают освобождения устройства. В это время программы фактически "простаивают". Желательно, чтобы оно было достаточно мало.

Многоканальная экспоненциальная СМО отличается от одноканальной следующим. Число каналов в ней более одного. Приходящая заявка становится в очередь, если все каналы заняты. В противном случае заявка занимает свободный канал.

1.4.2. Многоканальная экспоненциальная СМО

Многоканальная экспоненциальная СМО задается тремя параметрами: интенсивностью V прихода заявок, средним временем $\overline{T}_{\text{обс}}$ обслуживания и числом K каналов (рис. 3).

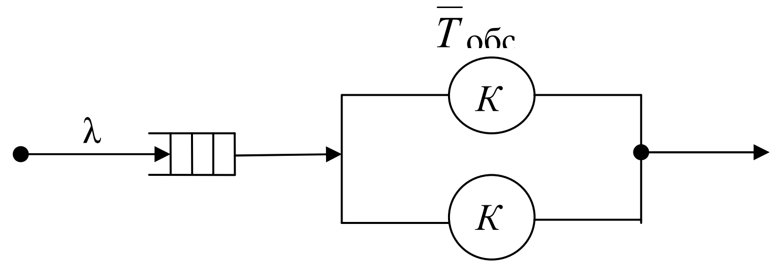


Рис. 3. Двухканальная СМО

Формулы для расчета характеристик многоканальной экспоненциальной СМО немногим сложнее (1.2) – (1.7).

Коэффициент загрузки определяется в виде

$$\rho = \frac{\lambda\overline{T}_{\text{обс}}}{K}. \tag{1.8}$$

Его значение должно отвечать условно стационарности (1.3).

Средняя длина очереди в блоке ожидания

$$L = \beta_0 \frac{(\lambda\overline{T}_{\text{обс}})^{K+1}}{K!\cdot K\left(1 - \frac{\lambda\overline{T}_{\text{обс}}}{K}\right)^2}\ , \tag{1.9}$$

де β_0 – стационарная вероятность того, что в СМО нет заявок. Эта вероятность определяется в виде

$$\beta_0=\frac{1}{\dfrac{(\lambda\overline{T}_{\text{обс}})^K}{K!\left(1-\dfrac{\lambda\overline{T}_{\text{обс}}}{K}\right)}+\sum_{m=0}^{K-1}\dfrac{(\lambda\overline{T}_{\text{обс}})^m}{m!}}\ . \qquad (1.10)$$

Остальные характеристики вычисляются через параметры СМО следующим образом:

$$M = L + K\cdot\rho\ , \qquad (1.11)$$

$$\overline{T}_{\text{ож}} = \frac{L}{\lambda}, \qquad (1.12)$$

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \overline{T}_{\text{ож}} + \overline{T}_{\text{обс}}\ . \qquad (1.13)$$

Многоканальную СМО можно поставить в соответствие, например, многопроцессорному блоку вычислительной системы, имеющему общую память для всех процессоров и, следовательно, общую очередь задач.

1.5. Сети массового обслуживания

Сеть массового обслуживания представляет собой совокупность конечного числа N обслуживающих узлов, в которой циркулируют заявки, переходящие в соответствии с маршрутной матрицей из одного узла в другой. Узел всегда является разомкнутой СМО (причем СМО может быть любого класса). При этом отдельные СМО отображают функционально самостоятельные части реальной системы, связи между СМО – структуру системы, а требования, циркулирующие по СеМО, – составляющие материальных потоков (сообщения (пакеты) в коммуникационной сети, задания в мультипроцессорных системах, контейнеры грузопотоков и т.п.).

Для наглядного представления СеМО используется граф, вершины которого (узлы) соответствуют отдельным СМО, а дуги отображают связи между узлами.

Переход заявок между узлами происходит мгновенно в соответствии с переходными вероятностями p_{ij}, $i,j=\overline{1,N}$, p_{ij} – вероятность того, что заявка после обслуживания в узле i перейдет в узел j. Естественно, если узлы непосредственно не связаны между собой, то $p_{ij}=0$. Если из i-го узла переход только в один какой-либо узел j, то $p_{ij}=1$.

СеМО классифицируют по нескольким признакам (рис. 4).

Сеть называется *линейной*, если интенсивности потоков заявок в узлах связаны между собой линейной зависимостью

$$\lambda_j = \alpha_{ij}\lambda_i\ ,$$

где α_{ij} – коэффициент пропорциональности, или относительно источника

$$\lambda_j = \alpha_j\lambda_0\ .$$

Коэффициент α_j называют коэффициентом передачи, он характеризует долю заявок, поступающих в j-й узел от источника заявок, либо – среднее число прохождений заявкой через данный узел за время нахождения заявки в сети.

Если интенсивности потоков заявок в узлах сети связаны нелинейной зависимостью (например, $\lambda_j=\sqrt{\alpha_j\lambda_0}$), то сеть называется *нелинейной*.

Сеть всегда линейна, если в ней заявки не теряются и не размножаются. *Разомкнутая* сеть – это такая отрытая сеть, в которую заявки поступают из внешней среды и уходят после обслуживания из сети во внешнюю среду. Другими словами, особенностью разомкнутой СеМО (РСеМО) является наличие одного или нескольких независимых внешних источников, которые генерируют заявки, поступающие в сеть, независимо от того, сколько заявок уже находится в сети. В любой момент времени в РСеМО может находиться произвольное число заявок (от 0 до ∞).

В *замкнутой* СеМО (ЗСеМО) циркулирует фиксированное число заявок, а внешний независимый источник отсутствует. Исходя из физических соображений, в ЗСеМО выбирается внешняя дуга, на которой отмечается *псевдонулевая* точка, относительно которой могут измеряться временные характеристики.

Комбинированная сеть – это сеть, в которой постоянно циркулирует определенное число заявок и есть заявки, поступающие от внешних независимых источников.

В *однородной* сети циркулируют заявки одного класса. И, наоборот, в *неоднородной* сети могут присутствовать заявки нескольких классов. Заявки относятся к разным классам, если они различаются хотя бы одним из следующих атрибутов:

- законом распределения длительности обслуживания в узлах;
- приоритетами;
- маршрутами (путями движения заявок в сети).

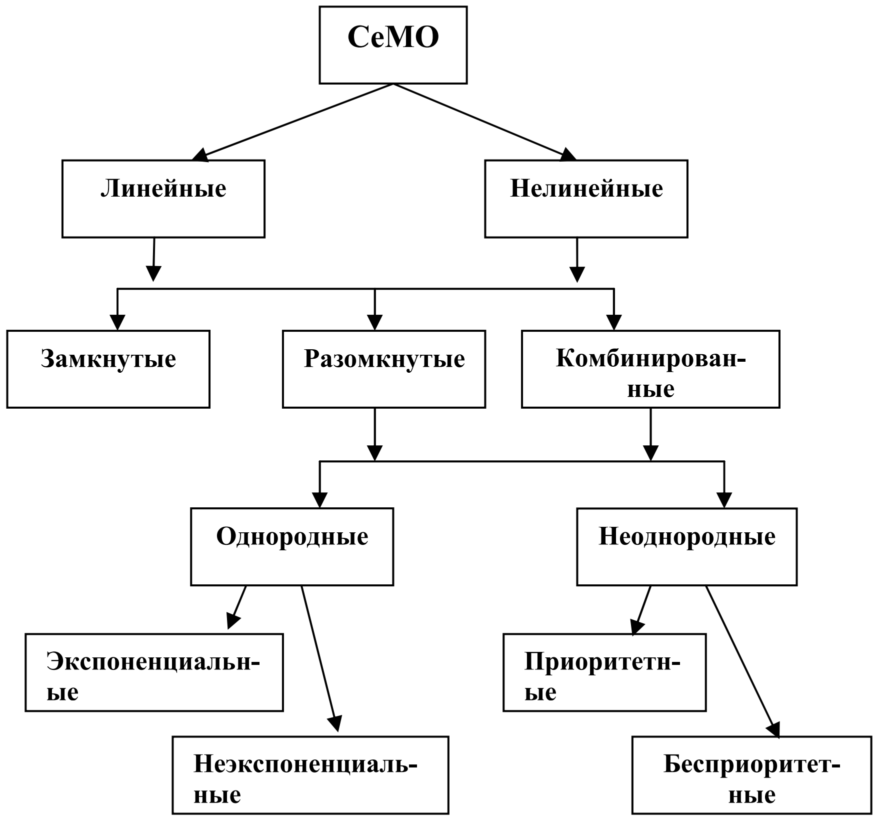


Рис. 4. Классификация сетей массового обслуживания

В *экспоненциальной* сети длительности обслуживания во всех узлах распределены по экспоненциальному закону, и потоки, поступающие в разомкнутую сеть, простейшие (пуассоновские). Во всех остальных случаях сеть является *неэкспоненциальной.*

Если хотя бы в одном узле осуществляется приоритетное обслуживание, то это – *приоритетная* сеть. Приоритет – это признак, определяющий очередность обслуживания. Если обслуживание заявок в узлах осуществляется в порядке поступления, то такая сеть *бесприоритетная.*

Таким образом, экспоненциальной будем называть СеМО, отвечающую требованиям:

- входные потоки СеМО пуассоновские;

- во всех N СМО время обслуживания заявок имеет экспоненциальную функцию распределения вероятностей, и заявки обслуживаются в порядке прихода;

- переход заявки с выхода i-й СМО на вход j-й является независимым случайным событием, имеющим вероятность p_{ij}, $i,j=\overline{1,N}$; p_{i0} – вероятность ухода заявки из СеМО.

Если заявки приходят в сеть и уходят из нее, то сеть называется разомкнутой. Если заявки не приходят в сеть и из нее не уходят, сеть называется замкнутой. Число заявок в замкнутой сети постоянное.

2. Анализ разомкнутых экспоненциальных СеМО

2.1. Свойства разомкнутой экспоненциальной СеМО

Повторим определение сети массового обслуживания.

СеМО называют совокупность СМО, в которой заявки с выходов одних СМО могут поступать на входы других. Входным потоком заявок СМО будем называть поток заявок, приходящих на вход отдельной СМО из внешней среды СеМО, т.е. не с выхода какой-либо СМО. В общем случае число входных потоков СеМО равно числу СМО.

Разомкнутая экспоненциальная СеМО задается следующими параметрами:

1) числом N СМО;

2) числом $K_1,..., K_N$ каналов в СМО 1 ,…, N;

3) матрицей $P = \| p_{ij} \|$ вероятностей передач, i = 1,…,N; j =0,…, N;

4) интенсивностями $I_1,..., I_N$ входных потоков заявок;

5) средними временами обслуживания $\overline{T}_{обс1},...,\overline{T}_{обсN}$ заявок в СМО.

Например, СеМО (рис. 5) будет задана численно в следующем виде:

1) N=3;

2) K_1=1; K_2=1; K_3=2;

3)
$$P=\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

4) $I_1 = 1$; $I_2 = 0$; $I_3 = 0$;

5) $\overline{T}_{обс1}$ = 0,07; $\overline{T}_{обс2}$ = 0,06; $\overline{T}_{обс3}$ = 0,35.

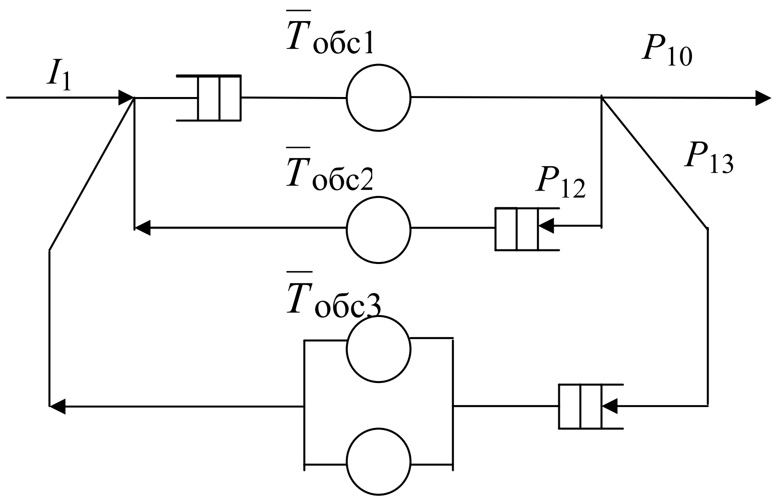


Рис. 5. Сеть массового обслуживания

С помощью СеМО можно промоделировать, например, вычислительную систему [6] в РИСУ. Тогда входные потоки заявок СеМО будут изображать запросы, поступающие на вход вычислительной системы, отдельные СМО будут соответствовать этапам их обработки на устройствах (процессорах, периферийных устройствах и др.), выходные заявки СеМО – результатам обработки запросов. В экспоненциальной СеМО поток заявок на входе СМО складывается из входного потока СеМО (возможно, имеющего нулевую интенсивность) и из потоков, поступающих с выходов СМО. Входной поток СМО в экспоненциальной СеМО в общем случае непуассоновский. Это значит, что СМО в ней в общем случае не экспоненциальные. Тем не менее достаточно часто считают, что СМО ведут себя в ней во многом как экспоненциальные. В частности, характеристики СМО

отвечают (1.2) – (1.13). Поэтому для их расчета в заданной СеМО достаточно найти интенсивности $\lambda_1,...,\lambda_N$ входных потоков СМО.

Нахождение интенсивностей $\lambda_1,...,\lambda_N$ осуществляется на основе уравнений баланса сети с учетом простых свойств слияния и разветвления потоков. При слиянии n потоков заявок с интенсивностями $\lambda_1,...,\lambda_n$ образуется поток, имеющий интенсивность $\lambda = \lambda_1+,...,+\lambda_n$. При ветвлении потока с интенсивностью λ на n направлений, вероятности перехода заявки в которые равны $p_1,..., p_n$, образуется n потоков с интенсивностями $\lambda p_1,..., \lambda p_n$ соответственно.

В стационарной СеМО среднее число заявок в любой ее фиксированной части постоянное. Отсюда следует, что суммарная интенсивность входящих в эту часть потоков равна суммарной интенсивности выходящих. Запись данного закона в математической форме называется *уравнением баланса*. Выделяя различные части в СеМО и составляя для них уравнения баланса, можно получить систему уравнений, связывающую неизвестные интенсивности $\lambda_1,...,\lambda_N$ с известными $I_1,..,I_N$. Обычно при этом в качестве отдельных частей СеМО выделяют все СМО. В этом случав для N неизвестных имеется N уравнений. Можно добавить к ним уравнение баланса для входных и выходных потоков всей СеМО. Тогда получится N +1 уравнение, и одно из них можно использовать в качестве проверочного.

Например, баланс интенсивностей в сети для рис. 5 можно учесть, обозначая интенсивности на входах и выходах СМО и СеМО так, как показано на рис.6. Применяя свойства слияния и ветвления потоков, запишем, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= I_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_1 &= P_{10}\cdot\lambda_1 \\ \lambda_2 &= P_{12}\cdot\lambda_1 \\ \lambda_3 &= P_{13}\cdot\lambda_1 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

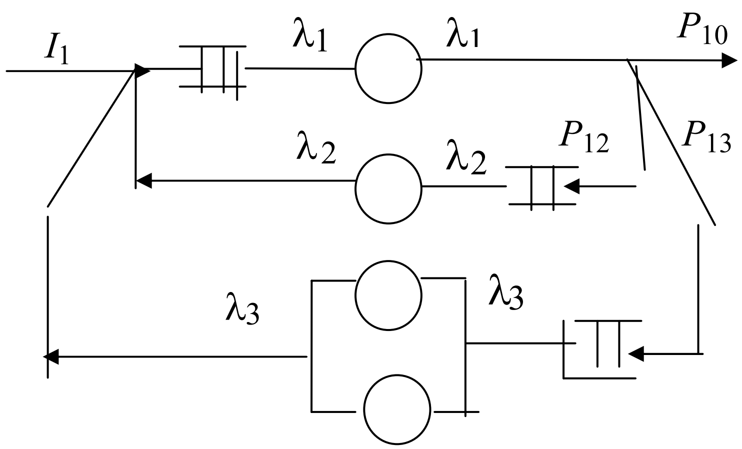


Рис. 6. Баланс интенсивностей

При известных I_1=1, p_1=0,1; p_2=0,5; p_3=0,4 из последних трёх уравнений находим λ_1=10, λ_2=5, λ_3=4. Используя первое уравнение в (2.1) для проверки, подставляем в него найденные значения интенсивностей и получаем тождество 10=1+5+4, подтверждающее правильность произведённых вычислений.

Проверка стационарности СеМО

СеМО стационарна, если стационарны все СМО, т.е. если

$$\rho_j \le 1, \qquad \overline{j=1,N} \qquad (2.2)$$

Проверить эти условия после того, как определены, λ_j , не представляет труда. Например, для СеМО (рис. 6) (2.2) выполняется, поскольку

$\rho_1=\lambda_1\overline{T}_{обс1}=10\cdot 0{,}07=0{,}7;$ $\rho_2=\lambda_2\overline{T}_{обс2}=5\cdot 0{,}06=0{,}3;$

$\rho_3=\lambda_3\overline{T}_{обс3}/2=4\cdot 0{,}35/2=0{,}7$

Для стационарной экспоненциальной СеМО с известными интенсивностями λ_j расчёт локальных характеристик сводится к применению (1.2) – (1.13).

Например, для СеМО (рис. 6) находим, что ρ_1= 0,7; L_1= 1,63; M_1= 2,33; $\overline{T}_{ож1}$=0,163; $\overline{T}_{пр1}$=0,233; ρ_2=0,3; L_2=0,13; M_2=0,43; $\overline{T}_{ож2}$=0,026; $\overline{T}_{пр2}$=0,086; ρ_3= 0,7; β_0=0,176; L_3=0,402; M_3= 1,802; $\overline{T}_{ож3}$=0,1; $\overline{T}_{пр3}$=0,45.

Контрольные вопросы

1. Какую функцию распределения вероятностей имеет время обслуживания в одноканальной экспоненциальной СМО с параметрами λ, $\overline{T}_{обс}$?

2. Перечислите характеристики СМО.

3. Какой характер имеет зависимость характеристик M, λ, $\overline{T}_{пр}$ от ρ в одноканальной экспоненциальной СМО?

4. Подстановка K=1 в (1.8) – (1.13) должна дать формулы для расчёта характеристик одноканальной СМО. Проверьте, так ли это.

5. Что такое экспоненциальная СеМО?

6. Что такое уравнения баланса и для чего они применяются?

2.2. Расчет системных характеристик экспоненциальных СеМО

Характеристики СеМО определяются обычно на уровне средних значений и делятся на локальные и системные. К *локальным* характеристикам СеМО откосятся характеристики всех входящих в нее СМО (рассмотрены в п. 1.4.1). *Системные* характеристики отражают свойства сети в целом, рассматриваемой как единая, неделимая на части система.

Наиболее важными системными характеристиками СеМО являются:

1) *Среднее время* $\overline{T}_{\text{пр}}$ *пребывания в сети.* Временем пребывания в сети называется время между приходом заявки в сеть и ее уходом из сети.

2) *Передаточные коэффициенты* α_{ij}, $i,j = \overline{1,N}$. Пусть заявка входит в сеть из i-го входного потока. Её маршрут в сети случаен, поэтому случайно и число приходов в j-ю СМО за время пребывания в сети. Среднее значение α_{ij} этого числа приходов будем называть передаточным коэффициентом. Он однозначно определяется для любых i, j, матрицей P вероятностей передач.

3) *Входовые средние времена* $F_1,...,F_N$ пребывания в сети. Величина F_j определяется как среднее время пребывания в сети заявки, поступающей из j-го входного потока $\left(j = \overline{1,N}\right)$.

4) *Условные пропускные способности* $B_1,...,B_N$. Предположим, что в заданной СеМО значение интенсивности I_j заменено на максимальное значение, при котором сеть ещё стационарна. Это значение B_j будем называть условной пропускной способностью по входу j.

При заданных I_k $(k \neq j)$ сеть стационарна для любых значений $I_j \leq B_j$.

5) *Абсолютные пропускные способности* A_j. Предположим, что в заданной СеМО интенсивности всех входных потоков, кроме j-го, заменены на нулевые, а I_j заменена на предельное значение, при котором сеть ещё стационарна. Это значение A_j будем называть абсолютной пропускной способностью по j-му входу.

Если $I_j > A_j$, то сеть нестационарна, каковы бы ни были интенсивности остальных входных потоков.

6) *Запасы* $D_1,...,D_N$ по пропускным способностям. Запас $D_j = B_j - J_j$, $j = \overline{1,N}$. Запас D_j показывает, насколько может быть увеличена интенсивность прихода заявок на j-м входе (при заданных остальных) без нарушения условия стационарности.

Если в виде СеМО моделируется некоторая реальная система, то характеристики 1 – 6 могут дать ценную информацию о свойствах этой реальной системы. Например, если СеМО изображает вычислительную систему реального времени, то среднее время пребывания E характеризует среднее время ответа системы, а запасы D_i выражают готовность системы продолжать устойчивое функционирование при увеличении нагрузки (интенсивности запросов) по тому или иному входу.

Среднее время пребывания заявки в СеМО рассчитывается по формуле

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \frac{1}{I}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{T}_{\text{пр}j}\,, \tag{2.3}$$

где $I = I_1 +,...,+ I_N$. Эта формула выводится ниже.

Для СеМО (рис. 6)

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \frac{\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \overline{T}_{\text{пр}j}}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{10 \cdot 0{,}233 + 5 \cdot 0{,}086 + 4 \cdot 0{,}45}{1 + 0 + 0} = 4{,}56 \text{ с.}$$

Передаточные коэффициенты

Важное и полезное свойство передаточных коэффициентов состоит в следующем. В стационарном режиме при любых $I_1 +,...,+ I_N$ для $\lambda_1,...,\lambda_N$ справедливо

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11} I_1 + \alpha_{21} I_2 + ... + \alpha_{N1} I_N \\ \lambda_2 = \alpha_{12} I_1 + \alpha_{22} I_2 + ... + \alpha_{N2} I_N \\ \quad . \\ \lambda_N = \alpha_{1N} I_1 + \alpha_{2N} I_2 + ... + \alpha_{NN} I_N \end{cases} \tag{2.4}$$

Обратим внимание на то, что строка передаточных коэффициентов в (2.4) представляет собой столбец матрицы $\|\alpha_{ij}\|$. Система (2.4) выражает интенсивности λ_j прихода заявок в СМО через интенсивности $I_1 +,...,+ I_N$ входных потоков сети. Значения коэффициентов α_{ij} однозначно определяются матрицей P вероятностей передач. Из (2.4) вытекает, что при $I_2 = ... = I_N = 0$, $I_1 = 1$ имеет место

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11} \\ \lambda_2 = \alpha_{12} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \lambda_N = \alpha_{1N} \end{cases} \tag{2.5}$$

Это позволяет найти строку коэффициентов α_{1j} - матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ путем решения уравнений баланса сети для случая $I_1 = 1$, $I_2 = ... = I_N = 0$: согласно (2.5), найденные значения $\lambda_1,...,\lambda_N$ будут численно равны коэффициентам $\alpha_{11},..., \alpha_{1N}$. Аналогично для случая, когда $I_k = 1$, остальные $I_i = 0$. Решение уравнений баланса даст значения $\alpha_{k1},..., \alpha_{kN}$. Исходя из этого, можно рекомендовать следующий алгоритм вычисления матрицы $\|\alpha_{ij}\|$.

1) Составить уравнения баланса сети, включающие интенсивности
$I_1,\ldots I_N$ в буквенном виде.

2) Положить k=1.

3) Решить уравнения баланса для случая, когда $I_k = 1$, остальные $I_i = 0$. Полученные значения $\lambda_1,...,\lambda_N$ записать в k-ю строку матрицы передаточных коэффициентов.

4) Положить k=k+1.

5) Если k<N, перейти к шагу 3, иначе к шагу 6.

6) Конец.

Найдем, например, матрицу $\|\alpha_{ij}\|$ для СеМО (рис.6), составим уравнения баланса:

$$\begin{cases} \lambda_1 = I_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_1 + I_2 + I_3 = p_{10}\lambda_1 \\ \lambda_2 = p_{12}\lambda_1 + I_2 \\ V_3 = p_{13}\lambda_1 + I_3 \end{cases} \qquad (2.6)$$

Решим эти уравнения для $I_1=1$, $I_2=I_3=0$. Получим $\lambda_1=10$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=4$. Для $I_2=1$, $I_1=I_3=0$ решением будет $\lambda_1=10$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=4$ и для $I_3=1$, $I_1=I_2=0$ получаем $\lambda_1=10$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=5$.

Следовательно, матрица $\|\alpha_{ij}\|$ этой СеМО имеет вид:

$$\begin{matrix} 10 & 5 & 4 \\ 10 & 6 & 4 \\ 10 & 5 & 5 \end{matrix} \qquad (2.7)$$

Свойства суммы, смеси и суммы случайного числа слагаемых

Среднее значение суммы случайных величин равно сумме их средних, для $y = x_1 + \ldots + x_n$ справедливо

$$M(y) = M(x_1) + \ldots + M(x_n). \qquad (2.8)$$

Смесью случайных величин $x_1,\ldots,x_n$ называется величина z, которая принимает значение x_1 с вероятностью p_1, x_n – с вероятностью p_n. Выбор i-й случайной величины x_i и ее значение статистически независимы.

Смесь обладает следующим свойством:

$$M(z) = p_1 M(x_1) + \ldots + p_n M(x_n). \qquad (2.9)$$

Свойства суммы и смеси легко выводятся из определения понятий функции распределения вероятностей и математического ожидания. Суммой τ случайного числа слагаемых назовем сумму вида $\tau = x_1 + \ldots + x_\gamma$; число γ слагаемых случайно; x_i – независимые случайные величины с одинаковыми средними $M(x_i) = M(x)$. Тогда

$$M(\tau) = M(\gamma)\, M(x). \qquad (2.10)$$

Свойство (2.10) выводится из (2.8) и (2.9).

Входовое среднее время пребывания

Рассмотрим СеМО (рис. 6) и проследим, как. формируется входовое время пребывания в сети заявки первого потока. Видно, что это время состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое есть время пребывания в СМО1, составляющее в среднем $\overline{T}_{\text{пр}1}$. Второе слагаемое с вероятностью p_{10} равно нулю (заявка уходит из сети), с вероятностью p_{12} равно входовому времени пребывания для входа 2 (заявка входит в сеть через СМО2) и с вероятностью p_{13} - входовому времени пребывания для входа 3. Из свойства смеси вытекает, что в среднем второе слагаемое составляет величину $p_{10}\cdot 0 + p_{12}F_2 + p_{13}F_3 = p_{12}F_2 + p_{13}F_3$. В целом среднее входовое время пребывания F_1 по свойству суммы равно сумме средних значений первого и второго слагаемых:

$$F_1 = T_{\text{пр}1} + p_{12}F_2 + p_{13}F_3. \qquad (2.11)$$

Рассуждая аналогично о входовых средних временах пребывания F_2 и F_3 можно записать для них сходные с (2.11) уравнения, которые вместе с (2.11) составят следующую систему уравнений:

$$F_1 = \overline{T}_{\text{пр}1} + p_{12} F_2 + p_{13} F_3,$$
$$F_2 = \overline{T}_{\text{пр}2} + F_1, \qquad (2.12)$$
$$F_3 = \overline{T}_{\text{пр}3} + F_1.$$

Из этой системы при известных $\overline{T}_{\text{пр}j}$ (найденных при расчете схемы на рис. 6) нетрудно найти $F_1 = 4{,}56$; $F_2 = 4{,}64$; $F_3 = 5{,}01$.

По аналогии с (2.10) можно составить уравнения относительно F_i для .любой экспоненциальной СеМО.

Характеристики F_i могут быть вычислены и без (2.10) по формуле

$$F_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \overline{T}_{\text{пр}j}. \qquad (2.13)$$

В этом случае уравнения вида (2.12) можно использовать для проверки правильности вычислений, произведенных по (2.13).

Формулу (2.13) можно вывести следующим образом. Пусть заявка входит в СеМО по i-му входу. Ее среднее число посещений j-й СМО есть α_{ij} . При каждом посещении заявка задерживается в среднем на время $\overline{T}_{\text{пр}j}$. По свойству суммы случайного числа слагаемых суммарное время, проведенное заявкой в j-й СМО, составит $\alpha_{ij} \bullet \overline{T}_{\text{пр}j}$. Общее время пребывания заявки в СеМО складывается из времен, проведенных в каждой СМО. По свойству суммы из этого вытекает (2.13).

Выведем теперь формулу для вычисления среднего времени $\overline{T}_{\text{пр}}$ пребывания в сети. Это среднее определяется для произвольной приходящей в сеть заявки без различения того, по какому входу она поступает. Пусть p_1 для такой заявки означает вероятность того, что она вошла по входу 1, …, p_N – вероятность того, что она вошла по входу N. Из свойства смеси

$$\overline{T}_{\text{пр}} = p_1 F_1 + \ldots + p_N F_N = \sum_{i=1}^{N} p_i F_i.$$

Поскольку $p_i = I_i / I$, где $I = I_1 + \ldots + I_N$, то

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{N} I_i F_i.$$

Подставляя сюда (2.13) и меняя порядок суммирования слагаемых, получим

$$\overline{T}_{\text{пр}} = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^{N} \overline{T}_{\text{пр}j} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij_i} I_i.$$

Согласно (2.4), сумма по i представляет здесь λ_j , откуда вытекает (2.3).

Развернутая форма условия стационарност

Условие стационарности СеМО запишем в виде

$$\frac{\lambda_j T_j}{K_j} \le 1, \quad j = \overline{1,N}.$$

Эта запись эквивалентна следующей:

$$\lambda_j \le K_j / T_j, \; j = \overline{1,N}.$$

Выражая λ_j через I_j по формуле (2.4), получим развернутую форму условия стационарности:

$$\begin{cases} \alpha_{11} I_1 + \alpha_{21} I_2 + \ldots + \alpha_{N1} I_N \le K_1/T_1, \\ \alpha_{12} I_1 + \alpha_{22} I_2 + \ldots + \alpha_{N2} I_N \le K_2/T_2, \\ \cdot \\ \alpha_{1N} I_1 + \alpha_{2N} I_2 + \ldots + \alpha_{NN} I_N \le K_N/T_N. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Эта система неравенств эквивалентна (2.2).

Для конкретных СеМО некоторые из неравенств (2.14) оказываются излишними: такие неравенства можно исключать из (2.14), не изменяя решения системы. Например, для СеМО (рис. 6) условие (2.14) примет вид

$$\begin{aligned} &10 I_1 + 10 I_2 + 10 I_3 \le 1/0{,}07; \\ &5 I_1 + 6 I_2 + 5 I_3 \le 1/0{,}06; \\ &4 I_1 + 4 I_2 + 5 I_3 \le 2/0{,}35 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

или, после сокращения на положительные коэффициенты,

$$\begin{aligned} &I_1 + I_2 + I_3 \le 10/7, \\ &I_1 + 1{,}2 I_2 + I_3 \le 10/3, \\ &I_1 + I_2 + 1{,}25 I_3 \le 10/7. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

В этой системе второе неравенство вытекает из первого (сравните их, предварительно умножив первое на 1,2). Поэтому второе неравенство может быть отброшено. Кроме того, первое неравенство вытекает из третьего, поэтому его тоже можно отбросить. Следовательно, условие стационарности (2.16) эквивалентно следующему:

$$I_1 + I_2 + 1{,}25 I_3 \le 10/7. \qquad (2.17)$$

Абсолютная пропускная способность

Используя развернутую форму условий стационарности, абсолютную пропускную способность A_i по i-му входу можно найти непосредственно по ее определению.

Действительно, если все входные интенсивности СеМО, кроме I_i, положить равными нулю, то из (2.14) получим, что для стационарности необходимо условие:

$$\begin{cases} \alpha_{i1} I_i \le K_1 / \overline{T}_{\text{обс}1} \\ \alpha_{i2} I_i \le K_2 / \overline{T}_{\text{обс}2} \\ \ldots \\ \alpha_{iN} I_i \le K_N / \overline{T}_{\text{обс}\,N} \end{cases}$$

Это условие удобно переписать так:

$$\begin{cases} I_i \le K_1 / \left(\overline{T}_{\text{обс}1}\ \alpha_{i1}\right), \\ I_i \le K_2 / \left(\overline{T}_{\text{обс}2}\ \alpha_{i2}\right), \\ \ldots \\ I_i \le K_N / \left(\overline{T}_{\text{обс}\,N}\ \alpha_{iN}\right). \end{cases} \qquad (2.18)$$

Из определения A_i вытекает, что эта величина равна максимальному из значений I_i, отвечающих (2.18). Следовательно, A_i равно наименьшей из правых частей в (2.18). Для СеМО (рис.6) нахождение A_i несколько упрощается благодаря тому, что условие стационарности сети (2.17) содержит лишь одно неравенство. Так, полагая $I_2 = I_3 = 0$ для I_1 из (2.17) получим $I_1 \le 10/7$, откуда $A_1 = 10/7$. Аналогично вычисляются $A_2 = 10/7$ и $A_3 = 8/7$. Вполне естественно, что найденные значения совпадают с максимальными значениями для I_i, показанными в правых частях (2.16).

Условная пропускная способность

Условная пропускная способность, как и абсолютная, может быть найдена из (2.14). Для нахождения B_i в (2.14) следует подставить заданные значения всех входных интенсивностей СеМО, кроме I_j. Затем полученная система разрешается относительно I_i в виде

$$\begin{cases} I_i \le \beta_i \\ I_i \le \beta_i \\ \quad . \\ I_i \le \beta_i \end{cases} \qquad (2.19)$$

и B_i находится как наименьшая из правых частой в (2.19).

Если условие стационарности СеМО содержит лишь одно неравенство (рис. 5), то нахождение B_i упрощается. Из (2.17) для упомянутой СеМО найдем, что B_1 = 10/7, B_2 = 3/7, B_3= 12/35.

Запасы по пропускным способностям

Формула для вычисления запасов D_i дана непосредственно в их определении. Для СеМО (Рис.6) запасы составляют D_1 = 10/7-1=3/7, D_2 = 3/7-0=3/7, D_3= 12/35-0=12/35.

Контрольные вопросы

1. Перечислите системные характеристики СеМО.
2. Пусть локальные характеристики разомкнутой экспоненциальной СеМО известны. Изобразите блок-схему, отражающую последовательность, в которой вычисляются системные характеристики и исходные данные, необходимые для определения каждой их них.
3. Предположим, что все входные потоки некоторой СеМО, кроме 2 и 3-го, имеют нулевые интенсивности I_i=0,

и требуется найти характеристики F_i, B_i, A_i, D_i для i=2,3. Необходимо ли для этого вычислить всю матрицу $\|\alpha_{ij}\|$ передаточных коэффициентов или достаточно иметь ее 2 и 3-ю строки? Если достаточно, то как по ним найти требуемые характеристики?

3. Расчет системы телеобработки заданий

В качестве примера практического применения аппарата РСеМО рассмотрим задачу, заключающуюся в обоснованном выборе аппаратуры передачи данных (модема) и системного блока центрального вычислительного комплекса из соответствующих унифицированных рядов для комплексирования системы телеобработки заданий.

Задания поступают от отдельных терминалов на концентратор в виде потоков запросов (требований). Будем полагать, что концентратор представляет собой статистический мультиплексор/демультиплексор и обеспечивает суммирование поступающих от терминалов парциональных потоков заданий и распределение ответов с решениями по источникам запросов. Полагаем, что любой источник выдает новый запрос только после получения соответствующего ответа на ранее переданный запрос, т.е. источники имеют единичные емкости. Это позволяет среднее время задержки на концентраторе оценивать по суммарной интенсивности потока запросов, поскольку на концентратор поступает либо запрос, либо ответ с решением на него в силу единичной емкости источников.

Примем также, что запросы и ответы с решениями имеют фиксированный объем и передача запросов и ответов по каналу связи осуществляется без ошибок. Точнее их влиянием на конечный результат в рамках поставленной задачи пренебрегаем.

В рамках приведенных ограничений решаем эту задачу: из унифицированных устройств АПД и системных компьютерных блоков выбрать такие, которые обеспечили бы получение ответа на запрос за время, среднее значение которого не превышало бы заданное значение.

Будем также полагать, что естественным ограничением по умолчанию является обеспечение наименьшей стоимости реализации системы.

Итак, имеем следующую постановку задачи.

3.1. Задание

Дано: структура СТОД (рис. 7):

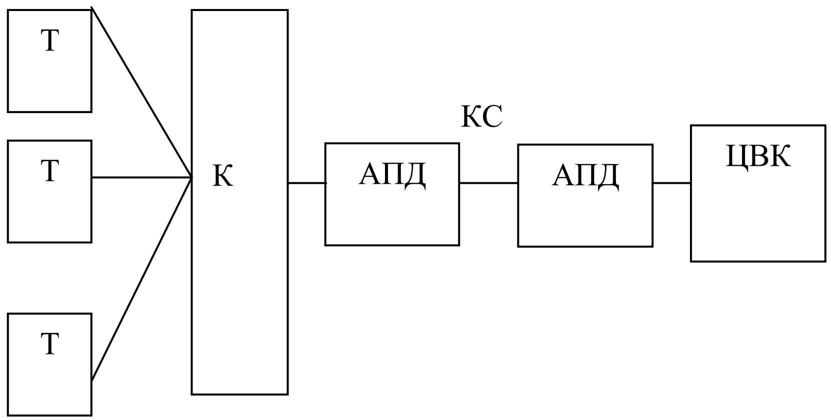


Рис. 7 Система телеобработки данных

Т – *терминалы*; К – *концентратор*; АПД (модем) – *аппаратура передачи данных*; КС – *канал связи*; ЦВК – *центральный вычислительный комплекс*

- суммарный поток требований (запросов), поступающих от терминалов через концентратор на вход АПД – пуассоновский с интенсивностью $I_{вх}$;
- объем запроса – $B_з$ [байт];
- объем результата решения – B_p [байт];
- скорость АПД $V_j,\ j=1,\ldots,J$;
- структура ЦВК (рис. 8):

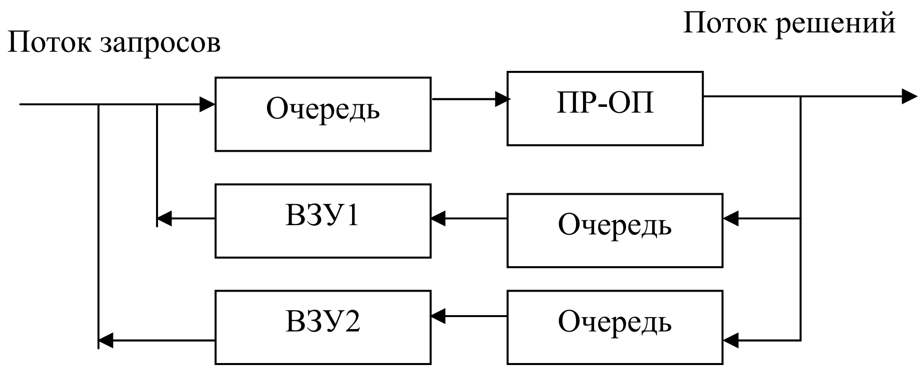


Рис. 8 Структура ЦВК

ПР-ОП – процессор-оперативная память (системный блок);
ВЗУ – внешнее запоминающее устройство.

ВЗУ 1 – хранит данные;
ВЗУ 2 – хранит программы задач.

Характеристики решаемых задач:

- трудоемкость алгоритма (число машинных операций) – Q_k, k=1,…,K;
- число обращений за данными – D_k, k=1,…,K;
- вероятность прохождения k-го алгоритма – P_k, k=1,…, K;
- интенсивность обслуживания: на ВЗУ1 – μ_1 [1/с], на ВЗУ2 – μ_2 [1/с];
- быстродействие процессора – w_i , i = 1,…, I [операций/с];
- допустимое время получения ответа – $T_{доп}$

Требуется: выбрать процессор из ряда w_i , i = 1,…, I и АПД из ряда V_j, $j = 1,\ldots, J$ так, чтобы время получения ответа с решением удовлетворяло условию

$$T_{доп} \le \tau_{отв}^{(i,j)}$$

3.2. Решение

Время получения ответа складывается из времени задержки задания/ответа с решением на концентраторе, времени передачи задания и ответа и времени, затрачиваемом на решение задания на ЦВК:

$$\tau_{отв}^{(j,i)} = \tau_{зпрд}^{(j)} + \tau_{рпрд}^{(j)} + \tau_{цвк}^{(i)} + \tau_{k}^{(j)},$$

- j – номинал скорости передачи АПД [дв.зн/с],
- i – номинал быстродействия ПР-ОП [операций/с].

Поскольку АПД обеспечивает дуплексный канал

$$\tau_{зпрд}^{(j)} = \frac{B_з \times 8}{V_j}; \quad \tau_{рпрд}^{(j)} = \frac{B_р \times 8}{V_j}.$$

Для оценивания значений $\tau_{цвк}^{(i)}$ и $\tau_{k}^{(j)}$ требуется формализовать процесс решения.

Задержка на концентраторе может возникнуть за счет ожидания передачи задания либо ответа с решением источнику за счет занятости канала передачи данных. Формализуем работу концентратора экспоненциальной одноканальной однородной СМО (рис. 2).

Среднее время обслуживания для такой СМО определяется средним временем занятости АПД, которое определим в виде

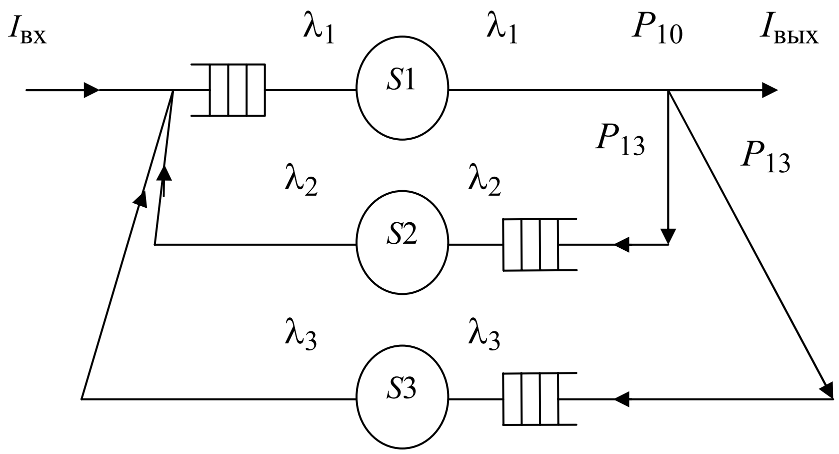
$$T_k = \frac{(B_в + B_р) \times 8}{2V_j},$$

и среднее время задержки на концентраторе определим как среднее время ожидания в очереди, согласно (1.6):

$$\tau_{k}^{(j)} = \frac{T_k \cdot I_{вх} \cdot T_k}{1 - I_{вх} \cdot T_k} = \frac{\left[(B_в + B_р) \times 8\right]^2 \cdot I_{вх}}{4V_j^2 - (B_в + B_р) \times 8 \cdot I_{вх}}$$

Отметим, что при расчете нужно следить за тем, чтобы выполнялось соотношение $(B_в+B_р)\times 8 \cdot I_{вх} \le 1$, поскольку мы рассматриваем стационарную СМО.

Для формализации расчета ЦВК используем схему сети массового обслуживания (рис.9)



$S1$ – отображает ПР-ОП; $S2$ – отображает ВЗУ1;
$S3$ - отображает ВЗУ2

Рис. 9 Сетевая модель СТОД

Получаем разомкнутую сеть МО (СеМО).

Разомкнутая экспоненциальная СеМО задается следующими параметрами:

1) числом N СМО – N=3;

2) числом каналов обслуживания в каждой СМО q_i, i=1,2,3;

3) матрицей $P = \left\| P_{ij} \right\|$ вероятностей передачи $i, j = \overline{0, N}$;

0 – внешняя среда.

4) интенсивностями $I_1 \ldots I_n$ входных потоков, у нас $I_1 = I_{вх}$;

5) средними временами обслуживания $T^1_{обс}, \ldots, T^N_{обс}$ заявок в СМО;

у нас

$$T^1_{обс} = T_{проц},$$

($T_{проц}$ есть время обслуживания отдельного требования на процессоре; зависит от производительности w_i)

$$T^2_{обс} = T_{ВЗУ1} = 1/\mu_{ВЗУ1} \quad ; \quad T^2_{обс} = T_{ВЗУ2} = 1/\mu_{ВЗУ2}$$

Среднее время пребывания заявки в СеМО рассчитывается по формуле: $\tau_{цвк} = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j T^j_{преб}$,

где $I = I_1 + I_2 + \ldots I_n$; у нас $I = I_{вх}$,

$T^j_{преб}$ - время пребывания заявки в j-й СМО, $j = 1,2,3$.

Необходимо найти интенсивности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и $T^1_{преб}, T^2_{преб}, T^3_{преб}$.

Нахождение интенсивностей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ осуществляется на основе уравнений баланса сети с учетом свойств слияния и разветвления потоков. Слияние и разветвление задается матрицей P переходов. В нашем случае, согласно рис. 9

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & P_{10} & 0 & P_{12} & P_{13} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad (3.1)$$

Уравнение баланса. Для сети без потерь $I_{вх} = I_{вых}$,

$\lambda_{jвх} = \lambda_{jвых}$, j=1,2,3.

$$\lambda_1 = I_{\text{вх}} + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 \times P_{12} \qquad (3.2)$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 \times P_{13}$$
$$I_{\text{вх}} = I_{\text{вых}} = \lambda_1 \cdot P_{10}$$

Решение системы:

$$\lambda_1 = I_{\text{вх}} \times \frac{1}{P_{10}} = \alpha_1 I_{\text{вх}};$$
$$\lambda_2 = \lambda_1 \times P_{12} = I_{\text{вх}} \times \frac{P_{12}}{P_{10}} = \alpha_2 I_{\text{вх}};$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 \times P_{13} = I_{\text{вх}} \times \frac{P_{13}}{P_{10}} = \alpha_3 I_{\text{вх}} \qquad (3.3)$$

α_j – передаточные коэффициенты. Заявка входит в сеть. Ее маршрут в сети случаен, поэтому случайно и число проходов заявки через *j*-ю СМО. Среднее значение α_j этого числа проходов называется передаточным коэффициентом.

Усредним число обращений за данными по всем задачам (запросам). Среднее число обращений к данным на ВЗУ1

$$\overline{D} = \sum_{i=1}^{k} P_i D_i \qquad (3.4)$$

Как видно из рис.10 в процессе решения задача как бы «проходит» через ПР-ОП $(\overline{D}+2)$ раз: 1 раз идентифицируется и обращается к ВЗУ 2 (за программой); $\overline{D}$ раз прерывается для обращения за данными к ВЗУ1; 1 раз завершается обработка задания и готовое решение выходит из СМО *S*1 во внешнюю среду.

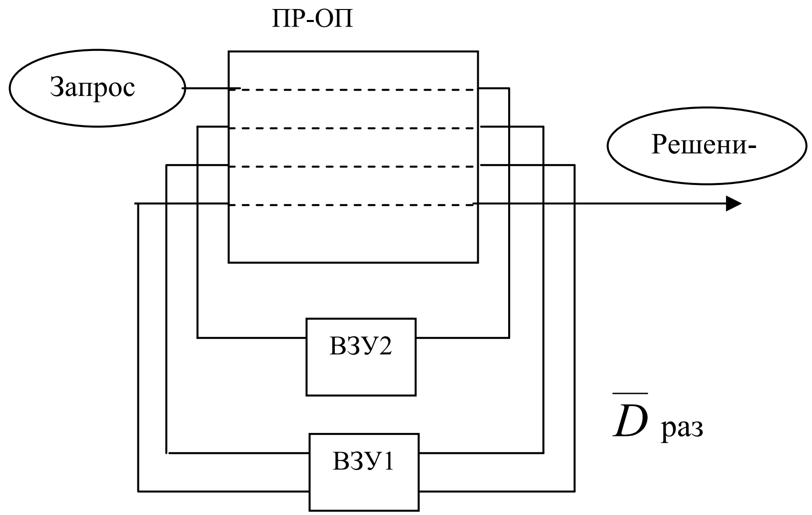


Рис.10. Процесс решения задачи

Следовательно, переходные вероятности можно теперь определить в виде

$$P_{10} = \frac{1}{\overline{D}+2}; \quad P_{12} = \frac{\overline{D}}{\overline{D}+2}; \quad P_{13} = \frac{1}{\overline{D}+2}. \qquad (3.5)$$

1. Интенсивность входных потоков отдельных СМО.

Согласно (3.3) и (3.5) имеем выражения для коэффициентов: $\alpha_1 = \overline{D}+2; \alpha_2 = \overline{D}; \alpha_3 = 1.$

И, соответственно,

$\lambda_1 = \alpha_1 I_{\text{вх}} = (\overline{D}+2)\, I_{\text{вх}}$; $\lambda_2 = \alpha_2 I_{\text{вх}} = \overline{D} \times I_{\text{вх}}$; $\lambda_3 = \alpha_3 I_{\text{вх}}$. (3.6)

Теперь можно записать

$$\overline{\tau}_{\text{цвк}} = \frac{1}{I_{\text{вх}}} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i T^{i}_{\text{пр}} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i T^{i}_{\text{пр}} \quad (3.7)$$

2. Определение $T_{\text{пр}}$ (время пребывания заявки в СМО)

2.1. Для экспоненциальной СМО

$$T_{\text{пр}} = \frac{1}{\mu\,(1-\rho)}, \qquad \rho = \lambda/\mu, \quad (3.8)$$

где μ - интенсивность обслуживания заявки.

2.2. $\rho = \lambda/\mu$ - коэффициент загрузки.

$$\rho = \lambda \times \overline{T}_{\text{обс}}. \quad (3.9)$$

2.3. Определим время обслуживания отдельного запроса на ПР-ОП ($S1$)

2.3.1. Средняя трудоемкость решения задачи

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{K} P_K Q_K \quad (3.10)$$

2.3.2. Трудоемкость обслуживания отдельного обращения

$$\overline{Q}_1 = \overline{Q}/\alpha_1 = \frac{\overline{Q}}{\overline{D}+2} \quad (3.11)$$

2.3.3. Время обслуживания отдельного обращения при быстродействии процессора w_i, $i = 1,...,I$.

$$\overline{T}^{(i)}_{\text{обс}} = \frac{\overline{Q}_1}{W_i} \quad (3.12)$$

2.3.4. Интенсивности обслуживания на ВЗУ1 и ВЗУ2 заданы μ_2 и μ_3

$$\rho^{(i)}_1 = \lambda_1 \times \overline{T}^{(i)}_{\text{обс1}} \quad (3.13)$$

$$\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 \quad (3.14)$$

$$\rho_3 = \lambda_3/\mu_3 \quad (3.15)$$

2.3.5. Время пребывания отдельного обращения (требования) в соответствующих СМО

$$T^{1}_{\text{пр}} = \frac{1}{\mu_1\,(1-\rho_1)} = \frac{\overline{T}^{(i)}_{\text{обс1}}}{1-\rho^{1}_{(i)}} = \frac{\overline{Q}_1}{W_1 - \lambda_1 Q_1} \quad (3.16)$$

$$T^{2}_{\text{пр}} = \frac{1}{\mu_{\text{взу1}}(1-\rho_2)} = \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} \quad (3.17)$$

$$T^{3}_{\text{пр}} = \frac{1}{\mu_{\text{взу2}}(1-\rho_3)} = \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3} \quad (3.18\ )$$

Таким образом, определены передаточные коэффициенты α_i, i =1,2,3 и времена пребывания отдельных требований $T^{1}_{\text{пр}}, T^{2}_{\text{пр}}, T^{3}_{\text{пр}}$ в соответствующих СМО. Подставим выражения этих величин в (3.7) и определим $\overline{\tau}_{\text{цвк}}$.

Время решения задачи на ЦВК

$$\tau^{(i)}_{\text{цвк}} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j T^{(i)}_{\text{пр}j} = \left(4 \times T^{(1)}_{\text{пр}} + T^{(2)}_{\text{пр}} + T^{(3)}_{\text{пр}}\right) =$$

$$(\overline{D}+2) \times \frac{\overline{Q}_1}{W_1 - \lambda_1 Q_1} + \overline{D} \times \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} + \frac{1}{\mu_3 - \lambda_3} \quad (319)$$

4. Общее время ответа складывается из времен передачи запроса и решения и времени получения решения на ЦВК:

$$\tau_{\text{отв}}^{(j,i)} = \frac{8}{V_j}(B_{\text{з}} + B_{\text{р}}) + T_{\text{цвк}}^{(i)} + \tau_k^j \qquad (3.20)$$

Это общее время получения ответа на запрос должно удовлетворять условию

$$\tau_{\text{отв}}^{(j,i)} \le T_{\text{доп}} \qquad (3.21)$$

и задавать допустимый вариант комплексирования АПД и ЦВК.

3.3. Последовательность расчета

Преамбула

0. Формализация системы ЦВК.

Среднее время пребывания заявки в ЦВК формула (0).

1. Нахождение интенсивностей входных потоков отдельных СМО: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

1.1 . Матрица переходных вероятностей (3.1).

1.2 . Уравнение баланса (3.2).

1.3 . Решение системы уравнений баланса (3.3).

1.4 . Среднее число обращений к данным на ВЗУ1 (3.4).

1.5 . Вычисление переходных вероятностей (3.5).

1.6 . Определение интенсивностей входных потоков отдельных СМО (3.6).

1.7 . Выражение для определения времени решения запроса на ЦВК (3.7).

2. Определение времени пребывания требований в СМО *S*1, *S*2, *S*3.

2.1 . Время пребывания заявки в системе отдельной СМО (3.8).

2.2 . Коэффициент загрузки (3.9).

2.3 . Определение времени обслуживания отдельного запроса.

2.3.1.Средняя трудоемкость решения задачи (3.10).

2.3.2. Средняя трудоемкость обслуживания отдельного обращения (3.11).

2.3.3. Время обслуживания отдельного запроса (3.12).

2.3.4. Определение коэффициентов загрузки (3.13), (3.14), (3.15).

2.3.5. Определение времени пребывания отдельного обращения (требования) в соответствующей СМО (3.16), (3.17), (3.18).

3. Вычисление времени, затрачиваемого на получение решения в ЦВК по запросу (3.19).

4. Выражение для вычисления общего времени ответа на запрос (3.20).

5. Условие для комплексирования вариантов АПД и процессоров в систему (3.21).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задание 1

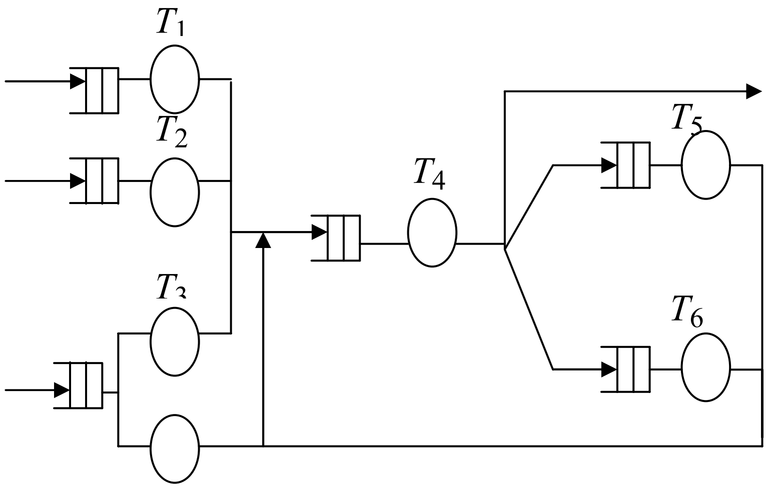


Рис.11. Сеть массового обслуживания

На рис. 11 изображена экспоненциальная СеМО, имеющая следующие параметры:

1) $N = 6$;
2) $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$, $K_4 = 1$, $K_5 = 1$, $K_6 = 1$,
3) $p_{40} = 0{,}3$, $p_{45} = 0{,}5$, $p_{46} = 0{,}2$;
4) $I_1 = 1/100$, $I_2 = 1/70$, $I_3 = 1/50$ (заявок в секунду);
5) $T_1 = 50$, $T_2 = 35$, $T_3 = 90$, $T_4 = 7$, $T_5 = 15$, $T_2 = 40$ с.

(параметры $T_1 - T_6$ задают соответствующие времена обслуживания).

Определим *правила удаления* СМО из заданной (рис. 11) сети следующим образом. Если удаляется СМО с номером от 1 до 3, то удаляется также соответствующий входной поток. Например, при удалении СМО1 удаляется поток с интенсивностью I_1. Если удаляется СМО с номером 5 или 6, то вероятность p_{40} увеличивается соответственно на p_{45} (т.е. на 0,5) или p_{46} (т.е. на 0,2). Например, при удалении СМО 5 вероятность p_{40} увеличивается на 0,5 и становится равна 0,8. После удаления СМО оставшиеся СМО нумеруются заново.

В таблице 1 заданы варианты СеМО, получаемые путём удаления различных СМО из сети (рис. 11). Удаляемые СМО указаны знаком « - », остающиеся – знаком « + ». Требуется рассчитать локальные характеристики для указанных вариантов СеМО

Таблица 1

	Номера СМО					
Номер варианта	1	2	3	4	5	6
1	+	+	-	+	-	+
2	+	+	-	+	+	+
3	-	-	+	+	-	+
4	-	+	-	+	-	+
5	-	+	-	+	+	+
6	+	-	-	+	+	+
7	+	+	-	+	+	-
8	-	-	+	+	+	-
9	-	+	-	+	+	-
10	+	+	+	+	-	-

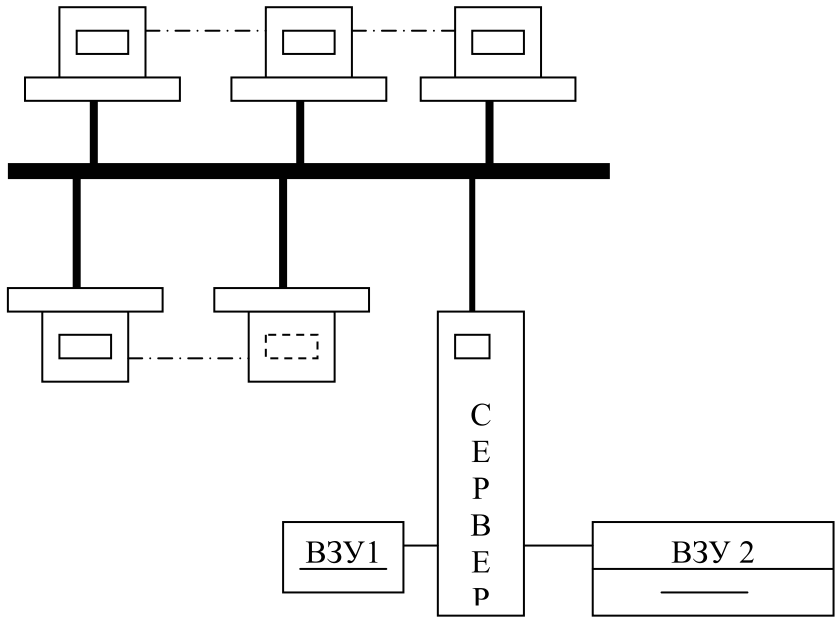
Задание 2

Для варианта СеМО (Рис.11 с приведенными данными) рассчитать характеристики E, F_i, B_i, A_i, D_i.

Характеристики F_i, B_i, A_i, D_i рассчитать только для тех i для которых $I_i \neq 0$.

Задание 3

Расчет времени решения задания в Локальной Сети типа Ethernet



Метод доступа - МДКС /ОС

Рис. 12. Локальная сеть Ethernet.

Исходные данные:

- Количество рабочих станций (РС) – N (задается преподавателем).
- Сервер с двумя жесткими дисками.
- Среднее время доступа к диску - t_d (задается преподавателем).
- Скорость считывания с диска - V_d [бит/с] (задается преподавателем).
- Длина слова данных при записи /чтении на диски – $B_{з/ч}$ [байт] (задается преподавателем).
- Объем запроса с заданием - $B_з$ [байт] (задается преподавателем).
- Объем ответа с решением $B_р$ [байт] (задается преподавателем).
- Характеристики решаемых задач:

Трудоемкость алгоритма (число маш. операций/с) Q	Q_1	Q_2	…	Q_N
Число обращений за данными D	D_1	D_2	…	D_N
Вероятность прохождения алгоритма по пути с данными характеристиками QD	p_1	p_2	…	p_N

- Интенсивность поступления заданий от РС - I_j, $j = \overline{1,N}$ (задается преподавателем в соответствии с вариантом).
- Шина – толстый коаксиал, тип 10BASE-5, скорость передачи 10 Мбит/с.
- Адаптеры ISA 8 и 16-разрядные.

- Быстродействие процессоров системных блоков W_h, $h=\overline{1,H}$ [опер/с]. Значения производительности системных блоков представлены в Табл.
- Допустимое время получения ответа с решением - $T_{\text{доп}}$ (задается соответствующим вариантом задания).
- *Требуется*: выбрать системный блок для сервера из ряда W_h, $h=\overline{1,H}$ и адаптер так, чтобы среднее время получения ответа с решением

$$\overline{T}_{\text{отв}} \leq T_{\text{доп}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование систем с использованием теории массового обслуживания /Под ред. д.т.н. Д.Н.Колесникова: Учеб. Пособие /СПбГПУ. СПб, 2003. – 180 с.
2. Башарин В. Г. Анализ очередей в вычислительных сетях. М.: Наука, 1989. – 334 с.
3. Башарин В. Г. Модели Информационно–вычислительных систем. М.: Наука, 1993. – 69 с.
4. Башарин Г. П. Модели информационно–вычислительных систем: Сборник научных трудов. М.: Наука, 1994. – 78 с.

5. Задорожный В.Н. Анализ разомкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания: Методические указания к лабораторным работам по автоматизации проектирования АСУ/Омский политехнический институт. Омск, 1986. – 32 с.
6. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации/В.Л. Брейдо. СПб: Питер, 2003. – 688 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Сэсэг Ивановна Олзоева

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Редактор *Т.А. Стороженко*

Подписано в печать 13.09.2004 г. Формат 60х84 1/16.
Усл.п.л. 3,95, уч.-изд.л.3,5. Печать операт., бум. писч.
Тираж 100 экз. Заказ № 127.

Издательство ВСГТУ. г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40, в.