

Лекция № 1

Теория погрешностей

План

- ☐ Источники и классификация погрешностей.
- ☐ Абсолютная и относительная погрешности. Формы записи данных.
- ☐ Вычислительная погрешность. Погрешность функции.
- ☐ Понятие погрешности машинной арифметики.

1.1.1. Источники и классификация погрешностей

Источниками возникновения погрешности численного решения задачи являются следующие факторы.

- ☐ Неточность математического описания, в частности, неточность задания начальных данных.
- ☐ Неточность численного метода решения задачи.

Данная причина возникает, например, когда решение математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, что приводит к необходимости ограничения их числа, т. е. использования приближенного решения.

- ☐ Конечная точность машинной арифметики.

Виды погрешностей

Все погрешности можно разделить на три вида:

- ☐ неустраняемая погрешность;
- ☐ погрешность метода;
- ☐ вычислительная погрешность.

Результирующая погрешность определяется как сумма величин всех перечисленных выше погрешностей.

Неустраняемая погрешность состоит из двух частей:

- ❑ погрешность, обусловленная неточностью задания числовых данных, входящих в математическое описание задачи;
- ❑ погрешность, являющаяся следствием несоответствия математического описания задачи реальной действительности (погрешность математической модели).

Для вычислителя погрешность задачи следует считать неустраняемой, хотя постановщик задачи иногда может ее изменить.

Погрешность метода связана со способом решения поставленной математической задачи. Она появляется в результате замены исходной математической модели другой и/или конечной последовательностью других более простых (например, линейных) моделей. При создании численных методов закладывается возможность отслеживания таких погрешностей и доведения их до сколь угодно малого уровня. Отсюда естественно отношение к погрешности метода как устранимой (или условной).

Вычислительная погрешность (погрешность округлений) обусловлена необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применяемой вычислительной техники.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий описанные виды погрешностей, на примере задачи описания движения маятника (рис. 1.1.1), в которой требуется предсказать угол отклонения маятника от вертикали θ , начинающего движение в момент времени $t = t_0$.

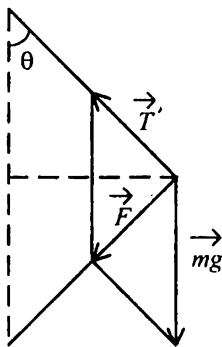


Рис. 1.1.1. Модель математического маятника

Движение маятника может быть описано дифференциальным уравнением второго порядка:

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta + \mu \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (1.1.1)$$

где l — длина маятника; g — ускорение свободного падения; μ — коэффициент трения.

Причины возникновения погрешностей в данной задаче.

- Реальная сила трения зависит от скорости движения маятника по нелинейному закону.
- Значения величин l , g , μ , t_0 , $\theta(t_0)$, $\theta'(t_0)$ известны с некоторыми погрешностями.
- Для решения уравнения (1.1.1), не имеющего аналитического решения, приходится использовать численный метод, вследствие чего возникает погрешность метода.
- Вычислительная погрешность, возникающая вследствие конечной точности представления чисел в компьютере.

1.1.2. Абсолютная и относительная погрешности. Формы записи данных

Определение 1.1.1. Если a — точное значение некоторой величины и a^* — известное приближение к нему, то абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называют некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что

$$|a^* - a| \leq \Delta(a^*). \quad (1.1.2)$$

Определение 1.1.2. Относительной погрешностью приближенного значения называют некоторую величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left| \frac{a^* - a}{a^*} \right| \leq \delta(a^*). \quad (1.1.3)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Определение 1.1.3. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример 1.1.1.

$$a^* = 0,03045 \quad a^* = 0,03045000$$

Примечание

Здесь цифры, подчеркнутые линией, значащие.

Определение 1.1.4. Значащую цифру называют верной, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1.1.2.

$$a^* = 0,03045 \quad \Delta(a^*) = 0,000003$$

$$a^* = 0,030450000 \quad \Delta(a^*) = 0,00000007$$

Примечание

Здесь цифры, подчеркнутые линией, верные.

Определение 1.1.5. Число записано со всеми верными цифрами, если в его записи представлены только верные значащие цифры.

Иногда употребляется термин *число верных цифр после запятой*: подсчитывается число верных цифр после запятой от первой цифры до последней верной цифры.

Довольно часто информация о некоторой величине задается пределами измерений

$$a_1 \leq a \leq a_2.$$

Принято записывать эти пределы с одинаковым числом знаков после запятой, так как обычно достаточно грубого представления о погрешности. В записи чисел a_1, a_2 обычно берут столько значащих цифр, сколько нужно для того, чтобы разность $a_2 - a_1$ содержала одну-две значащие цифры.

Информацию о том, что a^* является приближенным значением числа a с абсолютной погрешностью $\Delta(a^*)$, принято также записывать в виде:

$$a = a^* \pm \Delta(a^*). \quad (1.1.4)$$

Числа $a^*, \Delta(a^*)$ принято записывать с одинаковым количеством знаков после запятой.

Пример 1.1.3.

$$\begin{cases} a = 1,123 \pm 0,004 \\ a = 1,123 \pm 4 \cdot 10^{-3} \\ 1,123 - 0,004 \leq a \leq 1,123 + 0,004 \end{cases}$$

Информацию о том, что a^* является приближенным значением числа a с относительной погрешностью $\delta(a^*)$, записывают в виде:

$$a = a^* (1 \pm \delta(a^*)).$$

Пример 1.1.4.

$$1,123 \cdot (1 - 0,003) \leq a \leq 1,123 \cdot (1 + 0,003)$$

Примечание

Данная запись числа эквивалентна записи чисел из примера 1.1.3.

1.1.3. Вычислительная погрешность

Далее для краткости будем обозначать абсолютную погрешность числа x как e_x , относительную погрешность — δ_x .

1. Погрешность суммирования чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) + (y \pm e_y) = (x + y) \pm (e_x + e_y).$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x + y|} = \frac{e_x}{|x + y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x + y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x + y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x + y|} \delta_y.$$

2. Погрешность вычитания чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) - (y \pm e_y) = (x - y) \pm (e_x + e_y).$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x - y|} = \frac{e_x}{|x - y|} \frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x - y|} \frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x - y|} \delta_x + \frac{|y|}{|x - y|} \delta_y.$$

3. Погрешность умножения чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) \cdot (y \pm e_y) = x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y \pm e_x \cdot e_y \approx x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{|x \cdot y|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

4. Погрешность деления чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$.

Абсолютная погрешность:

$$z = \frac{x \pm e_x}{y \pm e_y} = \frac{(x \pm e_x) \cdot (y \pm e_y)}{(y \pm e_y) \cdot (y \pm e_y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{y \cdot e_x + x \cdot e_y}{y^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{\left| \frac{x}{y} \right|} = \frac{|y| \cdot e_x + |x| \cdot e_y}{y^2 \cdot \left| \frac{x}{y} \right|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y.$$

5. Погрешность функции, зависящей от одной переменной.

Абсолютная погрешность:

$$f(x \pm e_x) \approx f(x) \pm f'(x) \cdot e_x.$$

$$\Delta f = f(x \pm e_x) - f(x) = |f'(x)| \cdot e_x.$$

Относительная погрешность:

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| e_x.$$

Аналогично получают формулы для оценки абсолютной и относительной погрешностей для функций, зависящих от n переменных.

1.1.4. Понятие погрешности машинных вычислений

Для представления чисел в памяти компьютера применяют два способа:

- ☐ с фиксированной запятой¹;
- ☐ с плавающей запятой.

Пусть в основу запоминающего устройства положены одностипные физические устройства, имеющие r устойчивых состояний, при этом каждое из

¹ Здесь в обозначении устройств хранения информации мы используем устоявшуюся в отечественной литературе терминологию, в которой в качестве разделительного знака между целой и дробной частями числа используется запятая.

устройств состоит из одинакового количества элементов k , в одном из которых фиксируется знак числа. Упорядоченные элементы образуют разрядную сетку машинного слова: в каждом разряде может быть записано одно из базисных чисел $0, 1, \dots, r-1$ (одна из r "цифр" r -ой системы счисления) и в специальном разряде отображен знак "+" или "-". При записи чисел с фиксированной запятой кроме упомянутых r параметров (основания системы счисления) и k (количество разрядов, отводимых под запись числа) указывается еще общее количество l разрядов, выделяемых под дробную часть числа. Таким образом, положительное вещественное число a , представляющее собой в r -ой системе бесконечную непериодическую дробь, отображающуюся конечной последовательностью

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-l} \alpha_{k-l+1} \dots \alpha_{k-1} \alpha_k,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$,

т. е.

$$a^* \approx \alpha_1 r^{k-l-1} + \alpha_2 r^{k-l-2} + \dots + \alpha_{k-l} r^0 + \alpha_{k-l+1} r^{-1} + \dots + \alpha_{k-1} r^{-(l-1)} + \alpha_k r^{-l}$$

Диапазон представляемых таким способом чисел определяется числами с наибольшими цифрами во всех разрядах, т. е. наименьшим числом $-(r-1)(r-1)\dots(r-1)$ и наибольшим $(r-1)(r-1)\dots(r-1)$, а абсолютная точ-

ность представления есть оценка величины $|a - a^*|$, зависящая от способа

округления. Абсолютная точность представления вещественных чисел с фиксированной запятой одинакова в любой части диапазона. В то же время относительная точность может значительно различаться в зависимости от того, берется a близким к нулю или к границе диапазона.

Пример 1.1.5.

Рассмотрим запоминающее устройство с фиксированной запятой, состоящее из $k = 7$ элементов и имеющее $r = 10$ ($r = 0, 1, \dots, 9$). Будем считать, что общее количество разрядов, выделяемых под дробную часть, $l = 3$, под знак — один разряд, под целую часть — три разряда (рис. 1.1.2).

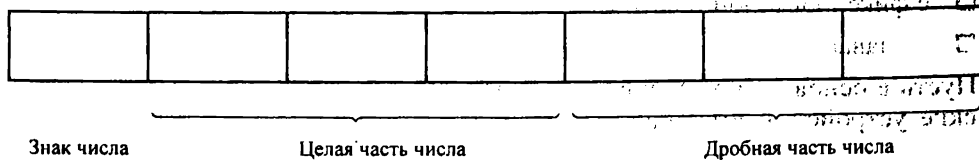


Рис. 1.1.2. Схема машинного слова запоминающего устройства с фиксированной запятой

Тогда наибольшее число, которое можно сохранить в данном запоминающем устройстве, равно 999,999, а наименьшее равно -999,999. У любого числа из указанного диапазона, являющегося бесконечной периодической дробью, вне зависимости от его величины после запятой сохраняется только 3 цифры. Поэтому абсолютная точность представления чисел $a_1 = 1,123456$ и $a_2 = 999,123456$ оказывается одинаковой:

$$\Delta_1 = 1,123456 - 1,123 = 0,000456,$$

$$\Delta_2 = 999,123456 - 999,123 = 0,000456.$$

Относительные погрешности представления этих чисел в запоминающем устройстве будут различны:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} \approx 0,04\%,$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{a_2} \approx 0,5 \cdot 10^{-4}\%.$$

В основе значительно чаще употребляемого представления *с плавающей запятой* лежит экспоненциальная форма записи числа:

$$a = M \cdot r^p,$$

где r — основание; p — порядок; M — мантисса ($r^{-1} \leq |M| \leq 1$). Если под мантиссу выделяется l r -ичных элементов, а под порядок — m , то в системе записи с плавающей запятой вещественное число a представляется конечным числом

$$a^* \approx \pm (\beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \dots + \beta_l r^{-l}) \cdot r^\gamma,$$

где γ — целое число из промежутка $[-r^m, r^m - 1]$; $\beta_1 \in \{1, \dots, r-1\}$
 $\beta_i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, $i = 2, \dots, l$.

Структура машинного слова запоминающего устройства с плавающей запятой представлена на рис. 1.1.3.

Знак порядка	Порядок числа (m разрядов)	Знак мантиссы	Мантисса числа (l разрядов)

Рис. 1.1.3. Схема машинного слова запоминающего устройства с плавающей запятой

Числа $\pm r^l$ определяют границы допустимого числового диапазона.

Относительная точность представления вещественных чисел равна:

$$\left(\frac{a - a^*}{a} \right) = \frac{\beta_{l+1}r^{-(l+1)} + \beta_{l+2}r^{-(l+2)} + \dots}{\beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \dots} \leq \frac{r^{-l}}{\beta_1 r^{-1}} \leq r^{1-l},$$

т. е. относительная точность одинакова в любой части числового диапазона и зависит лишь от числа разрядов, отводимых под мантиссу числа.

Например, для записи числа в 48-разрядном машинном слове БЭСМ-6 40 двоичных разрядов выделялись под мантиссу, 6 — под порядок числа и 2 — под знаки мантиссы, т. е. $r = 2$, $l = 40$, $m = 6$. Следовательно, точность представления числа с плавающей запятой не хуже $2^{-39} (\approx 10^{-12})$, граница машинного нуля — $2^{-64} (\approx 10^{-19})$, машинной бесконечности — 2^{63}

Пример 1.1.6.

Рассмотрим запоминающее устройство, состоящее из $k = 8$ элементов и имеющее $r = 10$ ($r = 0, 1, \dots, 9$). Будем считать, что общее количество разрядов, выделяемых под дробную часть, — $l = 5$, под знак порядка числа — 1 ячейка, под знак мантиссы числа — 1 ячейка, под порядок — 2 ячейки.

Оценим точность представления чисел $a_1 = 1,123123$ и $a_2 = 999,123123$.

Запишем числа в форме представления с плавающей запятой:

$$a_1 = 0,1123123 \cdot 10^1,$$

$$a_2 = 0,999123123 \cdot 10^3$$

В запоминающем устройстве числа a_1 , a_2 будут записаны в виде, показанном на рис. 1.1.4.

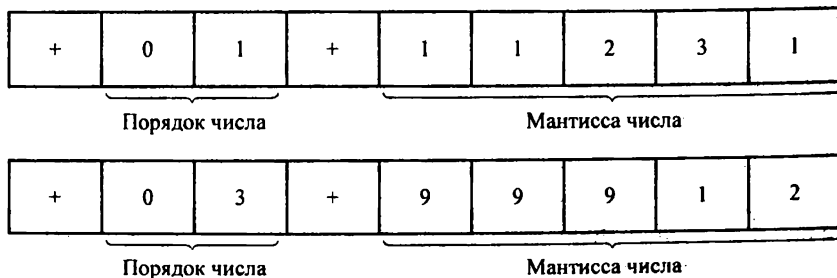


Рис. 1.1.4. Представление чисел a_1 , a_2 в запоминающем устройстве с плавающей запятой

Абсолютные погрешности чисел равны:

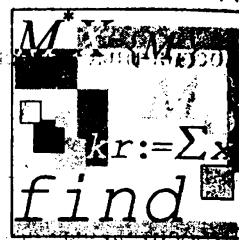
$$\Delta_1 = (0,1123123 - 0,11231) \cdot 10^1 \approx (0,23 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^1,$$

$$\Delta_2 = (0,999123123 - 0,99912) \cdot 10^3 \approx (0,31 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^3.$$

Относительные погрешности чисел равны:

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{a_1} = \frac{(0,23 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^1}{0,1123 \cdot 10^1} \approx 2 \cdot 10^{-3} \%,$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta_2}{a_2} = \frac{(0,31 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^3}{0,99912 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{-3} \%.$$



Лекция № 2

Решение уравнений с одной переменной

План

- ☐ Постановка задачи.
- ☐ Отделение корней.
- ☐ Метод половинного деления.
- ☐ Метод простой итерации.
- ☐ Оценка погрешности метода простой итерации.
- ☐ Преобразование уравнения к итерационному виду.
- ☐ Решение уравнений методом простой итерации в пакете Mathcad.

1.2.1. Постановка задачи

Наиболее общий вид нелинейного уравнения:

$$F(x) = 0, \quad (1.2.1)$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

Определение 1.2.1. Всякое число $\xi \in [a, b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, называется корнем уравнения (1.2.1).

Определение 1.2.2. Число ξ называется корнем k -ой кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $F(x)$ равны нулю ее производные до $(k-1)$ -го порядка включительно:

$$F(\xi) = F'(\xi) = \dots = F^{(k-1)}(\xi) = 0. \quad (1.2.2)$$

Определение 1.2.3. Однократный корень называется простым.

Определение 1.2.4. Уравнения $F(x)=0$ и $G(x)=0$ называются равносильными (эквивалентными), если множества решений данных уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на *алгебраические* и *трансцендентные*.

Определение 1.2.5. Уравнение (1.2.1) называется алгебраическим, если функция $F(x)$ является алгебраической.

Путем алгебраических преобразований из всякого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1.2.3)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — действительные коэффициенты уравнения; x — неизвестное.

Из алгебры известно, что всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один вещественный или два комплексно сопряженных корня.

Определение 1.2.6. Уравнение (1.2.1) называется трансцендентным, если функция $F(x)$ не является алгебраической.

Определение 1.2.7. Решить уравнение (1.2.1) означает следующее.

1. Установить имеет ли уравнение корни.
2. Определить число корней уравнения.
3. Найти значения корней уравнения с заданной точностью.

1.2.2. Отделение корней

Определение 1.2.8. Отделение корней — процедура нахождения отрезков, на которых уравнение (1.2.1) имеет только одно решение.

В большинстве случаев отделение корней можно провести графически. Для этого достаточно построить график функции $F(x)$ и определить отрезки, на которых функция $F(x)$ имеет только одну точку пересечения с осью абсцисс.

В сомнительных случаях графическое отделение корней необходимо подкреплять вычислениями. При этом можно использовать следующие очевидные положения:

- если непрерывная функция принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков (т. е. $F(a) \cdot F(b) < 0$), то уравнение (1.2.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;

- ☐ если функция $F(x)$ к тому же и строго монотонна, то корень на отрезке единственный.

1.2.3. Метод половинного деления

Пусть уравнение (1.2.1) имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень, причем функция $F(x)$ на данном отрезке непрерывна (рис. 1.2.1).

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если $F(c) \neq 0$, то возможны два случая:

- ☐ функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$;
- ☐ функция $F(x)$ меняет знак на отрезке $[c, b]$.

Выбирая в каждом случае тот отрезок, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления дальше, можно прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

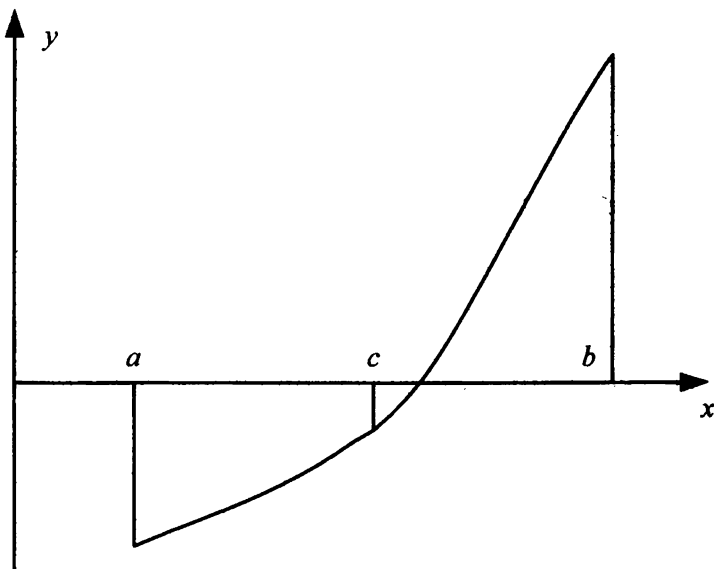


Рис. 1.2.1. К объяснению метода половинного деления

Пример 1.2.1.

Решение в пакете Mathcad методом половинного деления уравнения

$$x^4 - 11x^3 + x^2 + 0,1 = 0.$$

1. Задание функции:

$$f(x) := x^4 - 11 \cdot x^3 + x^2 + x + 0.1$$

2. Построение графика функции (рис. 1.2.2).

$$x := -1, -1 + 10^{-3} .. 1.$$

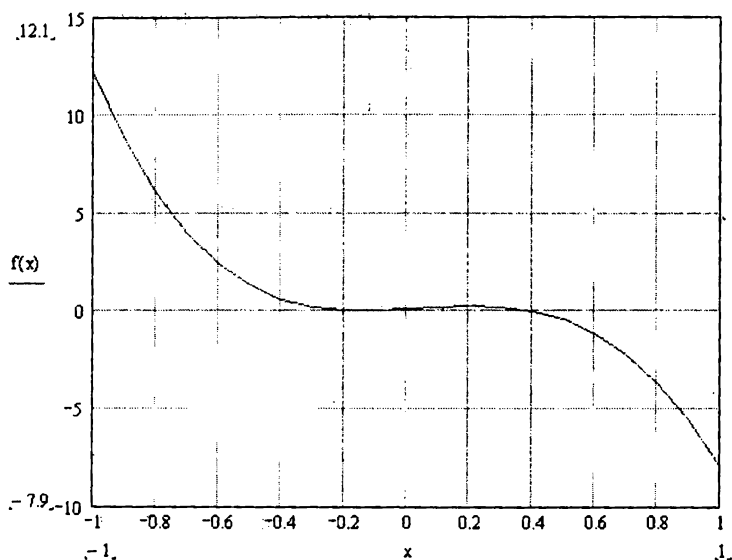


Рис. 1.2.2. График функции $f(x) = x^4 - 11x^3 + x^2 + x + 0,1$

3. Задание функции, реализующей метод половинного деления (рис. 1.2.3).
Здесь аргументы функции: f — имя функции, $x1, x2$ — левая и правая координаты концов отрезка; ϵ — точность вычисления корня.

4. Вычисление значения корня уравнения:

$$q := \text{Div2}(f, 0.3, 1, 10^{-5}) \quad q = 0.39417$$

5. Проверка найденного значения корня:

$$f(q) = 1.457 \times 10^{-5}$$

Для рассмотрения процесса нахождения корня уравнения в динамике необходимо сохранить значение корня на каждом шаге вычислительной

процедуры и построить зависимость значения корня от номера шага. Функция, возвращающая значение корня на каждом шаге метода половинного деления, представлена на рис. 1.2.4. Аргументы функции: f — имя функции, x_1, x_2 — левая и правая координаты концов отрезка, ε — точность вычисления корня

```
Div2(f, x1, x2, ε) := | L ← x2 - x1
                     | while L > ε
                     |   | c ←  $\frac{x_2 + x_1}{2}$ 
                     |   | x2 ← c if f(c) · f(x1) < 0
                     |   | x1 ← c
                     |   | L ← x2 - x1
                     | c
```

Рис. 1.2.3. Функция, реализующая метод половинного деления (файл Div2.mcd)

```
Div2I(f, x1, x2, ε) := | L ← x2 - x1
                       | i ← 0
                       | while L > ε
                       |   | c ←  $\frac{x_2 + x_1}{2}$ 
                       |   | x2 ← c if f(c) · f(x1) < 0
                       |   | x1 ← c otherwise
                       |   | L ← x2 - x1
                       |   | Ri,0 ← i
                       |   | Ri,1 ← c
                       |   | i ← i + 1
                       | R
```

Рис. 1.2.4. Функция, реализующая метод половинного деления и возвращающая значение корня уравнения на каждом шаге процесса вычислений (файл Div2I.mcd)

После создания функции необходимо дополнить описанный выше документ следующей последовательностью команд.

1. Вычисление матрицы, первый столбец которой содержит номер итерации, второй — значение корня:

$$Q := \text{Div2I}(f, 0.3, 1, 10^{-5}).$$

2. Визуализация зависимости значения корня от номера шага вычислительной процедуры (рис. 1.2.5).

$$m := 0 \dots \text{rows}(Q) - 1$$

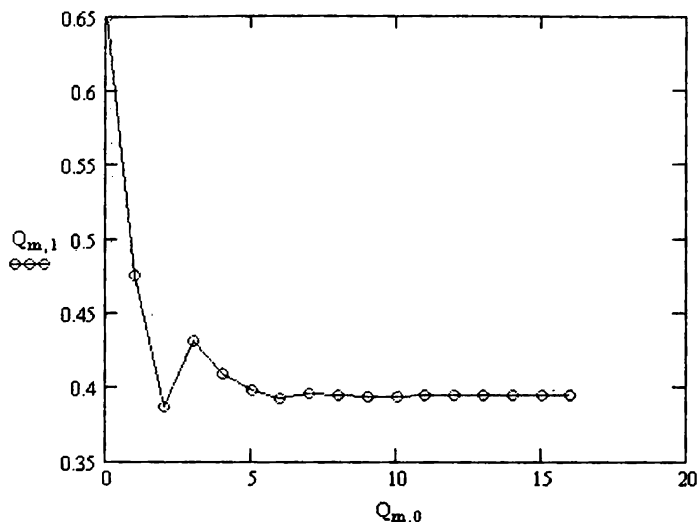


Рис. 1.2.5. Зависимость значения корня от номера шага вычислительной процедуры

1.2.4. Метод простой итерации

Заменяем уравнение (1.2.1) равносильным уравнением

$$x = f(x). \quad (1.2.4)$$

Пусть ξ — корень уравнения (1.2.4), а x_0 , полученное каким-либо способом нулевое приближение к корню ξ . Подставляя x_0 в правую часть уравнения (1.2.4), получим некоторое число $x_1 = f(x_0)$. Повторим данную процедуру с x_1 и получим $x_2 = f(x_1)$. Повторяя описанную процедуру, получим последовательность

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, \quad (1.2.5)$$

называемую итерационной последовательностью.

Геометрическая интерпретация данного алгоритма представлена на рис. 1.2.6.

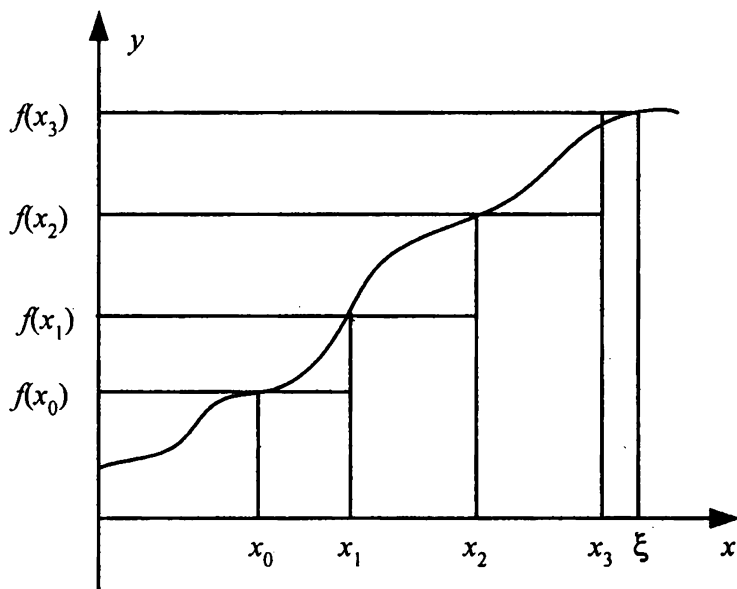


Рис. 1.2.6. К объяснению метода простой итерации

Итерационная последовательность, вообще говоря, может быть как сходящейся, так и расходящейся, что определяется видом функции $f(x)$.

Теорема 1.2.1. Если функция $f(x)$ непрерывна, а последовательность (1.2.5) сходится, то предел последовательности (1.2.5) является корнем уравнения (1.2.4).

Действительно, пусть $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Перейдем к пределу в равенстве $x_n = f(x_{n-1})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = f(\xi). \quad (1.2.6)$$

Условие сходимости итерационного процесса определяется теоремой о достаточном условии сходимости итерационного процесса.

Теорема 1.2.2. Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

1. $f(x)$ определена и дифференцируема на $[a, b]$.

2. $f(x) \in [a, b]$ для всех $x \in [a, b]$.

3. Существует такое вещественное q , что $|f'(x)| \leq q < 1$ для всех $x \in [a, b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a, b]$.

Доказательство. Построим итерационную последовательность вида (1.2.5) с любым начальным значением $x_0 \in [a, b]$. В силу условия 2 теоремы 1.2.2 все члены последовательности находятся в отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим два последовательных приближения $x_n = f(x_{n-1})$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(c)(x_n - x_{n-1}), \quad c \in [x_{n-1}, x_n].$$

Переходя к модулям и принимая во внимание условие 3 теоремы 1.2.2, получим

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f'(c)| \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq q |x_n - x_{n-1}|, \\ |x_{n+1} - x_n| &\leq q |x_n - x_{n-1}|. \end{aligned}$$

При $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq q |x_1 - x_0|, \\ |x_3 - x_2| &\leq q \cdot |x_2 - x_1| \leq q^2 |x_1 - x_0|, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|.$$

Рассмотрим ряд

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots \quad (1.2.8)$$

Составим частичные суммы этого ряда

$$S_1 = x_0, \quad S_2 = x_1, \quad \dots, \quad S_{n+1} = x_n.$$

Заметим, что $(n+1)$ -я частичная сумма ряда (1.2.8) совпадает с n -ым членом итерационной последовательности (1.2.5), т. е.

$$S_{n+1} = x_n. \quad (1.2.9)$$

Сравним ряд (1.2.8) с рядом

$$|x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + q^2|x_1 - x_0| + \dots \quad (1.2.10)$$

Заметим, что в силу соотношения (1.2.7) абсолютные величины членов ряда (1.2.8) не превосходят соответствующих членов ряда (1.2.10). Но ряд (1.2.10) сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ($q < 1$ по условию). Следовательно, и ряд (1.2.8) сходится, т. е. его частичная сумма (1.2.9) имеет предел. Пусть $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. В силу непрерывности функции f получаем (по формуле 1.2.6):

$$\xi = f(\xi),$$

т. е. ξ — корень уравнения $x = f(x)$.

Отметим, что условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.

1.2.5. Оценка погрешности метода простой итерации

Пусть x_n — приближение к истинному значению корня уравнения $x = f(x)$. Абсолютная ошибка приближения x_n оценивается модулем

$$\Delta x_n = |\xi - x_n|.$$

Принимая во внимание (1.2.8) и (1.2.9), имеем

$$\xi - x_n = \xi - S_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \dots \quad (1.2.11)$$

Сравним (1.2.11) с остатком ряда (1.2.9):

$$q^n |x_1 - x_0| + q^{n+1} |x_1 - x_0| + \dots \quad (1.2.12)$$

Учитывая оценку (1.2.7), получаем

$$|\xi - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0| + q^{n+1} |x_1 - x_0| + \dots = \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Таким образом, для оценки погрешности n -го приближения получается формула

$$\Delta x_n \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|. \quad (1.2.13)$$

На практике удобнее использовать модификацию формулы (1.2.13).

Примем за нулевое приближение x_{n-1} (вместо x_0). Следующим приближением будет x_n (вместо x_1).

Так как $|x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1} |x_1 - x_0|$, то

$$\Delta x_n \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (1.2.14)$$

При заданной точности ответа ε итерационный процесс прекращается, если $\Delta x_n \leq \varepsilon$.

1.2.6. Преобразование уравнения к итерационному виду

Уравнение $F(x)=0$ преобразуется к виду, пригодному для итерационного процесса, следующим преобразованием

$$x = x - mF(x),$$

где m — отличная от нуля константа.

В этом случае

$$f(x) = x - mF(x). \quad (1.2.15)$$

Функция $f(x)$ должна удовлетворять условиям теоремы 1.2.2. Дифференцируя (1.2.15), получим

$$f'(x) = 1 - mF'(x). \quad (1.2.16)$$

Для выполнения условия 3 теоремы 1.2.2 достаточно подобрать m так, чтобы для всех $x \in [a, b]$

$$|1 - mF'(x)| \leq 1. \quad (1.2.17)$$

1.2.7. Решение уравнений методом простой итерации в пакете Mathcad

Продemonстрируем использование метода простой итерации на примере нахождения корня уравнения $x^4 - 11 \cdot x^3 + x^2 + x + 0,1 = 0$

1. Задание функции, стоящей в правой части (1.2.1):

$$f(x) := x^4 - 11 \cdot x^3 + x^2 + x + 0.1$$

2. Задание функции в соответствии с (1.2.15):

$$f1(x, m, f) := x - m \cdot f(x)$$

3. Задание функции в соответствии с (1.2.16):

$$F(x, m, f1, f) := \left| \frac{d}{dx} f1(x, m, f) \right|$$

4. Построение графиков функций $f1, F$ (рис. 1.2.7).

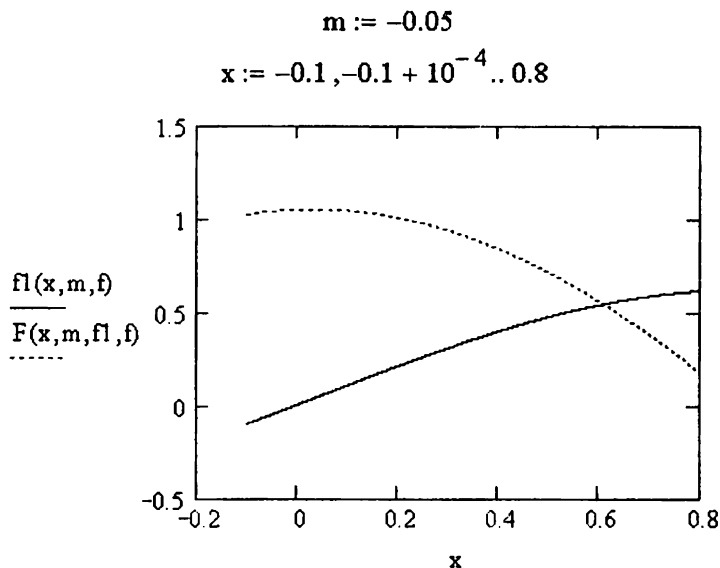


Рис. 1.2.7. Графики функций $f(x) = x - mF(x)$ и $f'(x) = 1 - mF'(x)$

Из рис. 1.2.7 видно, что условия о достаточном условии сходимости итерационного процесса выполняются на интервале $[0, 21; 0, 8]$.

5. Задание функции, реализующей вычислительную схему метода простой итерации на каждом шаге итерационного процесса (рис. 1.2.8).

$$\text{Iter}(f, x0, \varepsilon, q) := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x0 \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while } |x_i - f(x_i)| > \frac{q}{1-q} \cdot \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow f(x_i) \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

Рис. 1.2.8. Функция, реализующая вычислительную схему метода простой итерации (файл Iter.mcd)

6. Задание функции, стоящей в правой части (1.2.15):

$$f2(x) := f1(x, m, f)$$

7. Задание начального приближения:

$$x0 := 0.8$$

8. Вычисление значений корня уравнения на каждом шаге итерационного процесса:

$$qi := \text{Iter}(f2, 0.8, 10^{-5}, 0.01)$$

9. Визуализация итерационного процесса (рис. 1.2.9):

$$Ni := \text{last}(qi), \quad j := 0..Ni$$

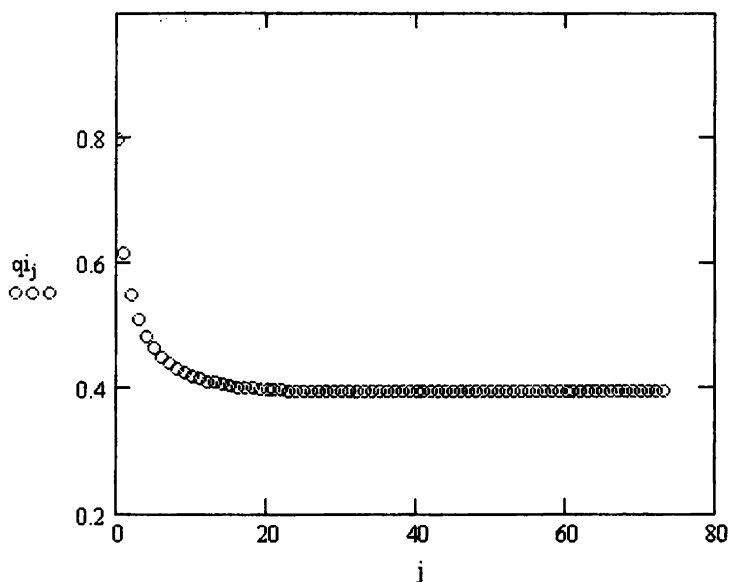


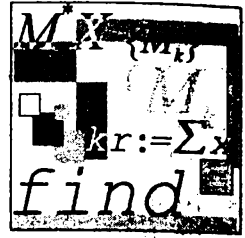
Рис. 1.2.9. Зависимость значения корня уравнения от номера шага итерационного процесса

10. Вывод точного значения корня:

$$qi_{Ni} = 0.39418$$

11. Вывод значения функции:

$$f(qi_{Ni}) = -1.818 \cdot 10^{-6}$$



Лекция № 3

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

План

- ☐ Общие сведения и основные определения.
- ☐ Метод Гаусса и его реализация в пакете Mathcad.
- ☐ Вычисление определителей.
- ☐ Метод простой итерации. Достаточные условия сходимости итерационного процесса.
- ☐ Решение систем линейных уравнений методом Зейделя.

1.3.1. Общие сведения и основные определения

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

которая может быть записана в матричном виде:

$$A \cdot x = b, \tag{1.3.2}$$

где A — прямоугольная матрица размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.3.3)$$

x — вектор порядка n :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

b — вектор порядка m :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1.3.1. Решением системы (1.3.1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, которая обращает все уравнения системы (1.3.1) в верные равенства.

Определение 1.3.2. Прямыми методами решения систем линейных уравнений называются методы, дающие решение системы за конечное число арифметических операций. Если отсутствуют ошибки округления, то получаемые решения *всегда* являются точными.

Определение 1.3.3. Итерационными методами решения систем линейных уравнений называются методы, дающие решение системы уравнений как предел последовательности приближений, вычисляемых по единообразной схеме.

1.3.2. Метод Гаусса и его реализация в пакете Mathcad

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n,$$

при условии, что матрица $A = (a_{ij})$ невырождена.

Метод Гаусса состоит в преобразовании системы (1.3.4) последовательным исключением переменных к равносильной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2\end{aligned}\quad (1.3.5)$$

$$x_n = \beta_n.$$

Затем из системы (1.3.5) последовательно находят значения всех неизвестных $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

Таким образом, процесс решения системы (1.3.4) распадается на два этапа.

1. Прямой ход — приведение системы (1.3.4) к реугольному виду.
2. Обратный ход — нахождение значений неизвестных переменных в соответствии с (1.3.5).

Документ пакета Mathcad, в котором реализован метод Гаусса, состоит из следующих блоков.

```
Exchange(C,i) :=
    k ← i + 1
    while Ck,i = 0
        k ← k + 1
    for j ∈ 0..rows(C)
        | s ← Ci,j
        | Ci,j ← Ck,j
        | Ck,j ← s
    C
```

Рис. 1.3.1. Функция, переставляющая строки матрицы при обнаружении в текущей строке нулевого элемента на главной диагонали (файл Exchange.mcd)

```

Simplex(A, b) :=
    N ← rows(A)
    C ← augment(A, b)
    i ← 0
    for i ∈ 0..N - 2
        C ← Exchange(C, i) if Ci,i = 0
        for j ∈ 0..N
            Ci,N-j ←  $\frac{C_{i,N-j}}{C_{i,i}}$ 
        for m ∈ i + 1..N - 1
            α ← Cm,i
            for j ∈ i..N
                Cm,j ← Cm,j - α · Ci,j
        CN-1,N ←  $\frac{C_{N-1,N}}{C_{N-1,N-1}}$ 
        CN-1,N-1 ← 1
    C

```

Рис. 1.3.2. Функция, возвращающая преобразованную к треугольному виду расширенную матрицу системы (файл Simplex.mcd)

1. Задание функции, анализирующей матрицу системы и переставляющей строки при обнаружении в текущей строке нулевого элемента, стоящего на главной диагонали (рис. 1.3.1). Аргументы функции: C — матрица, i — номер анализируемой строки.
2. Задание функции, приводящей матрицу системы к треугольному виду и возвращающей соответствующую расширенную матрицу системы (рис. 1.3.2). Аргументы функции: A — матрица системы, b — вектор-столбец свободных членов.
3. Задание функции, возвращающей значения неизвестных, вычисленных обратным ходом в соответствие с (1.3.5) (рис. 1.3.3).

```

Gauss(A,b) := | C ← Simplex(A,b)
               | N ← rows(A) - 1
               | vN ← CN,N+1
               | for j ∈ 1 .. N
               |   vN-j ←  $\frac{1}{C_{N-j,N-j}} \cdot \left( C_{N-j,N+1} - \sum_{k=0}^{j-1} C_{N-j,N-k} \cdot v_{N-k} \right)$ 
               | v

```

Рис. 1.3.3. Функция, возвращающая значения неизвестных, вычисленных обратным ходом (файл Gauss.mcd)

4. Задание матрицы системы и вектор-столбца свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 11 & 12 & 13 \\ 20 & 1 & 3 & 17 & 14 \\ 12 & 10 & 4 & 16 & 15 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

5. Проверка правильности работы функции *Simplex*:

$$\text{Simplex}(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7.273 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 & 4 & 6.364 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9.333 & -6.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.892 \end{pmatrix}$$

6. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса и проверка полученного решения средствами матричных функций пакета Mathcad:

$$\text{Gauss}(A,b) = \begin{pmatrix} 0.096 \\ 1.432 \\ -1.353 \\ 1.659 \\ 0.892 \end{pmatrix} \quad A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.096 \\ 1.432 \\ -1.353 \\ 1.659 \\ 0.892 \end{pmatrix}$$

1.3.3. Вычисление определителей

Решение системы (1.3.4) существует только в том случае, если определитель матрицы A отличен от нуля, поэтому решение любой системы линейных уравнений следует предварять вычислением ее определителя.

Для вычисления определителя используют известное свойство треугольных матриц: определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Пусть задана квадратная матрица X порядка n :

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3.6)$$

Представим матрицу X в виде:

$$X = Y \cdot Z, \quad (1.3.7)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{nn} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & z_{1n} \\ 0 & 1 & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

Известно, что определитель матрицы равен произведению определителей:

$$|X| = |Y| \cdot |Z|, \quad (1.3.9)$$

но $|Z| = 1$, поэтому

$$|X| = y_{11} \cdot y_{22} \cdot \dots \cdot y_{nn}. \quad (1.3.10)$$

Формулы для вычисления элементов матриц $|Y|$ и $|Z|$ получаются перемножением матриц $|Y|$, $|Z|$ и приравниванием к соответствующим элементам матрицы X :

$$y_{i0} = x_{i0}; \quad y_{ij} = x_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} y_{ik} \cdot z_{kj}, \quad \text{при } i \geq j \geq 1; \quad (1.3.11)$$

$$z_{oj} = \frac{x_{oj}}{y_{00}}; \quad y_{ij} = \frac{\left(x_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} y_{ik} \cdot z_{kj} \right)}{y_{ii}}, \quad \text{при } 0 < i \leq j. \quad (1.3.12)$$

В пакете Mathcad вычислительный алгоритм, задаваемый формулами (1.3.11), (1.3.12), оказывается возможным реализовать в виде одной функции, представленной на рис. 1.3.4. Аргумент функции: A — имя квадратной матрицы

$$\text{Determinant}(A) := \left| \begin{array}{l} C \leftarrow 0 \\ N \leftarrow \text{rows}(A) - 1 \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} y_{i,0} \leftarrow A_{i,0} \\ z_{0,i} \leftarrow \frac{A_{0,i}}{y_{0,0}} \end{array} \right. \\ \quad \text{for } i \in 1..N \\ \quad \quad \text{for } j \in 1..N \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} y_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \sum_{k=0}^{j-1} y_{i,k} \cdot z_{k,j} \text{ if } 1 \leq j \leq i \\ A_{i,j} - \sum_{k=0}^{i-1} y_{i,k} \cdot z_{k,j} \\ z_{i,j} \leftarrow \frac{\quad}{y_{i,i}} \text{ if } 0 < i \leq j \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \prod_{i=0}^N y_{i,i} \end{array} \right|$$

Рис. 1.3.4. Функция, возвращающая значение определителя матрицы

Для проверки правильности работы данной функции полезно сравнить результат, возвращенный данной функцией, и результат, возвращаемый функцией *Determinant*, встроенной в пакет Mathcad:

$$\text{Determinant}(A) = 7.051 \times 10^3 \quad |A| = 7.051 \times 10^3$$

1.3.4. Решение систем линейных уравнений методом простой итерации

Запишем исходную систему (1.3.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\x_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\&\vdots \\x_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n.\end{aligned}\tag{1.3.13}$$

или сокращенно:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j + \beta_i, \tag{1.3.14}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Правая часть (1.3.14) определяет отображение F

$$F: y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.3.15}$$

преобразующее точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного векторного пространства в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ того же пространства. Используя систему (1.3.4) и выбрав начальную точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, можно построить итерационную последовательность точек n -мерного пространства (аналогично методу простой итерации для скалярного уравнения $x = f(x)$):

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots \tag{1.3.16}$$

Оказывается, что при определенных условиях последовательность (1.3.16) сходится и ее предел является решением системы (1.3.13). Предваряя обсуждение данных условий, напомним необходимые сведения из математического анализа.

Определение 1.3.4. Функцию $\rho(x, y)$, определяющую расстояние между точками x и y множества X , называют метрикой, если выполнены следующие условия.

1. $\rho(x, y) \geq 0$.
2. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Определение 1.3.5. Множество с введенной в нем метрикой ρ становится метрическим пространством.

Определение 1.3.6. Последовательность точек метрического пространства называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $m, n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Определение 1.3.7. Пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Пусть F — отображение, действующее в метрическом пространстве E с метрикой ρ , x и y — точки пространства E , а Fx, Fy — образы этих точек.

Определение 1.3.8. Отображение F пространства E в себя называется *сжимающим отображением*, если существует такое число α , $0 < \alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in E$ выполняется неравенство:

$$\rho(Fx, Fy) \leq \alpha \cdot \rho(x, y). \quad (1.3.17)$$

Определение 1.3.9. Точка x называется *неподвижной точкой* отображения F , если $Fx = x$.

Аналогично одномерному случаю можно доказать теорему о достаточном условии сходимости итерационного процесса в n -мерном пространстве. Доказательство теоремы приводится практически во всех учебниках, посвященных численным методам (например, [1]).

Теорема 1.3.1. Если F — сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, то существует единственная неподвижная точка x , такая что $x = Fx$. При этом итерационная последовательность, построенная для отображения F с любым начальным членом $x^{(0)}$, сходится к x .

В ходе доказательства данной теоремы показывается, что

$$\rho(x, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}). \quad (1.3.18)$$

Из (1.3.18), приняв k -ое приближение за нулевое, получаем полезное для приложений неравенство:

$$\rho(x, x^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}). \quad (1.3.19)$$

Рассмотрим условия, при которых отображение (1.3.15) будет сжимающим. Как следует из определения (1.3.17), решение данного вопроса зависит от способа метризации данного пространства. Обычно при решении систем линейных уравнений используют одну из следующих метрик:

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad (1.3.20)$$

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad (1.3.21)$$

$$\rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (1.3.22)$$

Для того чтобы отображение F , заданное в метрическом пространстве уравнениями (1.3.15), было сжимающим, достаточно выполнения одного из следующих условий:

□ в пространстве с метрикой ρ_1 :

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1; \quad (1.3.23)$$

□ в пространстве с метрикой ρ_2 :

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1; \quad (1.3.24)$$

□ в пространстве с метрикой ρ_3 :

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2} < 1. \quad (1.3.25)$$

Для установления момента прекращения итераций при достижении заданной точности может быть использована, например, формула, следующая из (1.3.19):

$$\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \leq \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\alpha}. \quad (1.3.26)$$

Алгоритм решения системы методом итераций реализуется следующей последовательностью действий.

1. Привести систему (1.3.4) к виду с преобладающими диагональными коэффициентами.
2. Разделить каждое уравнение на соответствующий диагональный коэффициент.
3. Проверить выполнение условий (1.3.23)—(1.3.25).
4. Выбрать метрику, для которой выполняется условие сходимости итерационного процесса.
5. Реализовать итерационный процесс (обычно за начальное приближение берется столбец свободных членов).

Пример 1.3.1.

Преобразование системы к виду, пригодному для итерационного процесса:

$$2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41;$$

$$8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44;$$

$$3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56.$$

Возьмем первым уравнением второе, третьим — первое, а вторым — сумму первого и третьего уравнений:

$$8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44;$$

$$6,26x_1 - 12,20x_2 - 3,24x_3 = 69,97;$$

$$2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41.$$

Разделим каждое уравнение на диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$x_1 = -0,6492537x_2 - 0,033582x_3 - 0,800995;$$

$$x_2 = 0,5131147x_1 - 0,2655737x_3 - 5,7352459;$$

$$x_3 = 0,2015503x_1 - 0,3626184x_2 - 1,2411714.$$

На этом приведение уравнения к виду, пригодному для использования итерационного процесса, завершается.

После приведения системы к виду, пригодному для использования итерационного процесса, для дальнейших вычислений целесообразно использовать пакет Mathcad. Созданный нами документ для решения системы линейных уравнений методом Гаусса состоит из следующих блоков.

1. Задание функций, возвращающих значение расстояния между точками в соответствующем метрическом пространстве (рис. 1.3.5—1.3.7).

$$\rho_1(x, y) := \begin{cases} z \leftarrow x - y \\ z1 \leftarrow |z| \\ \max(z1) \end{cases}$$

Рис. 1.3.5. Функция, возвращающая расстояние между точками в метрическом пространстве ρ_1

$$\rho_2(x, y) := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow x - y \\ z1 \leftarrow \overrightarrow{|z|} \\ \sum z1 \end{array} \right|$$

Рис. 1.3.6. Функция, возвращающая расстояние между точками в метрическом пространстве ρ_2

$$\rho_3(x, y) := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow x - y \\ |z| \end{array} \right|$$

Рис. 1.3.7. Функция, возвращающая расстояние между точками в метрическом пространстве ρ_3

2. Задание функции, возвращающей значение коэффициентов α (рис. 1.3.8). Аргументы функции: A — имя матрицы системы, ρ_i ($i=1,2,3$) — имя соответствующей метрики.
3. Задание матрицы системы, приведенной к виду, пригодному для метода простой итерации:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -0.6492537 & -0.033582 \\ 0.51331147 & 0 & -0.2655737 \\ 0.2015503 & -0.3626184 & 0 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -0.80095 \\ -5.7352459 \\ -1.2411714 \end{pmatrix}$$

4. Вычисление значений коэффициентов α для каждого метрического пространства:

$$\alpha := \text{Check}(A, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.779 \\ 1.012 \\ 0.929 \end{pmatrix}$$

5. Задание функции, реализующей вычисления в соответствии с итерационным алгоритмом (рис. 1.3.9). Аргументы функции: A — имя матрицы системы, b — имя вектор-столбца свободных членов, ρ — имя метрики, α — соответствующее значение коэффициента, ϵ — точность решения.

```

Check(A, ρ1, ρ2, ρ3) :=
  for i ∈ 0 .. rows(A) - 1
    rows(A)-1
    δi ← ∑j=0 |Ai,j|
    α0 ← max(δ)
    for j ∈ 0 .. rows(A) - 1
      rows(A)-1
      δj ← ∑i=0 |Ai,j|
    α1 ← max(δ)
    rows(A)-1 rows(A)-1
    α2 ← ∑i=0 ∑j=0 (Ai,j)2
  α

```

Рис. 1.3.8. Функция, возвращающая значение коэффициентов α для каждого из трех метрических пространств (файл Check.mcd)

```

Iter(A, b, ρ, α, ε) :=
  δ ←  $\frac{\varepsilon \cdot (1 - \alpha)}{\alpha}$ 
  x0 ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
  x1 ← A · x0 + b
  Δ ← ρ(x0, x1)
  while Δ > δ
    x0 ← x1
    x1 ← A · x0 + b
    Δ ← ρ(x0, x1)
  x1

```

Рис. 1.3.9. Функция, реализующая вычисления в соответствии с итерационным алгоритмом (файл Iter.mcd)

Зейделя. Для этого умножим левую и правую части системы (1.3.2) на транспонированную матрицу системы A^T , получим равносильную систему:

$$C \cdot X = D, \quad (1.3.29)$$

где $C = A^T A$, $D = A^T b$.

Система (1.3.29) называется *нормальной* системой уравнений. Нормальные системы уравнений обладают рядом свойств, среди которых можно выделить следующие:

- матрица C коэффициентов при неизвестных нормальной системы является симметрической (т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$);
- все элементы, стоящие на главной диагонали матрицы C , положительны (т. е. $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$).

Последнее свойство дает возможность "автоматически" приводить нормальную систему (1.3.29) к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя:

$$x_i = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.3.30)$$

где

$$\alpha_{ij} = -\frac{c_{ij}}{c_{ii}}, \quad (i \neq j) \quad (1.3.31)$$

и

$$\beta_i = \frac{d_i}{c_{ii}}. \quad (1.3.32)$$

Целесообразность приведения системы к нормальному виду и использования метода Зейделя вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.3.2. *Итерационный процесс метода Зейделя для приведенной системы (1.3.30), эквивалентной нормальной системе (1.3.29), всегда сходится к единственному решению этой системы при любом выборе начального приближения [2].*

Таким образом, решение произвольной системы линейных уравнений вида (1.3.1) методом Зейделя реализуется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Ввод матрицы A коэффициентов исходной системы и вектор-столбца свободных членов.
2. Приведение нормальной системы к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя (1.3.30), (1.3.31).

3. Задание требуемой точности решения.
4. Циклическое выполнение итерационного процесса до достижения требуемой точности.

Документ пакета Mathcad, в котором реализован описанный выше алгоритм, состоит из следующих блоков.

1. Задание функции, выполняющей последовательно:
 - приведение системы к нормальному виду;
 - приведение нормальной системы к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя;
 - реализация итерационного процесса Зейделя (рис. 1.3.10). Аргументы функции: A — матрица исходной системы, b — вектор-столбец свободных членов, ϵ — точность решения. Функция возвращает решение системы и его погрешность.
2. Задание матрицы коэффициентов при неизвестных исходной системы линейных уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 11 & 12 & 13 \\ 20 & 1 & 3 & 17 & 14 \\ 12 & 10 & 4 & 16 & 15 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix}$$

3. Решение системы линейных уравнений методом Зейделя

$$Z := \text{Zeidel}(A, b, 10^{-7})$$

$$Z = \begin{pmatrix} \{5, 1\} \\ 9.9982055 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0.096 \\ 1.432 \\ -1.353 \\ 1.659 \\ 0.892 \end{pmatrix}$$

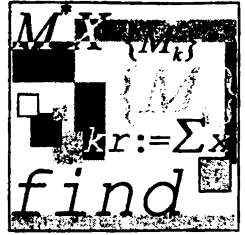
$$Z_1 = 9.998 \times 10^{-8}$$

```

Zeidel(A,b,e) :=
  N ← rows(A) - 1
  C ← AT · A
  D ← AT · b
  for i ∈ 0..N
    | Di ←  $\frac{D_i}{C_{i,i}}$ 
    | d0 ← Di
    | d1 ← Di
  for i ∈ 0..N
    for j ∈ 0..N
      | C1i,j ← 0 if i = j
      | C1i,j ←  $\frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}}$  otherwise
  Flag ← 0
  R0 ← d0
  k ← 1
  while Flag = 0
    for i ∈ 0..N
      | tmp ←  $\sum_{j=0}^N C_{1i,j} \cdot d_j + D_{1i}$ 
      | d1 ← tmp
    Rk ← d1
    s ← |Rk - Rk-1|
    if s < e
      | Flag ← 1
      | Rf ← d1
    d0 ← d1
    k ← k + 1
  ( Rf )
  ( s )

```

Рис. 1.3.10. Функция, реализующая метод Зейделя (файл Zeidel.mcd)



Лекция № 4

Методы решения систем нелинейных уравнений

План

- ☐ Векторная запись нелинейных систем. Метод простых итераций.
- ☐ Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений.
- ☐ Решение нелинейных систем методами спуска.
- ☐ Метод Ньютона.

1.4.1. Векторная запись нелинейных систем. Метод простых итераций

Пусть требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ — заданные, вообще говоря, нелинейные вещественнозначные функции n вещественных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Введем обозначения:

$$\bar{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$F(\bar{x}) \equiv \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

$$\bar{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

систему (1.4.1) можно заменить одним уравнением:

$$F(\bar{x}) \equiv \bar{0}$$

относительно векторной функции F векторного аргумента $\bar{x}$.

Таким образом, исходную задачу можно рассматривать как задачу о нулях нелинейного отображения $F: R_n \rightarrow R_n$. В такой постановке данная задача является прямым обобщением задачи о нахождении решения нелинейного уравнения для случая пространств большой размерности. Это означает, что можно строить методы ее решения как на основе обсужденных в предыдущей лекции подходов, так и осуществлять формальный перенос выведенных для скалярного случая расчетных формул. Однако не все результаты и не все методы оказывается возможным перенести формально (например, метод половинного деления). В любом случае следует позаботиться о правомерности тех или иных операций над векторными переменными и векторными функциями, а также о сходимости получаемых таким способом итерационных процессов. Отметим, что переход от $n=1$ к $n \geq 2$ вносит в задачу нахождения нулей нелинейного отображения свою специфику, учет которой привел к появлению новых методов и различных модификаций уже имеющихся методов. В частности, большая вариативность методов решения нелинейных систем связана с разнообразием способов, которыми можно решать линейные алгебраические задачи, возникающие при пошаговой линеаризации данной нелинейной вектор-функции $F(\bar{x})$.

Начнем изучение методов решения нелинейных систем с метода простых итераций.

Пусть система (1.4.1) преобразована к следующей эквивалентной нелинейной системе:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.4.3)$$

или в компактной записи:

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\bar{x}) \\ \varphi_2(\bar{x}) \\ \dots \\ \varphi_n(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (1.4.4)$$

Для этой задачи о неподвижной точке нелинейного отображения $\Phi: R_n \rightarrow R_n$ запишем формальное рекуррентное равенство:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \Phi(\bar{x}^{(k)}), \quad (1.4.5)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$, которое определяет метод простых итераций для задачи (1.4.3).

Если начать процесс построения последовательности $(\bar{x}^{(k)})$ с некоторого вектора $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ и продолжить вычислительный процесс по формуле (1.4.5), то при определенных условиях данная последовательность со скоростью геометрической прогрессии будет приближаться к вектору $\bar{x}^*$ — неподвижной точке отображения $\Phi(x)$.

Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.4.1. Пусть функция $\Phi(x)$ и замкнутое множество $M \subseteq D(\Phi) \subseteq R_n$ таковы, что:

1. $\Phi(x) \in M \quad \forall \bar{x} \in M$;
2. $\exists q < 1: \|\Phi(\bar{x}) - \Phi(\tilde{x})\| \leq q \|\bar{x} - \tilde{x}\| \quad \forall \bar{x}, \tilde{x} \in M$.

Тогда $\Phi(x)$ имеет в M единственную неподвижную точку $\bar{x}^*$; последовательность $(\bar{x}^{(k)})$, определяемая (1.4.5), сходится при любом $\bar{x}^{(0)} \in M$ к $\bar{x}^*$ и справедливы оценки

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \frac{q}{1-q} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\| \quad \forall k \in N.$$

Отметим низкую практическую ценность данной теоремы из-за неконструктивности ее условий. В случаях, когда выбрано хорошее начальное приближение $\bar{x}^{(0)}$ решению $\bar{x}^*$, большой практический интерес представляет следующая теорема.

Теорема 1.4.2. Пусть $\Phi(x)$ дифференцируема в замкнутом шаре $S(x^{(0)}, r) \subseteq D(\Phi)$, причем $\exists q \in (0; 1): \sup_{x \in S} \|\Phi'(x)\| \leq q$. Тогда если центр $\bar{x}^{(0)}$ и радиус r шара S таковы, что $\|\bar{x}^{(0)} - \Phi(\bar{x}^{(0)})\| \leq r(1 - q)$, то справедливо заключение теоремы 1.4.1 с $M = S$.

Запишем метод последовательных приближений (1.4.5) в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Сравнение (1.4.6) с вычислительной формулой метода простой итерации решения систем линейных уравнений (см. лекцию № 3, выражение (1.3.14)) обнаруживает их сходство. Учитывая, что в линейном случае, как правило, более эффективным является метод Зейделя, в данном случае также может оказаться более эффективной его многомерный аналог, называемый *методом покоординатных итераций*:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Заметим, что, как и для линейных систем, отдельные уравнения в (1.4.7) не равноправны, т. е. перемена местами уравнений системы (1.4.3) может изменить в некоторых пределах число итераций и вообще ситуацию со сходимостью последовательности итераций. Для того чтобы применить метод простых итераций (1.4.6) или его зейделеву модификацию (1.4.7) к исходной

системе (1.4.1), необходимо сначала тем или иным способом привести эту систему к виду (1.4.3). Это можно сделать, например, умножив (1.4.2) на неособенную $n \times n$ матрицу A и прибавив к обеим частям уравнения $-A \cdot F(\bar{x})$ вектор неизвестных. Полученная система

$$\bar{x} = \bar{x} - A \cdot F(\bar{x}) \quad (1.4.8)$$

эквивалентна исходной и имеет вид, аналогичный уравнению в методе итераций в одномерном случае. Проблема состоит лишь в правильном подборе матричного параметра.

1.4.2. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

Для решения системы (1.4.3) будем пользоваться методом последовательных приближений.

Предположим, известно k -е приближение

$$\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

одного из изолированных корней $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ векторного уравнения (1.4.2). Тогда точный корень уравнения (1.4.2) можно представить в виде:

$$\bar{x}^* = \bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x}^{(k)}, \quad (1.4.9)$$

где $\Delta \bar{x}^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)})$ — поправка (погрешность корня).

Подставляя выражение (1.4.9) в (1.4.2), имеем:

$$F(\bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x}^{(k)}) = 0. \quad (1.4.10)$$

Предполагая, что функция $F(\bar{x})$ непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей $\bar{x}$ и $\bar{x}^{(k)}$, разложим левую часть уравнения (1.4.10) по степеням малого вектора $\Delta \bar{x}^{(k)}$, ограничиваясь линейными членами:

$$F(\bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x}^{(k)}) = F(\bar{x}^{(k)}) + F'(\bar{x}^{(k)}) \Delta \bar{x}^{(k)} \quad (1.4.11)$$

или, в развернутом виде,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)}) = f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \Delta x_1^{(k)} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots \\ \dots + \Delta x_n^{(k)} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)}) = f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) + \Delta x_1^{(k)} \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \dots \\ \dots + \Delta x_n^{(k)} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0. \end{array} \right. \quad (1.4.12)$$

Из формул (1.4.11) и (1.4.12) видно, что под производной $F'(\bar{x})$ следует понимать матрицу Якоби системы функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е.

$$F'(\bar{x}) = W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

или в краткой записи:

$$F'(\bar{x}) = W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

поэтому формула (1.4.12) может быть записана в следующем виде:

$$F(\bar{x}^{(k)}) + W(\bar{x}^{(k)}) \Delta \bar{x}^{(k)} = 0. \quad (1.4.13)$$

Если $\det W(\bar{x}) = \det \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \neq 0$, то

$$\Delta \bar{x}^{(k)} = -W^{-1}(\bar{x}^{(k)}) F(\bar{x}^{(k)}). \quad (1.4.14)$$

Отсюда видно, что метод Ньютона решения системы (1.4.1) состоит в построении итерационной последовательности:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - W^{-1} \left(\bar{x}^{(k)} \right) F \left(\bar{x}^{(k)} \right), \quad (1.4.15)$$

где $k = 0, 1, \dots$

Если все поправки становятся достаточно малыми, счет прекращается. Иначе новые значения x_i используются как приближенные значения корней, и процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено решение или не станет ясно, что получить его не удастся.

Пример 1.4.1.

Найти методом Ньютона приближенное положительное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ f_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4z, \\ f_3(x, y, z) = 3x^2 - 4y + z^2, \end{cases}$$

исходя из начального приближения $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5$.

Полагая

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix},$$

имеем

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0,25 + 0,25 + 0,25 - 1 \\ 0,50 + 0,25 - 2,00 \\ 0,75 - 2,00 + 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби:

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}.$$

Имеем:

$$W(\bar{x}^0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

причем

$$\Delta = \det W(\bar{x}^0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -40.$$

Следовательно, матрица $W(\bar{x}^0)$ — неособенная. Вычисляем обратную ей матрицу:

$$W^{-1}(\bar{x}^0) = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.4.15) получаем первое приближение:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)} &= \bar{x}^{(0)} - W^{-1}(\bar{x}^{(0)}) F(\bar{x}^{(0)}) = \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично находятся дальнейшие приближения. Результаты вычислений приведены в табл. 1.4.1.

Таблица 1.4.1. Последовательные приближения корней

i	x	y	z
0	0,5	0,5	0,5
1	0,875	0,5	0,375
2	0,78981	0,49662	0,36993
3	0,78521	0,49662	0,36992

Остановившись на приближении $x^{(3)}$, будем иметь:

$$x = 0,7852; \quad y = 0,4966; \quad z = 0,3699.$$

1.4.3. Решение нелинейных систем методами спуска

Общий недостаток всех рассмотренных выше методов решения систем нелинейных уравнений состоит в локальном характере сходимости, затрудняющем их применение в случаях (достаточно типичных), когда существуют проблемы с выбором начального приближения, обеспечивающего сходимость итерационной вычислительной процедуры. В этих случаях можно использовать численные *методы оптимизации* — раздела вычислительной математики, выделяемого в самостоятельную дисциплину. Для использования наглядной геометрической интерпретации приводимых ниже рассуждений и их результатов ограничимся, как и в предыдущем пункте, рассмотрением системы, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

Из функций $f(x, y)$, $g(x, y)$ системы (1.4.16) образуем новую функцию:

$$\Phi(x, y) = f(x, y)^2 + g(x, y)^2. \quad (1.4.17)$$

Так как эта функция неотрицательная, то найдется точка (вообще говоря, не единственная) (x^*, y^*) , такая что

$$\Phi(x, y) \geq \Phi(x^*, y^*) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R_2.$$

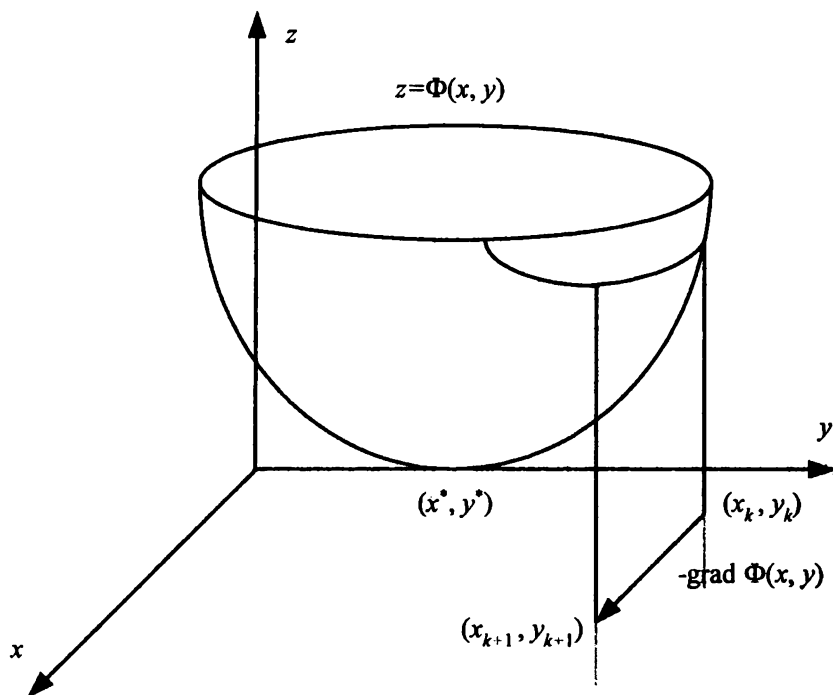


Рис. 1.4.1. Пространственная интерпретация метода наискорейшего спуска для функции (1.4.17)

Следовательно, если тем или иным способом удастся получить точку (x^*, y^*) , минимизирующую функцию $\Phi(x, y)$, и если при этом окажется, что $\min_{(x, y) \in R_2} \Phi(x, y) = \Phi(x^*, y^*) = 0$, то точка (x^*, y^*) — истинное решение системы (1.4.16), поскольку

$$\Phi(x^*, y^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^*, y^*) = 0, \\ g(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

Последовательность точек (x_k, y_k) — приближений к точке (x^*, y^*) минимума функции $\Phi(x, y)$ — обычно получают по рекуррентной формуле:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \quad (1.4.18)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $(p_k, q_k)^T$ — вектор, определяющий направление минимизации, а α_k — скалярная величина, характеризующая величину шага минимизации (шаговый множитель). Учитывая геометрический смысл задачи минимизации функций двух переменных $\Phi(x, y)$ — "спуск на дно" поверхности $z = \Phi(x, y)$ (рис. 1.4.1), итерационный метод (1.4.18) можно назвать методом спуска, если вектор $(p_k, q_k)^T$ при каждом k является направлением спуска (т. е. существует такое $\alpha > 0$, что $\Phi(x_k + \alpha p_k, y_k + \alpha q_k) < \Phi(x_k, y_k)$) и если множитель α_k подбирается так, чтобы выполнялось условие релаксации $\Phi(x_{k+1}, y_{k+1}) < \Phi(x_k, y_k)$, означающее переход на каждой итерации в точку с меньшим значением минимизируемой функции.

Таким образом, при построении численного метода вида (1.4.18) минимизации функции $\Phi(x, y)$ следует ответить на два главных вопроса: как выбирать направление спуска $(p_k, q_k)^T$ и как регулировать длину шага в выбранном направлении с помощью скалярного параметра — шагового множителя α_k ? Приведем простые соображения по этому поводу.

При выборе направления спуска естественным является выбор такого направления, в котором минимизируемая функция убывает наиболее быстро.

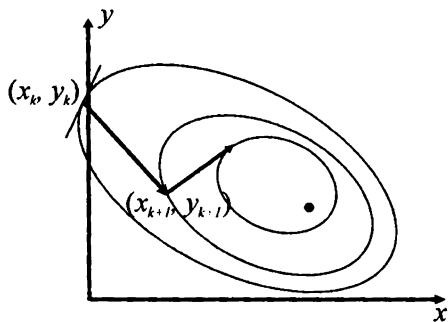


Рис. 1.4.2. Траектория наискорейшего спуска для функции (1.4.17)

Как известно из математического анализа функций нескольких переменных, направление наибольшего возрастания функции в данной точке показывает ее градиент в этой точке. Поэтому примем за направление спуска вектор

$$\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = -\bar{\nabla} \Phi(x_k, y_k) = -\begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k, y_k) \\ \Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

— антиградиент функции $\Phi(x, y)$. Таким образом, из семейства методов (1.4.18) выделяем *градиентный метод*:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} \Phi'_x(x_k, y_k) \\ \Phi'_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}. \quad (1.4.19)$$

Оптимальный шаг в направлении антиградиента — это такой шаг, при котором значение $\Phi(x_{k+1}, y_{k+1})$ — наименьшее среди всех других значений $\Phi(x, y)$ в этом фиксированном направлении, т. е. когда точка (x_{k+1}, y_{k+1}) является точкой условного минимума. Следовательно, можно рассчитывать на наиболее быструю сходимость метода (1.4.19), если полагать в нем

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} \Phi(x_k - \alpha \Phi'_x(x_k, y_k), y_k - \alpha \Phi'_y(x_k, y_k)). \quad (1.4.20)$$

Такой выбор шагового множителя, называемый *исчерпывающим спуском*, вместе с формулой (1.4.19) определяет *метод наискорейшего спуска*.

Геометрическая интерпретация этого метода хорошо видна из рис. 1.4.1, 1.4.2. Характерны девяностоградусные изломы траектории наискорейшего спуска, что объясняется исчерпываемостью спуска и свойством градиента (а значит, и антиградиента) быть перпендикулярным к линии уровня в соответствующей точке.

Наиболее типичной является ситуация, когда найти точно (аналитическими методами) оптимальное значение α_k не удастся. Следовательно, приходится делать ставку на применение каких-либо численных методов одномерной минимизации и находить α_k в (1.4.18) лишь приближенно.

Несмотря на то, что задача нахождения минимума функции одной переменной $\varphi_k(\alpha) = \Phi(x_k - \alpha \Phi'_x(x_k, y_k), y_k - \alpha \Phi'_y(x_k, y_k))$ намного проще, чем решаемая задача, применение тех или иных численных методов нахождения значений $\alpha_k = \arg \min \varphi_k(\alpha)$ с той или иной точностью требует вычисления нескольких значений минимизируемой функции. Так как это нужно делать на каждом итерационном шаге, то при большом числе шагов реализация метода наискорейшего спуска в чистом виде является достаточно высокочисленной. Существуют эффективные схемы приближенного вычисления квазиоптимальных α_k , в которых учитывается специфика минимизируемых функций (типа сумм квадратов функций) [16].

Зачастую успешной является такая стратегия градиентного метода, при которой шаговый множитель α_k в (1.4.18) берется либо сразу достаточно малым постоянным, либо предусматривается его уменьшение, например, делением пополам для удовлетворения условию релаксации на очередном шаге. Хотя каждый отдельный шаг градиентного метода при этом, вообще говоря, далек от оптимального, такой процесс по числу вычислений функции может оказаться более эффективным, чем метод наискорейшего спуска.

Главное достоинство градиентных методов решения нелинейных систем — глобальная сходимость. Нетрудно доказать, что процесс градиентного спуска приведет к какой-либо точке минимума функции из любой начальной точки. При определенных условиях найденная точка минимума будет искомым решением исходной нелинейной системы.

Главный недостаток — медленная сходимость. Доказано, что сходимость этих методов — лишь линейная, причем, если для многих методов, таких как метод Ньютона, характерно ускорение сходимости при приближении к решению, то здесь имеет место скорее обратное. Поэтому есть резон в построении гибридных алгоритмов, которые начинали бы поиск искомой точки — решения данной нелинейной системы, — глобально сходящимся градиентным методом, а затем производили уточнение каким-то быстросходящимся методом, например, методом Ньютона (разумеется, если данные функции обладают нужными свойствами).

Примечание

Порядком сходимости последовательности (x_k) к x^* называют такое число p , что

$$|x^* - x_{k+1}| \leq C |x^* - x_k|^p,$$

где $C > 0$ при всех $k > k_0$.

Разработан ряд методов решения экстремальных задач, которые соединяют в себе низкую требовательность к выбору начальной точки и высокую скорость сходимости. К таким методам, называемым *квази-ньютоновскими*, можно отнести, например, *метод переменной метрики* (Дэвидона—Флетчера—Пауэлла), *симметричный* и *положительно определенный методы секущих* (на основе формулы пересчета Бройдена).

При наличии негладких функций в решаемой задаче следует отказаться от использования производных или их аппроксимаций и прибегнуть к так называемым *методам прямого поиска* (*циклического покоординатного спуска*, *Хука и Дживса*, *Розенброка* и т. п.). Описание упомянутых и многих других методов такого типа можно найти в учебной и в специальной литературе, посвященной решению экстремальных задач (см., например, [17—19]).

Замечание 1. Для разных семейств численных методов минимизации могут быть рекомендованы свои критерии останова итерационного процесса. Например, учитывая, что в точке минимума дифференцируемой функции должно выполняться необходимое условие экстремума, на конец счета градиентным методом можно выходить, когда достаточно малой становится норма градиента. Если принять во внимание, что минимизация применяется к решению нелинейной системы, то целесообразнее отслеживать близость к нулю

минимизируемой неотрицательной функции, т. е. судить о точности получаемого приближения по квадрату его евклидовой метрики.

Замечание 2. Для решения n -мерной системы (1.4.1) следует свести задачу к решению экстремальной задачи:

$$\Phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\bar{x}) \rightarrow \min.$$

Рассмотрим далее примеры реализации некоторых алгоритмов поиска экстремумов функций, зависящих от нескольких переменных в пакете Mathcad.

Пример 1.4.2.

Алгоритм поиска экстремума с шагом, не зависящим от свойств минимизируемой функции.

Простейший вариант метода наискорейшего спуска рассмотрим на примере поиска минимума квадратической функции $f(x, y, \mu) = x^2 + \mu y^2$ двух переменных с оврагом, пологость которого определяется параметром μ :

- при $\mu = 1$ функция представляет собой параболоид вращения;
- при $\mu > 1$ параболоид становится эллиптическим, "вытягиваясь" вдоль оси Ox (при $\mu < 1$ — вдоль оси Oy).

Проведем построение графика исследуемой функции.

1. Зададим число узлов координатной сетки:

$$N := 23$$

2. Зададим дискретные переменные, используемые для нумерации узлов вдоль соответствующих координатных осей:

$$i := 0..N \quad j := 0..N$$

3. Зададим координаты нижнего левого и верхнего правого узлов координатной сетки:

$$X_{\min} := -5 \quad Y_{\min} := -5$$

$$X_{\max} := 5 \quad Y_{\max} := 5$$

4. Вычислим координаты узлов сетки:

$$x_i := X_{\min} + \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} \cdot i$$

$$y_j := Y_{\min} + \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N} \cdot j$$

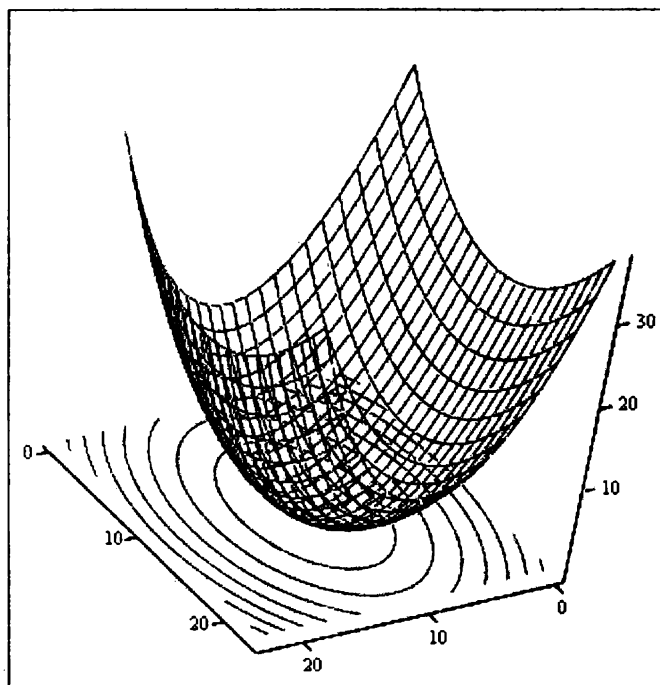
5. Вычислим значения исследуемой функции при различных значениях параметра μ в узлах координатной сетки:

$$M1_{i,j} := f(x_i, y_j, 0.5) \quad M2_{i,j} := f(x_i, y_j, 1.0) \quad M3_{i,j} := f(x_i, y_j, 1.5)$$

6. Визуализируем функции (рис. 1.4.3—1.4.5).

7. Зададим исходные данные:

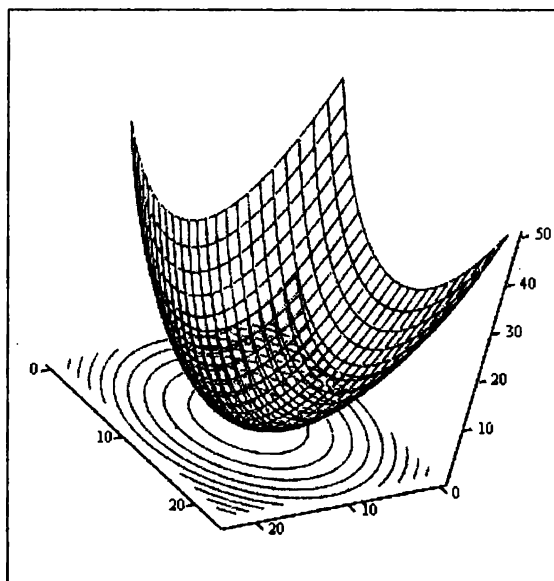
- $v_{\max} := 20$ — максимальное число шагов итерационного процесса;
- $v := 0..v_{\max}$ — диапазон изменения номера итераций;
- $x0 := 2 \quad y0 := -1$ — координаты начальных точек;
- $f0 := f(x0, y0, 1)$ — значение функции в начальной точке;
- $\lambda0 := 0.3$ — начальное значение шага к экстремуму.



M1, M1

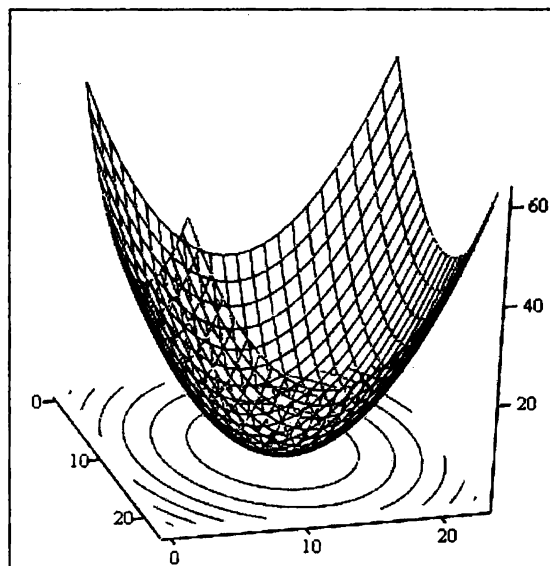
Рис. 1.4.3. Поверхность и карта линий уровня функции

$$f(x, y, \mu) = x^2 + 0.5 \cdot y^2$$



M2,M2

Рис. 1.4.4. Поверхность и карта линий уровня функции $f(x, y, \mu) = x^2 + y^2$



M3,M3

Рис. 1.4.5. Поверхность и карта линий уровня функции $f(x, y, \mu) = x^2 + 1.5 \cdot y^2$

8. Зададим функции, возвращающие значения частных производных:

$$g_x(x, y, \mu) := \frac{d}{dx} f(x, y, \mu) \quad g_y(x, y, \mu) := \frac{d}{dy} f(x, y, \mu)$$

9. Зададим скалярную функцию, возвращающую длину градиента:

$$L(x, y, \mu) := \sqrt{g_x(x, y, \mu)^2 + g_y(x, y, \mu)^2}$$

10. Зададим функции, возвращающие координаты нормированного единичного вектора, сонаправленного с вектором, противоположным направлению вектора градиента:

$$s_x(x, y, \mu) := -\frac{g_x(x, y, \mu)}{L(x, y, \mu)} \quad s_y(x, y, \mu) := -\frac{g_y(x, y, \mu)}{L(x, y, \mu)}$$

11. Зададим параметры, используемые для определения шага:

$$\alpha := 1 \quad \beta := 1 \quad \gamma := 0$$

12. Зададим формулы для определения величины шага:

$$\text{Step}(v) := \alpha \cdot \frac{\lambda_0}{\beta + \gamma \cdot v} \quad \lambda(x, y, v) := \text{Step}(v)$$

13. Зададим вектор, содержащий начальные значения координат и соответствующего значения функции:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ ff_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0, \mu) \end{bmatrix}$$

14. Реализуем итерационный процесс в соответствии с (1.4.19):

$$\begin{pmatrix} X_{v+1} \\ Y_{v+1} \\ ff_{v+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X_v + \lambda(X_v, Y_v, v) \cdot s_x(X_v, Y_v, \mu) \\ Y_v + \lambda(X_v, Y_v, v) \cdot s_y(X_v, Y_v, \mu) \\ f(X_v + \lambda(X_v, Y_v, v) \cdot s_x(X_v, Y_v, \mu), Y_v + \lambda(X_v, Y_v, v) \cdot s_y(X_v, Y_v, \mu)) \end{pmatrix}$$

15. Визуализируем итерационный процесс (рис. 1.4.6—1.4.9)

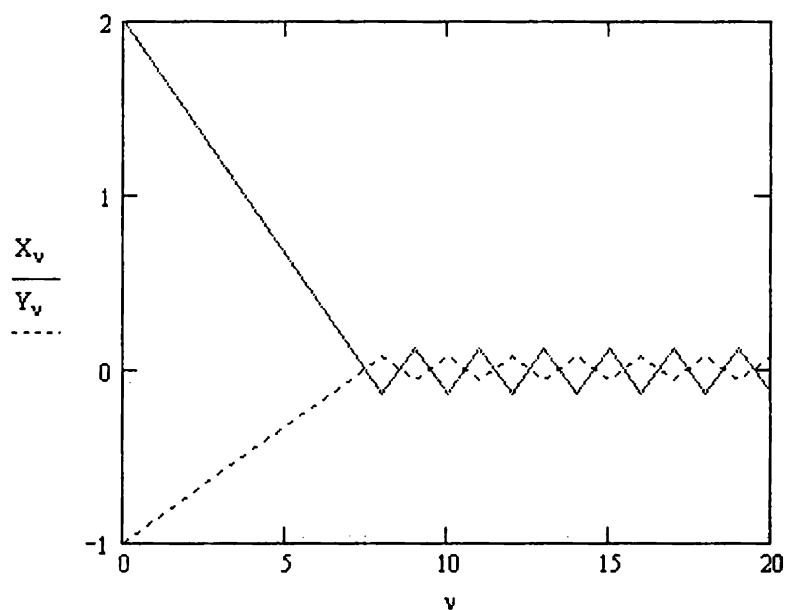


Рис. 1.4.6. Зависимость координат точки решения от номера итерации

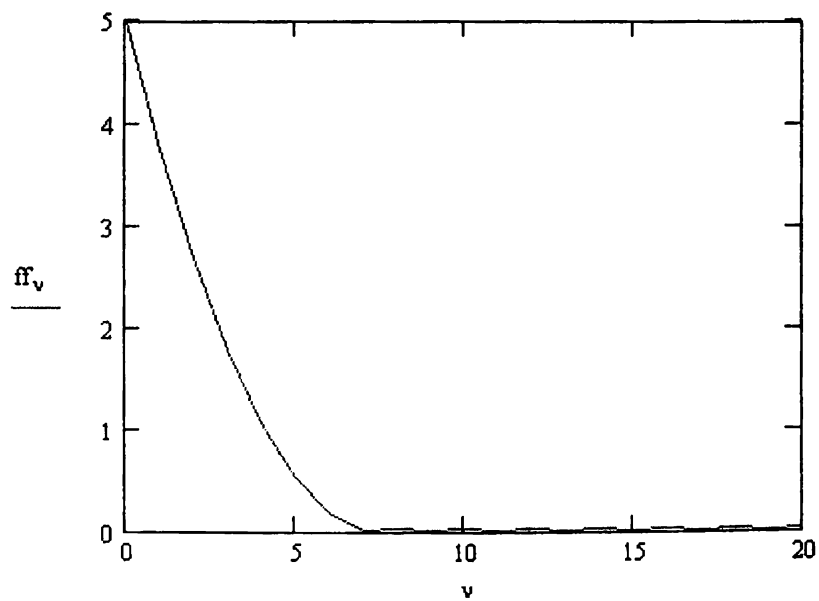


Рис. 1.4.7. Зависимость значения минимума функции от номера итерации

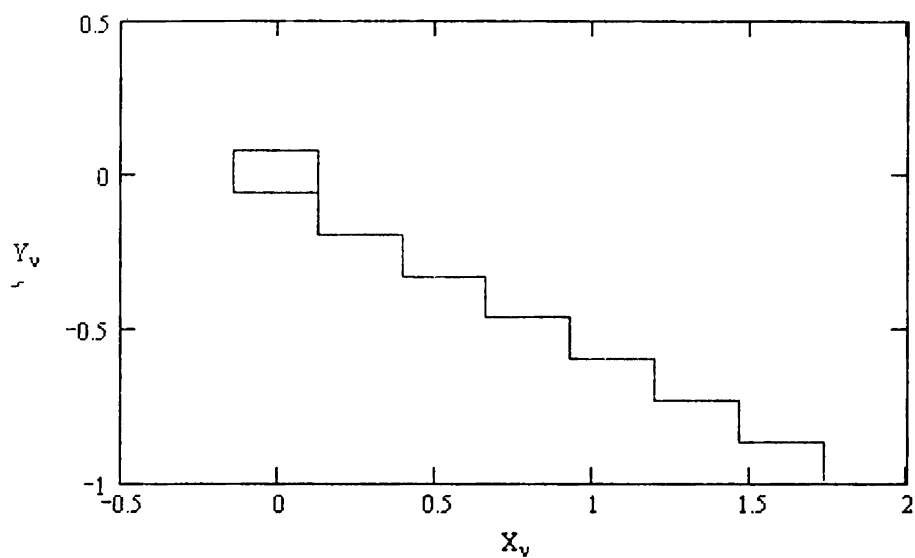
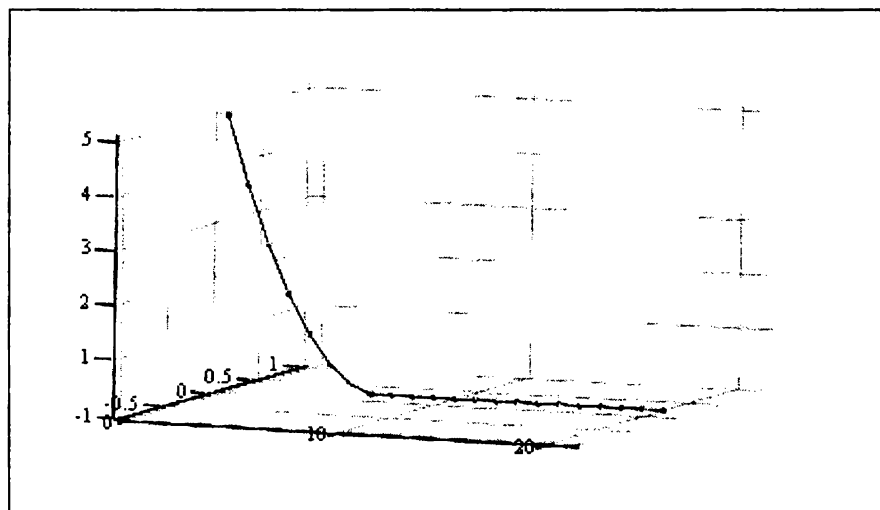


Рис. 1.4.8. Траектория итерационного процесса
в плоскости xOy



ff

Рис. 1.4.9. Визуализация итерационного процесса в
трехмерном пространстве

Пример 1.4.3.

Алгоритм поиска экстремума с шагом, зависящим от свойств минимизируемой функции (использование производной по направлению).

Исследуем алгоритм применительно к минимизации функции двух переменных, заданной полиномом 4-го порядка:

$$f(x, y) = k_x x^4 + k_y y^4 + l_x x^3 + l_y y^3 + o_x x^2 + o_y y^2 + p_x x + p_y y + q + \dots \\ \dots + k_{xy} x^4 y^4 + l_{xy} x^3 y^3 + o_{xy} x^2 y^2 + p_{xy} xy,$$

форма которой определяется коэффициентами k_x, k_y, l_x, l_y и т. д.

1. Зададим коэффициенты функции:

$$l_x := 0.3 \quad l_y := 0.4 \quad o_x := 1 \quad p_x := 1.2 \quad l_{xy} := 0.4 \quad o_{xy} := 0.3 \quad q := 3$$

$$k_x := 0.5 \quad k_y := 1 \quad o_y := 2 \quad p_y := 0.6 \quad k_{xy} := 0.2 \quad p_{xy} := 0.1$$

2. Зададим число узлов координатной сетки:

$$N := 23$$

3. Зададим дискретные переменные, используемые для нумерации узлов вдоль соответствующих координатных осей:

$$i := 0..N \quad j := 0..N$$

4. Зададим координаты нижнего левого и верхнего правого узлов координатной сетки:

$$X_{\min} := -2 \quad Y_{\min} := -2$$

$$X_{\max} := 2 \quad Y_{\max} := 2$$

5. Вычислим координаты узлов сетки:

$$x_i := X_{\min} + \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} \cdot i$$

$$y_j := Y_{\min} + \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N} \cdot j$$

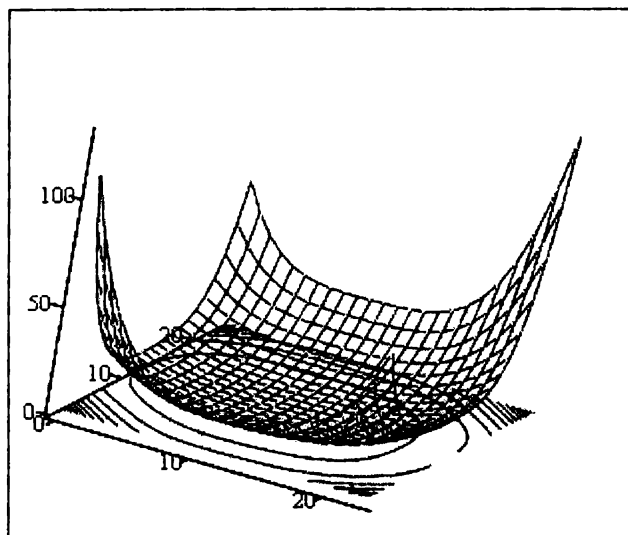
6. Зададим исследуемую функцию:

$$f(x, y) := k_x \cdot x^4 + k_y \cdot y^4 + l_x \cdot x^3 + l_y \cdot y^3 + o_x \cdot x^2 + o_y \cdot y^2 + p_x \cdot x + \dots \\ \dots + p_y \cdot y + q + k_{xy} \cdot x^4 \cdot y^4 + l_{xy} \cdot x^3 \cdot y^3 + o_{xy} \cdot x^2 \cdot y^2 + p_{xy} \cdot x \cdot y$$

7. Вычислим значения исследуемой функции при различных значениях параметра μ в узлах координатной сетки:

$$M_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

8. Визуализируем поверхности, описываемые функцией, и карты линий уровня (рис. 1.4.10).



М,М

Рис. 1.4.10. Поверхность и карта линий уровня функции $f(x, y)$

9. Зададим функции, возвращающие значения частных производных:

$$g_{-x}(x, y) := \frac{d}{dx} f(x, y) \quad g_{-y}(x, y) := \frac{d}{dy} f(x, y)$$

10. Зададим скалярную функцию, возвращающую длину градиента:

$$L(x, y) := \sqrt{g_{-x}(x, y)^2 + g_{-y}(x, y)^2}$$

11. Зададим функции, возвращающие координаты нормированного единичного вектора, сонаправленного с вектором, противоположным направлению вектора градиента:

$$s_{-x}(x, y) := -\frac{g_{-x}(x, y)}{L(x, y)} \quad s_{-y}(x, y) := -\frac{g_{-y}(x, y)}{L(x, y)}$$

12. Зададим функции, возвращающие значения смешанных производных:

$$g_{-xx}(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} f(x, y)$$

$$g_{-xy}(x, y) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f(x, y)$$

$$g_{-yy}(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} f(x, y)$$

13. Зададим функцию, возвращающую значения коэффициента λ :

$$\lambda(x, y) := - \frac{g_{-x}(x, y) \cdot s_{-x}(x, y) + \dots}{g_{-xx}(x, y) \cdot s_{-x}(x, y)^2 + \dots + g_{-y}(x, y) \cdot s_{-y}(x, y)} \rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot g_{-xy}(x, y) \cdot s_{-x}(x, y) \cdot s_{-y}(x, y) + g_{-yy}(x, y) \cdot s_{-y}(x, y)^2}{}$$

14. Зададим исходные данные:

- $v_{\max} := 10$ — максимальное число шагов итерационного процесса;
- $v := 0..v_{\max}$ — диапазон изменения номера итераций;
- $x0 := 1 \quad y0 := 0.5$ — координаты начальных точек;
- $f0 := f(x0, y0)$ — значение функции в начальной точке.

15. Зададим вектор, содержащий начальные значения координат и соответствующего значения функции:

$$\begin{bmatrix} x1_0 \\ y1_0 \\ z1_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \\ f(x0, y0) \end{bmatrix}$$

16. Реализуем итерационный процесс в соответствии с (1.4.19):

$$\begin{pmatrix} x1_{v+1} \\ y1_{v+1} \\ z1_{v+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x1_v + \lambda(x1_v, y1_v, v) \cdot s_{-x}(x1_v, y1_v) \\ y1_v + \lambda(x1_v, y1_v, v) \cdot s_{-y}(x1_v, y1_v) \\ f(x1_v + \lambda(x1_v, y1_v, v) \cdot s_{-x}(x1_v, y1_v), y1_v + \lambda(x1_v, y1_v, v) \cdot s_{-y}(x1_v, y1_v)) \end{pmatrix}$$

17. Визуализируем итерационный процесс (рис. 1.4.11—1.4.14).

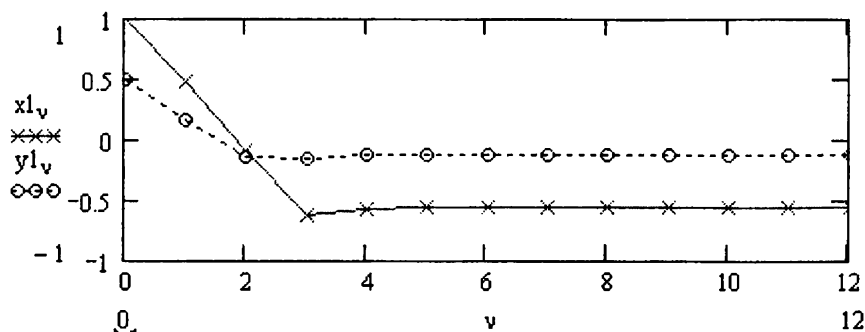


Рис. 1.4.11. Зависимость координат точки решения от номера итерации

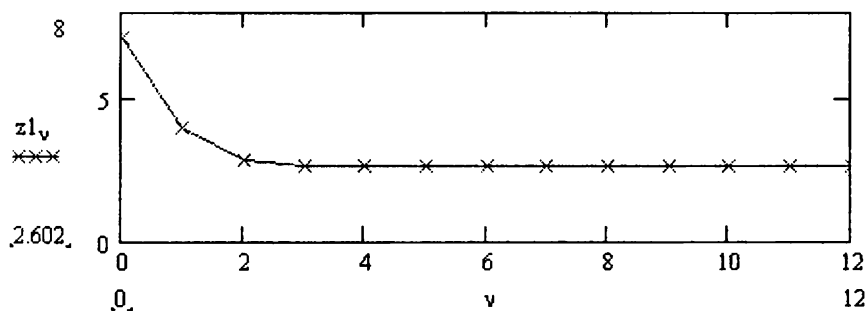


Рис. 1.4.12. Зависимость значения исследуемой функции от номера итерации

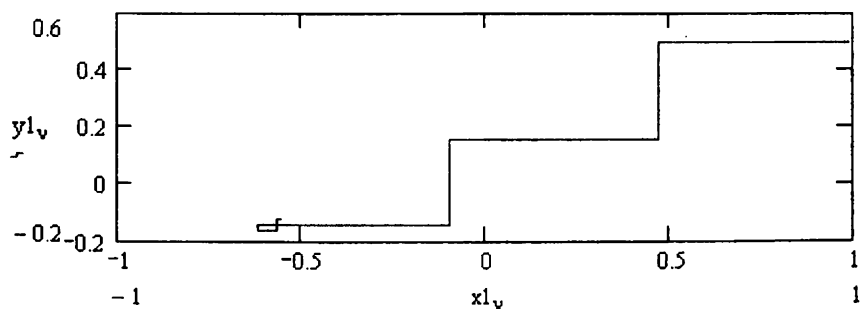
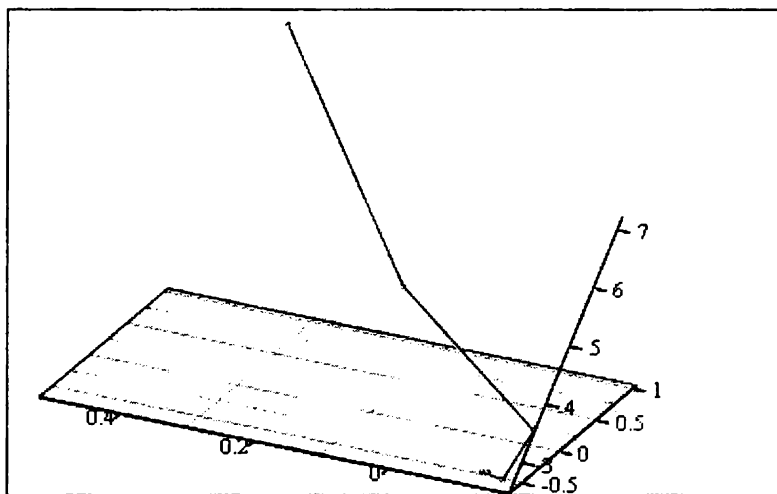


Рис. 1.4.13. Траектория итерационного процесса в плоскости xOy



(x_1, y_1, z_1)

Рис. 1.4.14. Траектория итерационного процесса в пространстве

Обратите внимание на чрезвычайно быструю сходимость и на отсутствие колебаний решения. Это достигается за счет того, что формула для шага строится с учетом формы минимизируемой функции.

Из графика, представленного на рис. 1.4.10, видно, что функция имеет очень пологое "дно", поэтому для алгоритмов с шагом, не зависящим от формы функции, это было бы причиной очень плохой сходимости.

1.4.4. Модифицированный метод Ньютона

Модифицированный метод Ньютона основан на квадратической аппроксимации минимизируемой функции в окрестности точки $x^{(k)}$. Минимум квадратической функции легко найти, приравняв ее градиент нулю. Можно сразу же вычислить положение экстремума и выбрать его в качестве следующего приближения к точке минимума.

Вычисляя точку нового приближения по формуле: $\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x}^{(k)}$ и разлагая $F(\bar{x}^{(k+1)})$ в ряд Тейлора, получим формулу квадратической аппроксимации

$F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)})$:

$$F(\bar{x}^{(k+1)}) = F(\bar{x}^{(k)} + \Delta \bar{x}^{(k)}) \cong F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)}),$$

где

$$F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)}) = F(\bar{x}^{(k)}) + \left[\bar{\nabla} F(\bar{x}^{(k)}) \right]^T \cdot \Delta \bar{x}^{(k)} + \dots \quad (1.4.21)$$

$$\dots + (1/2!) \cdot \left[\Delta \bar{x}^{(k)} \right]^T \cdot \bar{\nabla}^2 F(\bar{x}^{(k)}) \cdot \Delta \bar{x}^{(k)}.$$

$\bar{\nabla}^2 F(\bar{x}^{(k)})$ — матрица вторых производных:

$$\bar{\nabla}^2 F(\bar{x}^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Условие минимума $F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)})$ по $\Delta \bar{x}^{(k)}$: $\bar{\nabla} F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)}) = 0$. Вычислим градиент $\bar{\nabla} F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)}) = 0$ из (1.4.22) и найдем значение $\Delta \bar{x}^{(k)}$:

$$\bar{\nabla} F_{sq}(\bar{x}^{(k+1)}) = \bar{\nabla} F_{sq}(\bar{x}^{(k)}) + \bar{\nabla}^2 F_{sq}(\bar{x}^{(k)}) \Delta \bar{x}^{(k)} = 0. \quad (1.4.22)$$

Для учета фактических особенностей минимизируемой функции будем использовать в (1.4.22) значения градиента и матрицы вторых производных, вычисленных не по аппроксимирующей $F_{sq}(\cdot)$, а непосредственно по минимизируемой функции $F(x)$. Заменяя $F_{sq}(\cdot)$ в (1.4.22), найдем длину шага $\Delta \bar{x}^{(k)}$:

$$\Delta \bar{x}^{(k)} = - \left[\bar{\nabla}^2 F(\bar{x}^{(k)}) \right]^{-1} \cdot \bar{\nabla} F(\bar{x}^{(k)}). \quad (1.4.23)$$

Метод Ньютона реализуется следующей последовательностью действий.

1. Задать (произвольно) точку начального приближения $\bar{x}^0$.
2. Вычислять в цикле по номеру итерации $k = 0, 1, \dots$:
 - значение вектора градиента $\bar{\nabla} F(\bar{x})^{(k)}$ в точке $x = \bar{x}^{(k)}$;

- значение матрицы вторых производных $\bar{\nabla}^2 F(\bar{x}^{(k)});$
 - значение матрицы, обратной матрице вторых производных $\bar{\nabla}^2 F(\bar{x}^{(k)})^{-1};$
 - значение шага $\Delta \bar{x}^{(k)}$ по формуле (1.4.23);
 - новое значение приближения $\bar{x}^{(k+1)}$ по формуле (1.4.19).
3. Закончить итерационный процесс, используя одно из условий, описанных в разд. 1.1.5.

Достоинства модифицированного метода Ньютона

- Для квадратической функции метод позволяет найти минимум за один шаг.
- Для функций, относящихся к классу поверхностей вращения (т. е. обладающих симметрией), метод также обеспечивает сходимость за один шаг (поскольку в точке минимума аргументы минимизируемой функции и ее квадратической аппроксимации совпадают).
- Для несимметричных функций метод обеспечивает более высокую скорость сходимости, чем при использовании других модификаций метода наискорейшего спуска.

К недостаткам метода Ньютона следует отнести необходимость вычислений и (главное!) обращения матриц вторых производных. При этом не только расходуется машинное время, но, что более важно, могут появиться значительные вычислительные погрешности, если матрица $\bar{\nabla}^2 F(\bar{x})^{(k)}$ окажется плохо обусловленной.

Примечание

В качестве количественной характеристики обусловленности матрицы A , обозначаемой "cond A ", принимают произведение $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, где $\| \cdot \|$ — норма матрицы, определяемая по аналогии с нормой вектора:

$$\|A\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2},$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right).$$

Пример 1.4.4.

Поиск минимума функции Розенброка $f(x, y) := 100 \cdot (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ методом, в котором шаг зависит от свойств минимизируемой функции (метод Ньютона).

1. Задание функции:

$$f(x, y) := 100 \cdot (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

2. Задание координатной сетки:

$$N := 23$$

$$i := 0..N \dots j := 0..N$$

$$X_{\min} := -0.2 \quad Y_{\min} := -0.2$$

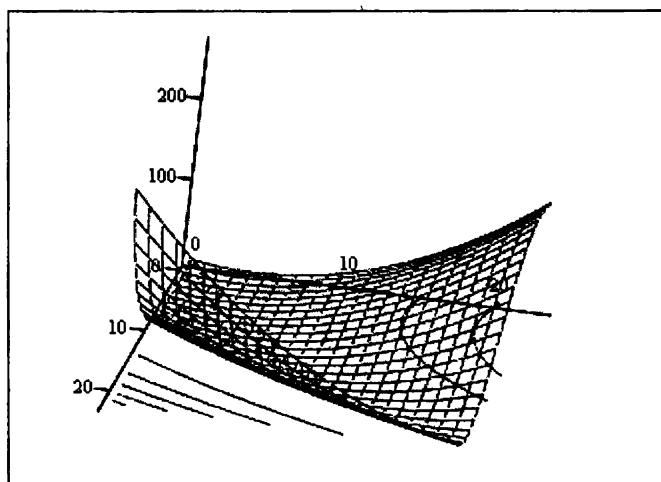
$$X_{\max} := 1.2 \quad Y_{\max} := 1.2$$

$$x_i := X_{\min} + \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} \cdot i \quad y_j := Y_{\min} + \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N} \cdot j$$

3. Вычисление значений функции в узлах координатной сетки:

$$M_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

4. Визуализация функции Розенброка и карты линий уровня (рис. 1.4.15).



М,М

Рис. 1.4.15. Поверхность, задаваемая функцией Розенброка, и карта линий уровня

5. Задание функций, возвращающих значения первых производных:

$$g_x(x, y) := \frac{d}{dx} f(x, y) \quad g_y(x, y) := \frac{d}{dy} f(x, y)$$

$$g_{xx}(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} f(x, y) \quad g_{yy}(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} f(x, y)$$

$$g_{xy}(x, y) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f(x, y)$$

6. Задание функции, возвращающей произведение обратной матрицы вторых производных на градиент функции

$$G(x, y) := \begin{pmatrix} g_{xx}(x, y) & g_{xy}(x, y) \\ g_{xy}(x, y) & g_{yy}(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{pmatrix}$$

7. Реализация итерационного процесса в соответствии с (1.4.19):

$$v_{\max} := 10 \quad v := 0..v_{\max}$$

$$x0 := -0.5 \quad y0 := 1 \quad z0 := f(x0, y0)$$

$$\begin{pmatrix} x2_0 \\ y2_0 \\ z2_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \\ f(x0, y0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x2_{v+1} \\ y2_{v+1} \\ z2_{v+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x2_v - G(x2_v, y2_v)_0 \\ y2_v - G(x2_v, y2_v)_1 \\ f(x2_v - G(x2_v, y2_v)_0, y2_v - G(x2_v, y2_v)_1) \end{pmatrix}$$

8. Визуализация итерационного процесса (рис. 1.4.16—1.4.18)

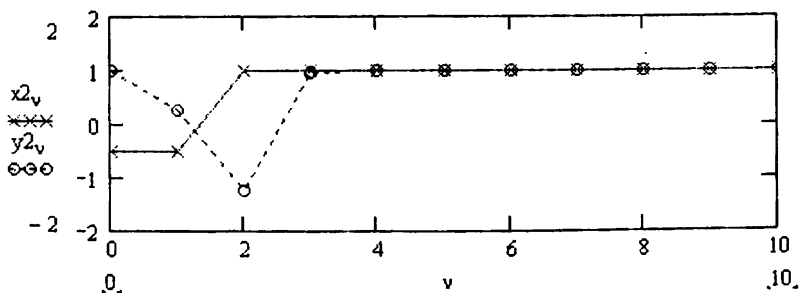


Рис. 1.4.16. Зависимость значений координат решения уравнения от номера итерации

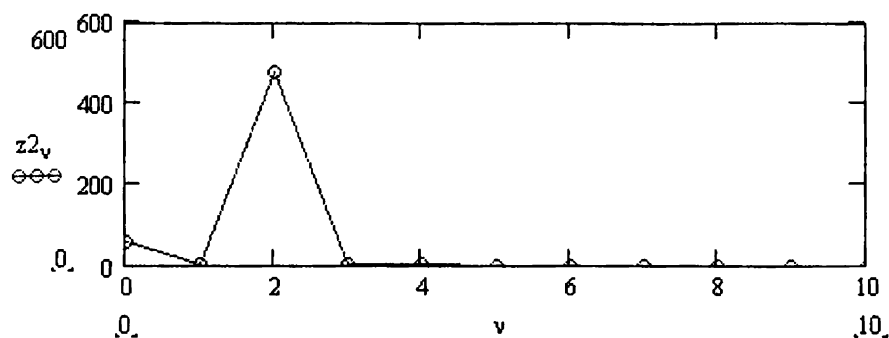
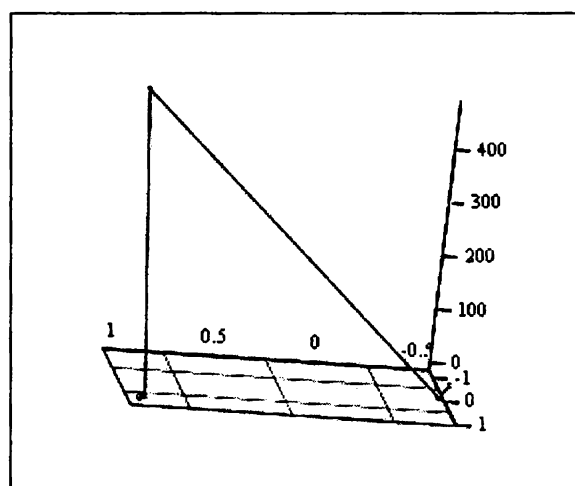


Рис. 1.4.17. Зависимость значения исследуемой функции от номера итерации



$(x2, y2, z2)$

Рис. 1.4.18. Траектория итерационного процесса в пространстве



Лекция № 5

Интерполирование функций

План

Постановка задачи.

Интерполяционный полином Лагранжа.

Интерполяционный полином Ньютона для равноотстоящих узлов.

Погрешность метода многочленной интерполяции.

Сплайн-интерполяция.

1.5.1. Постановка задачи

Пусть известные значения некоторой функции $f(x)$ образуют следующую таблицу (табл. 1.5.1).

Таблица 1.5.1. Исходные данные в задаче интерполяции

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Требуется получить значение функции $f(x)$ для значения аргумента $x \in [x_0, x_n]$, не совпадающего ни с одним из значений x_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Решение задачи находится отысканием некоторой приближающей функции $F(x)$, близкой в некотором смысле к функции $f(x)$, для которой известно аналитическое выражение.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основан на требовании строгого совпадения значений функций $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_i ($i = 0, 1, \dots, n$)

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (1.5.1)$$

В данном случае нахождение приближенной функции называется *интерполированием*, а точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ называются узлами *интерполяции*.

Будем искать интерполирующую функцию $F(x)$ в виде многочлена степени n :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}. \quad (1.5.2)$$

Условия (1.5.1), наложенные на многочлен, позволяют однозначно определить его коэффициенты. Действительно, требуя для $P_n(x)$ выполнения условий (1.5.1), получаем линейную систему, состоящую из $n+1$ уравнения:

$$\sum_{k=0}^n a_k x_i^{n-k} = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.5.3)$$

Решив систему (1.5.3) относительно неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_n$, находим значения этих неизвестных и, подставив в (1.5.2), находим аналитическое выражение аппроксимирующей функции.

Система (1.5.4) всегда имеет единственное решение, т. к. ее определитель

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (1.5.4)$$

известный в алгебре как определитель Вандермонда, отличен от нуля.

Следовательно, интерполяционный многочлен $P_n(x)$ существует и единственен.

Пример 1.5.1.

Документ пакета Mathcad, содержащий решение задачи интерполяции полиномом n -ой степени, состоит из следующих блоков.

1. Задание табличных значений интерполируемой функции:

$$f(x) := \sin(x)$$

$$N := 8 \quad i := 0..8$$

$$x_i := \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i \quad y_i := f(x_i)$$

2. Визуализация табличной зависимости и истинных значений функции (рис. 1.5.1).

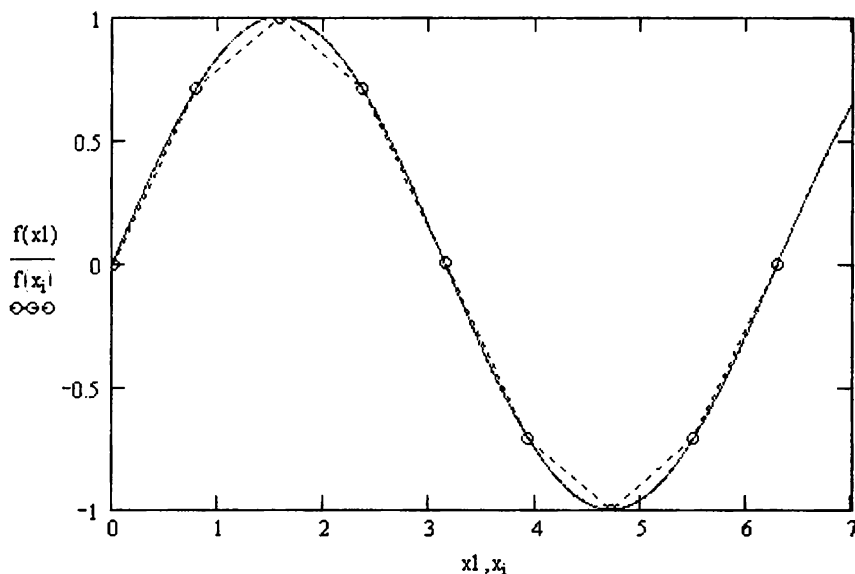


Рис. 1.5.1. Функция $f(x) = \sin(x)$ и табличные значения, используемые для решения задачи интерполяции

3. Задание функции, возвращающей значения полинома (1.5.2):

$$P(x, N, a) := \sum_{i=0}^N a_i x^{N-i}$$

4. Задание функции, возвращающей значения элементов матрицы Вандермонда (рис. 1.5.2).

$$A(x, N) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..N \\ \quad \text{for } j \in 0..N \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow |x_i|^{N-j} \end{array} A$$

Рис. 1.5.2. Задание функции, возвращающей значения элементов матрицы Вандермонда

5. Вычисление значений элементов матрицы Вандермонда:

$$M := A(x, N)$$

6. Вычисление коэффициентов полинома:

$$a := M^{-1} \cdot y$$

7. Построение разности между точным и интерполированными значениями функции (рис. 1.5.3).

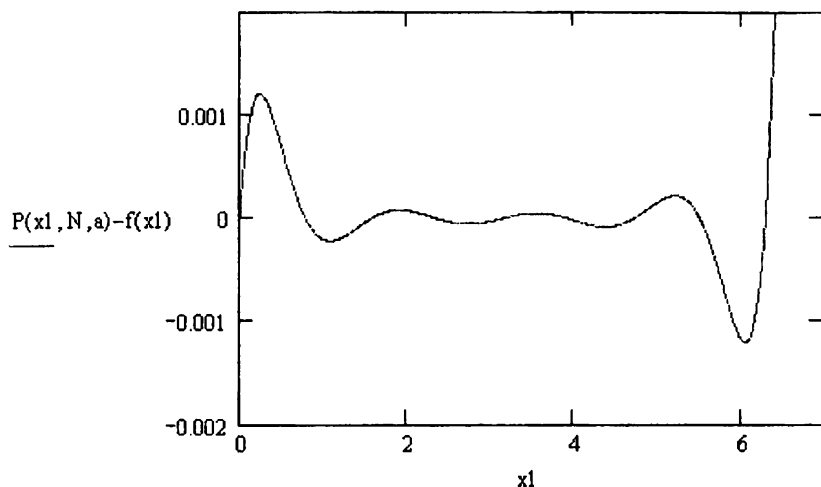


Рис. 1.5.3. Погрешность аппроксимации функции $\sin(x)$ полиномом 8-й степени (файл Lagrang.mcd)

1.5.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Для функции, заданной табл. 1.5.1, построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$, степень которого не выше n и выполнены условия (1.5.1).

Будем искать $L_n(x)$ в виде:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x), \quad (1.5.5)$$

где $l_i(x)$ — многочлен степени n , причем

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_i, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Очевидно, что требование (1.5.6) с учетом (1.5.5) обеспечивает выполнение условий (1.5.1).

Многочлены $l_i(x)$ составим следующим способом:

$$l_i(x) = c_i (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad (1.5.7)$$

где c_i — постоянный коэффициент, значение которого находится из первой части условия (1.5.6):

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}. \quad (1.5.8)$$

Подставив c_i в (1.5.7) и далее в (1.5.5), окончательно получим:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}. \quad (1.5.9)$$

Формула (1.5.9) окончательно решает поставленную задачу.

Пример 1.5.2.

Документ пакета Mathcad, содержащий решение задачи интерполяции полиномом Лагранжа, состоит из следующих блоков.

1. Задание табличных значений интерполируемой функции:

$$f(x) := \sin(x)$$

$$N := 8 \quad i := 0..8$$

$$x_i := \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i \quad y_i := f(x_i)$$

2. Задание функции, возвращающей значение многочлена $l_i(x)$ (рис. 1.5.4).

Здесь аргументы функции: x — координата точки; i — номер многочлена; X — вектор, содержащий координаты узловых точек; Y — вектор, содержащий значения интерполируемой функции в узловых точках.

$$\text{Lagrang}(x, i, X, Y) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow \text{rows}(X) - 1 \\ L \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 0..N \\ \quad L \leftarrow L \cdot \frac{x - X_j}{X_i - X_j} \text{ if } j \neq i \\ L \leftarrow L \cdot Y_i \end{array} \right|$$

Рис. 1.5.4. Функция, возвращающая значение многочлена $l_i(x)$

3. Задание функции, возвращающей значения полинома Лагранжа:

$$L(x, N, X, Y) := \sum_{i=0}^N \text{Lagrang}(x, i, X, Y)$$

4. Построение разности между точными и интерполированными значениями функции (рис. 1.5.5).

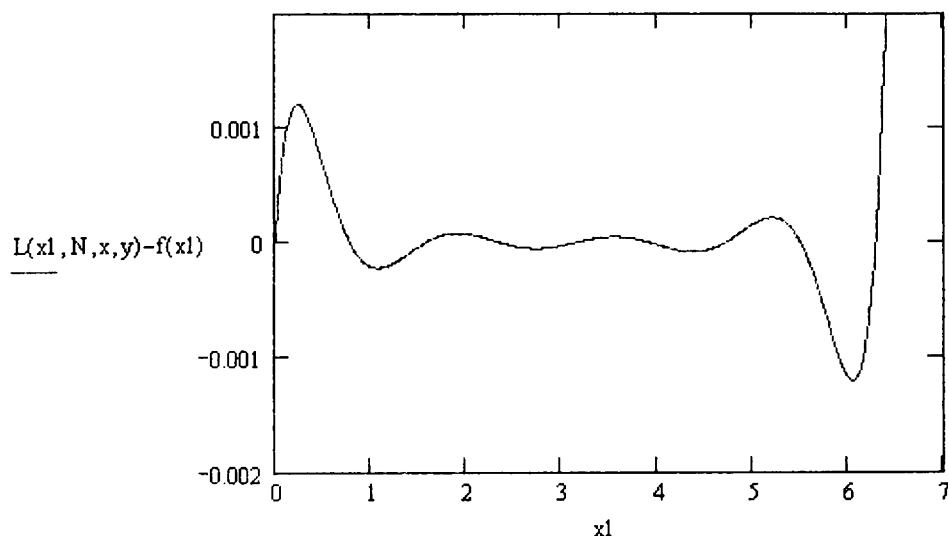


Рис. 1.5.5. Погрешность аппроксимации функции $\sin(x)$ полиномом Лагранжа

1.5.3. Интерполяционный полином Ньютона для равноотстоящих узлов

Интерполяционные формулы Ньютона строятся для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента h :

$$h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.5.10)$$

Для функции, заданной табл. 1.5.1 с постоянным шагом (1.5.10), определим разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad (1.5.11)$$

называемые конечными разностями первого порядка.

Из конечных разностей первого порядка можно образовать конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i. \quad (1.5.12)$$

Аналогично получают выражение для конечных разностей третьего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} + \dots + (-1)^k y_i. \quad (1.5.14)$$

Будем искать интерполяционный полином в виде:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\dots + a_n(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах. Полагая $x = x_0$, из (1.5.15) найдем $y_0 = P_0(x_0) = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. Далее, последовательно придавая x значения x_1 и x_2 , получаем:

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h,$$

$$\text{откуда } a_1 = \frac{\Delta y_0}{h};$$

$$\begin{aligned} y_2 &= P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \\ &= a_0 + a_1 2h + a_2 2h^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$a_2 2h^2 = y_2 - a_1 2h - a_0$$

или

$$2ha_2 = y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = y_2 - 2(y_1 - y_0) - y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta^2 y_0,$$

откуда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Затем, проведя аналогичные выкладки, можно получить:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^2}.$$

В общем случае выражение для a_n будет иметь вид:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^2}. \quad (1.5.16)$$

Подставляя (1.5.16) в выражение для многочлена (1.5.15), получаем:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Функция пакета Mathcad, возвращающая значения первого интерполяционного полинома Ньютона, представлена на рис. 1.5.6. Аргументы функции: t — координата точки; x — вектор, содержащий координаты узловых точек; y — вектор, содержащий значения интерполируемой функции в узловых точках.

При ручных вычислениях формула (1.5.17) применяется несколько в ином виде. Положим $\frac{x - x_0}{h} = t$, т. е. $x = x_0 + ht$, тогда:

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2,$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_0 - (n-1)h}{h} = t - n + 1.$$

Подставляя данные выражения в (1.5.17), окончательно получаем:

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + th) = & y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots \\ & \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Формула (1.5.18) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Данная формула применяется для интегрирования в начале отрезка, когда t мало по абсолютной величине.

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, используется вторая интерполяционная формула Ньютона, которая получается, если отыскивать интерполяционный полином в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ \dots + a_n(x - x_n) \cdot \dots \cdot (x - x_1). \quad (1.5.19)$$

Коэффициенты полинома (1.5.19), находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}. \quad (1.5.20)$$

Функция пакета Mathcad, возвращающая значения второго интерполяционного полинома Ньютона, представлена на рис. 1.5.7. Аргументы функции: t — координата точки; x — вектор, содержащий координаты узловых точек; y — вектор, содержащий значения интерполируемой функции в узловых точках.

```

Newnot1(t,x,y) :=
  n ← last(x)
  for i ∈ 0..n
    fi,0 ← yi
  for k ∈ 1..n
    for i ∈ 0..n - k
      fi,k ←  $\frac{f_{i+1,k-1} - f_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}$ 
  s ← y0
  for k ∈ 1..n
    r ← 1
    for i ∈ 0..k - 1
      r ← r · |t - xi|
    s ← f0,k · r + s
  s

```

Рис. 1.5.6. Функция, возвращающая значения первого интерполяционного многочлена Ньютона (файл Newton1.mcd)

```

Newnot2(t,x,y) :=
  n ← last(x)
  for i ∈ 0..n
    fi,0 ← yi
  for k ∈ 1..n
    for i ∈ 0..n-k
      fi,k ←  $\frac{f_{i+1,k-1} - f_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}$ 
  s ← y0
  for k ∈ 1..n
    r ← 1
    for i ∈ 0..k-1
      r ← r · (t - xn-i)
    s ← fn-k,k · r + s
  s

```

Рис. 1.5.7. Функция, возвращающая значения второго интерполяционного многочлена Ньютона (файл Newton2.mcd)

Подставив (1.5.20) в (1.5.19) и перейдя к переменной $t = \frac{x - x_n}{h}$, получим окончательный вид интерполяционной формулы Ньютона, используемой при ручных вычислениях:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots \\
 \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.
 \end{aligned}
 \tag{1.5.21}$$

1.5.4. Погрешность интерполяции

Погрешность интерполяции полиномом Лагранжа оценивается по формуле:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|,
 \tag{1.5.22}$$

где

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|, \quad (1.5.23)$$

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (1.5.24)$$

Погрешность интерполяции полиномом Ньютона оценивается по формулам:

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left| t(t-1)(t-2) \dots (t-n) \right|, \quad (1.5.25)$$

$$\left| R_n(x) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left| t(t+1)(t+2) \dots (t+n) \right|. \quad (1.5.26)$$

1.5.5. Сплайн-интерполяция

При большом количестве узлов интерполяции приходится использовать интерполяционные полиномы высокой степени, что создает определенные неудобства при вычислениях. Можно избежать высокой степени интерполяционного многочлена, разбив отрезок интерполяции на несколько частей с построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена. Однако такое интерполирование обладает существенным недостатком: в точках сшивки разных интерполяционных полиномов будет разрывной их первая производная, поэтому для решения задачи кусочно-линейной интерполяции используют особый вид кусочно-полиномиальной интерполяции — сплайн-интерполяцию.

Сплайн — это функция, которая на каждом частичном отрезке интерполяции является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными.

Пусть интерполируемая функция $f(x)$ задана своими значениями y_i в узлах x_i , ($i = 0, 1, \dots, n$). Обозначим длину частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ $h_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Будем искать кубический сплайн на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ в виде:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (1.5.27)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — четверка неизвестных коэффициентов. Можно доказать, что задача нахождения кубического сплайна имеет единственное решение.

Потребуем совпадения значений $S(x)$ в узлах с табличными значениями функции $f(x)$:

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \quad (1.5.28)$$

$$S(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3. \quad (1.5.29)$$

Число этих уравнений ($2n$) в два раза меньше числа неизвестных коэффициентов. Для того чтобы получить дополнительные условия, потребуем также непрерывности первой и второй производных сплайна во всех точках, включая узлы. Для этого следует приравнять левые и правые производные $S'(x-0)$, $S'(x+0)$, $S''(x-0)$, $S''(x+0)$ во внутреннем узле x_i .

Вычислив выражения для производных $S'(x)$, $S''(x)$ последовательным дифференцированием (1.5.27):

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \quad (1.5.30)$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \quad (1.5.31)$$

найдем правые и левые производные в узле:

$$S'(x_i - 0) = b_i + 2c_i h_i + 2d_i h_i^2,$$

$$S'(x_i + 0) = b_{i+1},$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Аналогично поступаем для второй производной:

$$S''(x-0) = 2c_i + 6d_i h_i,$$

$$S''(x+0) = 2c_{i+1}.$$

Приравняв левые и правые производные, получаем:

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 2d_i h_i^2, \quad (1.5.32)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \quad (1.5.33)$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Уравнения (1.5.32), (1.5.33) дают еще $2(n-1)$ условий. Для получения недостающих уравнений накладывают требования к поведению сплайна на концах отрезка интерполяции. Если потребовать нулевой кривизны сплайна на концах отрезка интерполяции (т. е. равенство нулю второй производной), то получим:

$$c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \quad (1.5.34)$$

Исключив из уравнений (1.5.28)–(1.5.33) n неизвестных a_i , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} b_i h_i - c_i h_i^2 - d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1}, \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0, \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0, \\ c_1 = 0, \\ c_n + 3d_n h_n = 0, \end{cases} \quad (1.5.35)$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Система (1.5.35) состоит из $3n$ уравнений. Решив систему (1.5.35), получаем значения неизвестных b_i, c_i, d_i , определяющих совокупность всех формул для искомого интерполяционного сплайна:

$$S_i(x) = y_{i-1} + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (1.5.36)$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Программа, реализующая метод сплайн-интерполяции, оказывается достаточно громоздкой, поэтому мы ограничимся обсуждением решения задачи об интерполяции синуса с помощью сплайнов, используя функции пакета Mathcad: `interp(VS, x, y, z), lspline(x, y), pspline(x, y), cspline(x, y)`.

Пример 1.5.3.

Документ пакета Mathcad, содержащий решение задачи сплайн-интерполяции, состоит из следующих блоков.

1. Задание табличных значений интерполируемой функции:

$$f(x) := \sin(x)$$

$$N := 8 \quad i := 0..8$$

$$x_i := \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i \quad y_i := f(x_i)$$

2. Вычисление коэффициентов сплайнов, приближающихся к граничным точкам, как прямая линия, парабола, полином третьей степени соответственно:

$$vs1 := lspline(x, y)$$

$$vs2 := pspline(x, y)$$

$$vs3 := cspline(x, y)$$

3. Задание дискретной сетки для вычисления значений сплайнов:

$$Np := 1000 \quad i := 0..Np \quad X_i := Np \quad X_i := \frac{2 \cdot \pi}{Np} \cdot i$$

4. Вычисление значений сплайнов в узлах сетки:

$$Y1_i := \text{interp}(vs1, x, y, X_i)$$

$$Y2_i := \text{interp}(vs2, x, y, X_i)$$

$$Y3_i := \text{interp}(vs3, x, y, X_i)$$

5. Визуализация сплайнов (рис. 1.5.8).

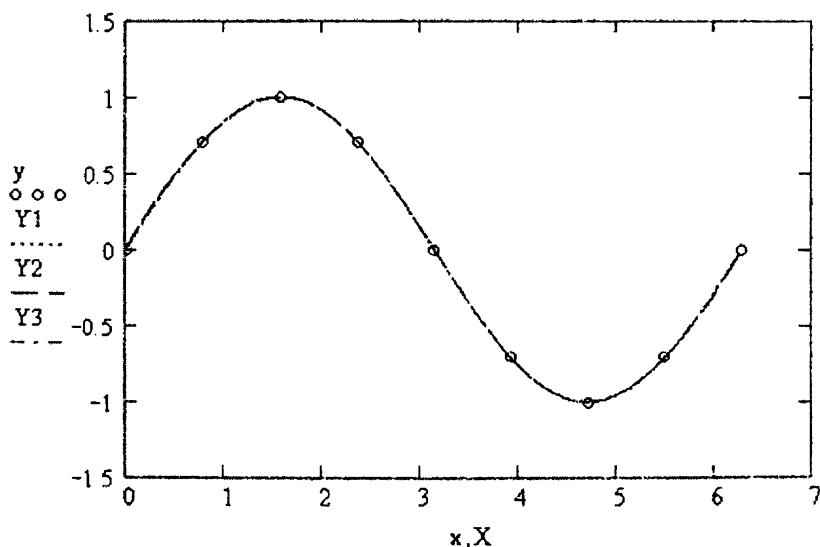


Рис. 1.5.8. Визуализация результатов сплайн-интерполяции

6. Построение разности между сплайнами различного типа в узлах координатной сетки (рис. 1.5.9)

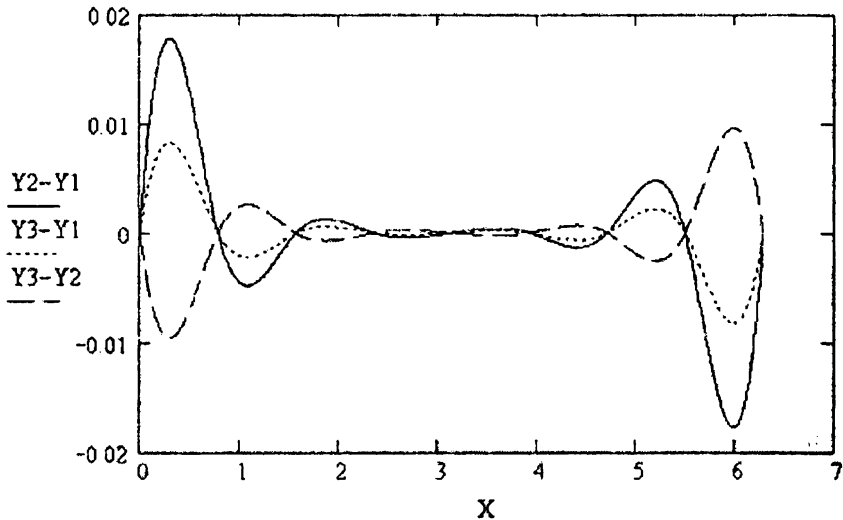


Рис. 1.5.9. Визуализация разностей значений сплайнов разного типа

7. Вычисление значений первых производных сплайнов:

$$k := 0..Np - 1 \quad \Delta x := \frac{2\pi}{Np}$$

$$D1_k := \frac{Y1_{k+1} - Y1_k}{\Delta x} \quad D2_k := \frac{Y2_{k+1} - Y2_k}{\Delta x} \quad D3_k := \frac{Y3_{k+1} - Y3_k}{\Delta x}$$

8. Построение графиков первых производных сплайнов (рис. 1.5.10).

9. Вычисление значений вторых производных сплайнов:

$$m := 0..Np - 2$$

$$Dd1_m := \frac{D1_{m+1} - D1_m}{\Delta x} \quad Dd2_m := \frac{D2_{m+1} - D2_m}{\Delta x} \quad Dd3_m := \frac{D3_{m+1} - D3_m}{\Delta x}$$

10. Построение графиков вторых производных сплайнов (рис. 1.5.11).

11. Вычисление значений третьих производных сплайнов:

$$m := 0..Np - 3$$

$$Ddd1_m := \frac{Dd1_{m+1} - Dd1_m}{\Delta x} \quad Ddd2_m := \frac{Dd2_{m+1} - Dd2_m}{\Delta x} \quad Ddd3_m := \frac{Dd3_{m+1} - Dd3_m}{\Delta x}$$

12. Построение графиков третьих производных сплайнов (рис. 1.5.12).

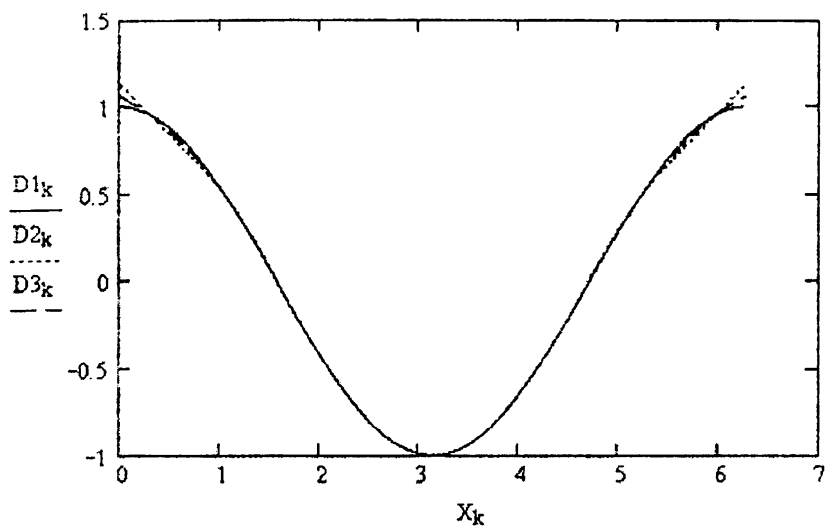


Рис. 1.5.10. Первая производная, вычисленная по численным значениям, полученным сплайн-интерполяцией

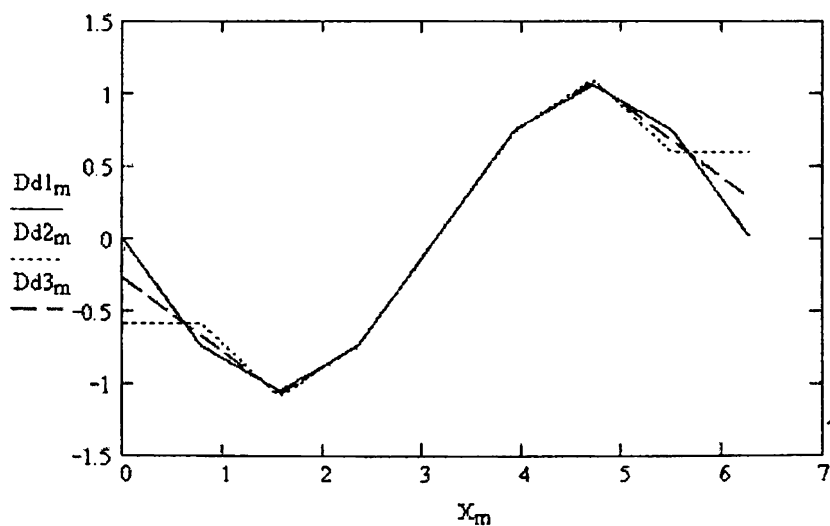


Рис. 1.5.11. Вторая производная, вычисленная по численным значениям, полученным сплайн-интерполяцией

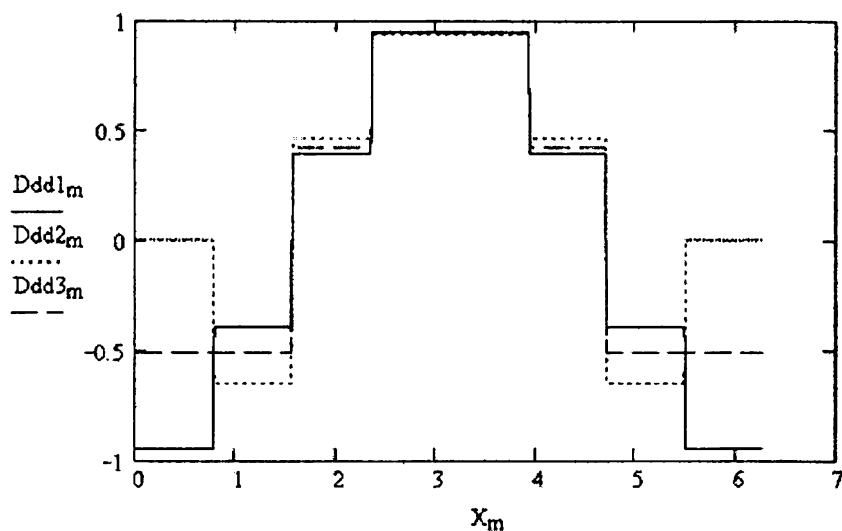
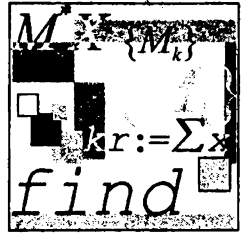


Рис. 1.5.12. Третья производная, вычисленная по численным значениям, полученным сплайн-интерполяцией

Как видно из рис. 1.5.10—1.5.12, первая и вторая производные сплайнов являются непрерывными функциями, третья и производные более высокого порядка — разрывными функциями.



Лекция № 6

Численное дифференцирование и интегрирование

План

- ☐ Дифференцирование функций, заданных аналитически.
- ☐ Особенности задачи численного дифференцирования функций, заданных таблично.
- ☐ Интегрирование функций, заданных аналитически (формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона).
- ☐ Погрешность численного интегрирования.
- ☐ Вычисление интегралов методом Монте-Карло.

1.6.1. Дифференцирование функций, заданных аналитически

По определению производная функции $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.6.1)$$

Переходя в (1.6.1) от бесконечно малых к конечным разностям, получаем приближенную формулу численного дифференцирования:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.6.2)$$

Формула (1.6.2) позволяет построить простой вычислительный алгоритм.

1. Задать значение точки, в которой вычисляется производная.
2. Задать значение приращения Δx .
3. Вычислить производную в соответствии с формулой (1.6.2).

Замена бесконечно малых приращений конечными является причиной возникновения ошибки. Для оценки ее величины разложим функцию $f(x)$ в точке $x + \Delta x$ в ряд Тэйлора:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\Delta x)^n + \dots \quad (1.6.3)$$

Подставив (1.6.2) в (1.6.3) и приведя подобные члены, получим:

$$f'(x) \approx f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x + \dots \quad (1.6.4)$$

Из (1.6.4) видно, что все члены, начиная со второго, определяют отличие численного значения производной от ее точного значения. Основной член погрешности равен $f''(x)\Delta x/2!$; т. к. данный член $\sim \Delta x$, говорят, что формула (1.6.2) имеет первый порядок точности по Δx .

Можно вычислять производную, используя симметричную разностную схему:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.6.5)$$

Для оценки точности данной формулы необходимо удерживать в разложении в ряд Тэйлора первые четыре члена:

$$\begin{aligned} f'(x) \approx & \frac{1}{2\Delta x} \left(f(x) + f'(x) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x) \frac{(\Delta x)^2}{2!} + f'''(x) \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \right) - \\ & - \frac{1}{2\Delta x} \left(f(x) - f'(x) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x) \frac{(\Delta x)^2}{2!} - f'''(x) \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Раскрыв в (1.6.6) скобки и приведя подобные, получаем:

$$f'(x) \approx f'(x) + f'''(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots \quad (1.6.7)$$

Из (1.6.7) видно, что основной член погрешности равен $f'''(x)(\Delta x)^2/3!$; т. к. данный член $\sim (\Delta x)^2$, говорят, что формула (1.6.5) имеет второй порядок точности по Δx .

Пример 1.6.1.

Рассмотрим решение задачи о вычислении численного значения производных в пакете Mathcad. Соответствующий документ состоит из следующих блоков.

1. Задание дифференцируемой функции и ее производной:

$$f(x) := \sin(x) \quad df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

2. Задание пространственной сетки:

$$X_{\min} := 0 \quad X_{\max} := \frac{\pi}{2}$$

$$N := 2000 \quad i := 0..N$$

$$\Delta x := \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} \quad X_i := X_{\min} + \Delta x \cdot i$$

3. Вычисление производной функции в соответствии с (1.6.2):

$$j := 0..N-1$$

$$dy_j := \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta x}$$

4. Построение графика производной функции $f(x) = \sin(0,01x^2)$ (рис. 1.6.1).

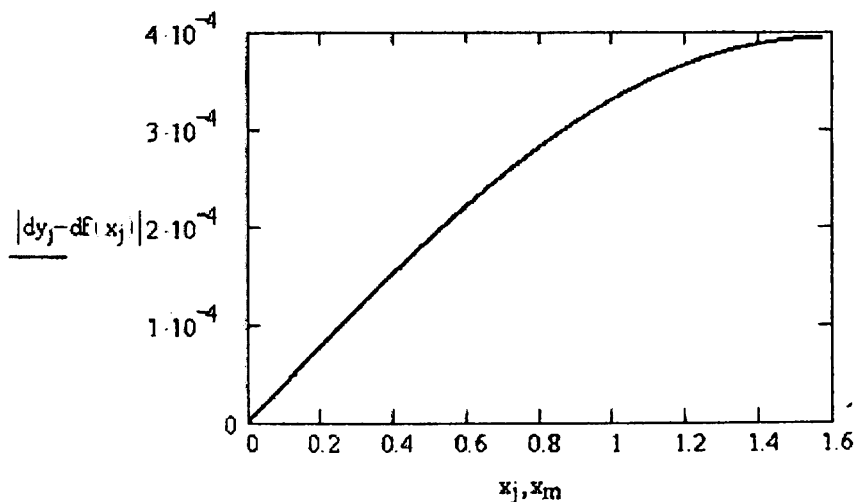


Рис. 1.6.1. График производной функции $f(x) = \sin(0,01x^2)$

5. Вычисление производной функции в соответствии с (1.6.5):

$$m := 1..N-1$$

$$dy2_m := \frac{f(x_{m+1}) - f(x_{m-1}))}{2 \cdot \Delta x}$$

6. Построение графика модуля разности между точным и численным значениями производной (рис. 1.6.2).

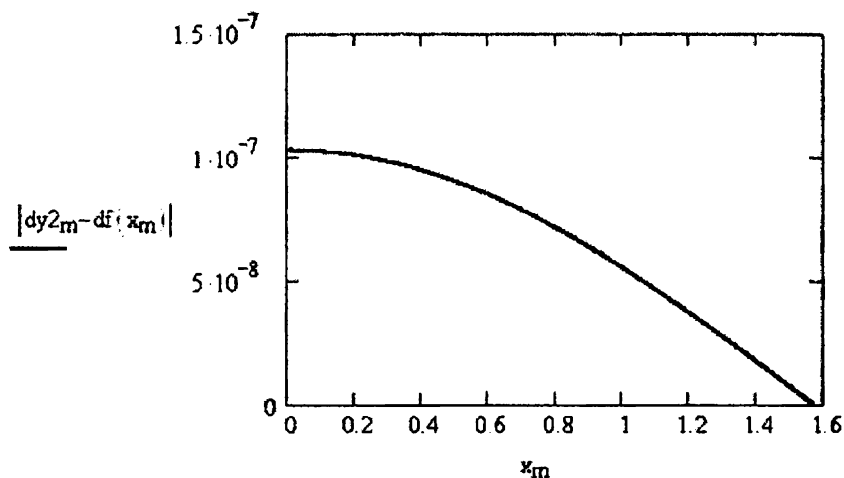


Рис. 1.6.2. Разность между точными и численными значениями производных функции $f(x) = \sin(0.01x^2)$

Аналогичным образом поступают при вычислении производных высших порядков.

1.6.2. Особенности задачи численного дифференцирования функций, заданных таблично

Пусть известны табличные значения функции $f(x)$ в конечном числе точек отрезка $[a, b]$. Требуется определить значение производной в некоторой точке отрезка $[a, b]$.

Для вычисления значений функции, заданной таблично, в лекции № 5 мы строили интерполяционный полином $F_n(x)$, продифференцировав который, можно получить значение производной:

$$f'(x) \approx F'_n(x). \quad (1.6.8)$$

Полагая, что погрешность интерполирования определяется формулой

$$R_n(x) = f(x) - F_n(x), \quad (1.6.9)$$

находим оценку погрешности вычисления полинома:

$$r_n(x) = f'(x) - F'_n(x). \quad (1.6.10)$$

Отметим, что задача численного дифференцирования в данном случае является некорректной, т. к. погрешность производной полинома может существенно превышать погрешность интерполяции.

1.6.3. Интегрирование функций, заданных аналитически (формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона)

С геометрической точки зрения определенный интеграл

$$F = \int_a^b f(x) dx \quad (1.6.11)$$

есть площадь фигуры, ограниченная графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 1.6.3).

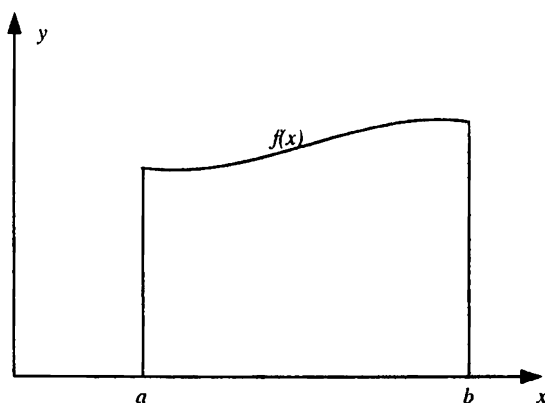


Рис. 1.6.3. К объяснению геометрического смысла определенного интеграла

Разделим отрезок $[a, b]$ на N равных отрезков длиной Δx , где

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}. \quad (1.6.12)$$

Тогда координата правого конца i -го отрезка определяется по формуле:

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad (1.6.13)$$

где $x_0 = a$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Простейшая оценка площади под кривой $f(x)$ может быть получена как сумма площадей прямоугольников, одна из сторон которого совпадает с отрезком $[x_i, x_{i+1}]$, а высота равна значению функции в точке x_i (метод левых прямоугольников) (рис. 1.6.4) или в точке x_{i+1} (метод правых прямоугольников) (рис. 1.6.5).

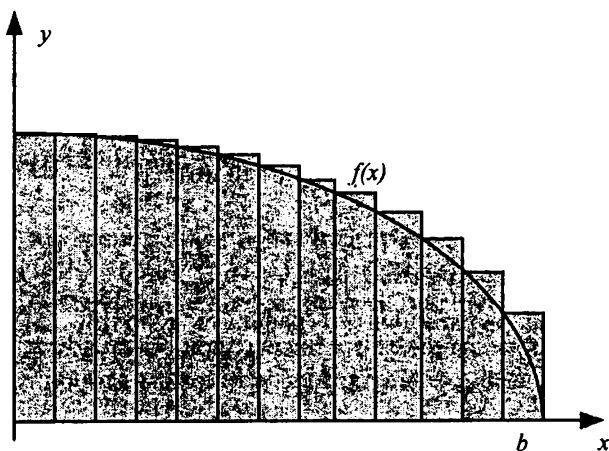


Рис. 1.6.4. Метод левых прямоугольников

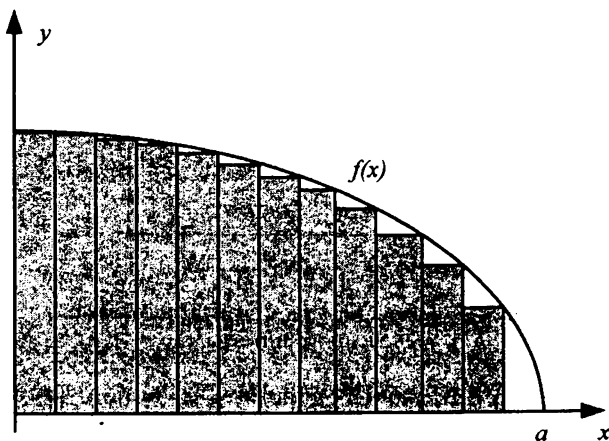


Рис. 1.6.5. Метод правых прямоугольников

Значение определенного интеграла вычисляется по формулам:

$$F_L = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \Delta x, \quad (1.6.14)$$

$$F_R = \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x \quad (1.6.15)$$

для методов левых и правых прямоугольников соответственно.

Можно повысить точность вычисления определенного интеграла, если заменять реальную функцию на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, отрезком прямой, проходящей через точки с координатами $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (линейная интерполяция).

В этом случае фигура, ограниченная графиком функции и прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, является трапецией. Искомый определенный интеграл определяется как сумма площадей всех трапеций:

$$F_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)) \Delta x = \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_N) \right] \Delta x. \quad (1.6.16)$$

Более высокая точность вычисления интегралов обеспечивается при использовании параболической интерполяции (полиномом второй степени) по трем соседним точкам:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (1.6.17)$$

Для нахождения коэффициентов a, b, c полинома, проходящего через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , нужно найти решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c, \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases} \quad (1.6.18)$$

относительно неизвестных a, b, c .

Решив систему (1.6.18) относительно неизвестных a, b, c любым известным методом (например, Крамера), подставив найденные выражения в (1.6.17) и выполнив элементарные преобразования, получаем:

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (1.6.19)$$

Площадь под параболой $y = y(x)$ на интервале $[x_0, x_2]$ находится посредством элементарного интегрирования (1.6.19):

$$F_0 = \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\Delta x, \quad (1.6.20)$$

где $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Искомый определенный интеграл находится как площадь всех параболических сегментов (формула Симпсона):

$$F_N = \frac{1}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)] \Delta x. \quad (1.6.21)$$

Обратите внимание на то обстоятельство, что в формуле Симпсона N должно быть четным числом.

Пример 1.6.2.

Рассмотрим решение задачи о вычислении интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$ в пакете Mathcad. Соответствующий документ состоит из следующих блоков.

1. Задание подынтегральной функции:

$$f(x) := \sin(x).$$

2. Задание пространственной сетки:

$$X_{\min} := 0 \quad X_{\max} := \frac{\pi}{2}$$

$$N := 2000 \quad i := 0..N$$

$$\Delta x := \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} \quad X_i := X_{\min} + \Delta x \cdot i$$

3. Вычисление значений функции в узлах пространственной сетки:

$$Y_i := f(X_i)$$

4. Вычисление значения интеграла по формуле левых и правых прямоугольников:

$$F_R := \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right) \Delta x$$

$$F_L := \left(\sum_{i=0}^{N-1} Y_i \right) \Delta x$$

$$F_R = 1.0003926 \quad F_L = 0.9996072$$

$$F_R - 1 = 3.926 \times 10^{-4} \quad F_L - 1 = -3.928 \times 10^{-4}$$

5. Вычисление значения интеграла по формуле трапеций:

$$F_N := \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} Y_i + \frac{1}{2} \cdot f(x_N) \right) \Delta x$$

$$F_N = 0.9999999486 \quad F_N - 1 = -5.14 \times 10^{-8}$$

6. Вычисление значения интеграла методом Симпсона:

$$F_S := \left(Y_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\text{if} \left(i - 2 \cdot \text{ceil} \left(\frac{i}{2} \right) = 0, 2, 4 \right) \cdot Y_i \right) + Y_N \right) \frac{\Delta x}{3}$$

$$F_S = 1 \quad F_S - 1 = 1.776 \times 10^{-15}$$

1.6.4. Погрешность численного интегрирования

Для нахождения зависимостей погрешности вычисления определенного интеграла на отрезке $[a, b]$ от числа отрезков разбиения интервала интегрирования разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} f''(x_i)(x - x_i)^2 + \dots \quad (1.6.22)$$

Тогда интеграл от данной функции на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ будет равен:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = f(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} f'(x_i) (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} f''(x_i) (\Delta x)^3 + \dots \quad (1.6.23)$$

Оценим погрешность метода левых прямоугольников. Погрешность интегрирования Δ_i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ равняется разности между точным значением интеграла и его оценкой $f(x_i) \Delta x$:

$$\Delta_i = \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right] - f(x_i) \Delta x \approx \frac{1}{2} f'(x_i) (\Delta x)^2. \quad (1.6.24)$$

Из (1.6.24) видно, что основной член погрешности на каждом отрезке имеет порядок $(\Delta x)^2$ или, в символической записи, $O((\Delta x)^2)$. Поскольку полное

число отрезков равно N , а $\Delta x = (b - a)/N$, то полная погрешность метода левых прямоугольников по порядку величины равна $N\Delta_i \approx N(\Delta x)^2 \approx O(N^{-1})$. Аналогично можно показать, что погрешность метода правых прямоугольников также пропорциональна N^{-1} .

Погрешность формулы трапеций оценивается аналогичным образом. Так как значение интеграла на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ вычисляется по формуле

$$[f(x_i) + f(x_{i+1})]\Delta x/2,$$

то погрешность равна:

$$\Delta_i = \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right] - \frac{1}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]\Delta x. \quad (1.6.25)$$

Заменив в (1.6.25) первый член выражением (1.6.23), значение функции в точке x_{i+1} — разложением в ряд Тэйлора:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_i)(\Delta x)^2 + \dots,$$

раскрыв скобки и приведя подобные, обнаруживаем, что член, пропорциональный первой производной функции, сокращается, и погрешность на одном отрезке равна $\frac{1}{12}f''(x)(\Delta x)^3 \approx O((\Delta x)^3) \approx O(N^{-3})$. Следовательно, полная погрешность формулы трапеций на отрезке $[a, b]$ по порядку величины равна $O(N^{-2})$.

Так как формула Симпсона основывается на приближении функции $f(x)$ параболой, можно ожидать, что в данном случае погрешность по порядку величины будет определяться членами, пропорциональными третьей производной функции. Однако последовательное повторение действий, выполненных при оценке погрешности метода трапеций, показывает, что эти члены сокращаются в силу их симметричности, поэтому в разложении в ряд Тейлора следует удержать член, пропорциональный $f'''(x)(\Delta x)^4$. Следовательно, погрешность формулы Симпсона на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ пропорциональна $f'''(x_i)(\Delta x)^5$, а полная погрешность на отрезке $[a, b]$ по порядку величины составляет $O(N^{-4})$.

Полезно получить оценку погрешности вычисления интеграла от функции, зависящей от двух переменных, который с геометрической точки зрения

представляет собой объем фигуры под поверхностью, заданной функцией $f(x, y)$. В прямоугольном приближении данный интеграл равен сумме объемов параллелепипедов с площадью основания $\Delta x \Delta y$ и высотой, равной значению функции $f(x, y)$ в одном из углов. Для определения погрешности разложим функцию $f(x, y)$ в ряд Тейлора:

$$f(x, y) = f(x_i, y_i) + f'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f'_y(x_i, y_i)(y - y_i) + \dots, \quad (1.6.26)$$

где f'_x, f'_y — частные производные по соответствующим переменным.

Погрешность вычисления интеграла Δ_i равна:

$$\Delta_i = \iint f(x, y) dx dy - f(x_i, y_i) \Delta x \Delta y. \quad (1.6.27)$$

Подставив (1.6.26) в (1.6.27), выполнив интегрирование и приведя подобные, получаем, что член, пропорциональный $f(x_i, y_i)$, сокращается, а интеграл от $(x - x_i) dx$ дает $(\Delta x)^2/2$. Интеграл от данного выражения по dy дает еще один множитель Δy . Аналогичный вклад дает интеграл от члена, пропорционального $(y - y_i)$. Так как порядок погрешности Δy также составляет $O(\Delta x)$, то погрешность интегрирования по прямоугольнику $x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}$ равна:

$$\Delta_i \approx \frac{1}{2} [f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)] (\Delta x)^3. \quad (1.6.28)$$

Из (1.6.28) видно, что погрешность интегрирования по одному параллелепипеду составляет $O((\Delta x)^3)$. Так как имеется N параллелепипедов, полная погрешность по порядку величины равна $N(\Delta x)^3$. Однако в двумерном случае $N \sim \frac{1}{(\Delta x)^2}$, поэтому полная погрешность $\Delta_i \sim (\Delta x) \sim O(N^{-1/2})$. Напомним, что в одномерном случае полная погрешность метода прямоугольников $\Delta_i \sim O(N^{-1})$.

Аналогичные оценки для двумерных обобщений формул трапеций и Симпсона показывают, что они соответственно равны $O(N^{-1})$ и $O(N^{-2})$. Вообще можно показать, что если для одномерного случая погрешность составляет $O(N^{-\alpha})$, то в d -мерном случае она равна $O(N^{-\alpha/d})$.

1.6.5. Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Проиллюстрируем идеи метода Монте-Карло на примере вычисления определенного интеграла от функции, зависящей от одной переменной. Пусть нам необходимо вычислить интеграл (1.6.11) от некоторой заданной функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$. В предыдущем разделе мы рассмотрели несколько различных формул интегрирования, в которых использовались значения функции $f(x)$, вычисляемые в равноотстоящих точках. Однако можно использовать и другой подход, суть которого легко понять из следующего примера.

Представим себе прямоугольник высотой H и длиной $b-a$ такой, что функция $f(x)$ целиком лежит внутри данного прямоугольника (рис. 1.6.6). Сгенерируем N пар случайных чисел, равномерно распределенных в данном прямоугольнике:

$$a \leq x_i \leq b, 0 \leq y_i \leq H. \quad (1.6.29)$$

Тогда доля точек (x_i, y_i) , удовлетворяющих условию $y_i \leq f(x_i)$, является оценкой отношения интеграла от функции $f(x)$ к площади рассматриваемого прямоугольника. Следовательно, оценка интеграла в данном методе может быть получена по формуле:

$$F_N = A \frac{n_s}{N}, \quad (1.6.30)$$

где n_s — число точек, удовлетворяющих условию $y_i \leq f(x_i)$; N — полное количество точек; A — площадь прямоугольника.

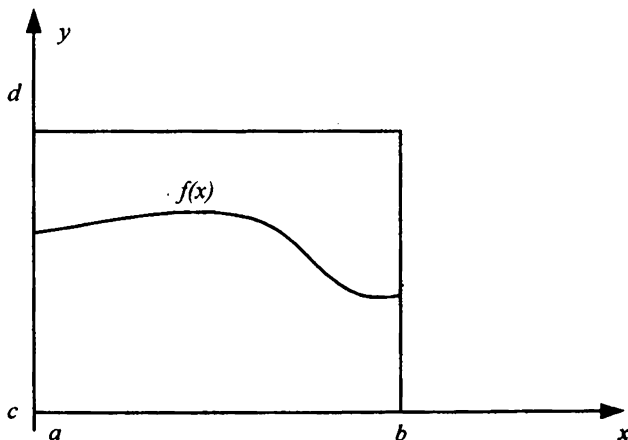


Рис. 1.6.6. К объяснению метода Монте-Карло

Можно предложить и другой путь вычисления определенного интеграла, рассматривая его как среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$F_N = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (1.6.31)$$

где x_i — последовательность случайных чисел с равномерным законом распределения на отрезке $[a, b]$.

Отметим, что в отличие от данных методов погрешность метода Монте-Карло не зависит от размерности и меняется как $O(n^{-1/2})$. Следовательно, для достаточно больших d интегрирование по методу Монте-Карло будет приводить к меньшим погрешностям при тех же значениях N .

Пример 1.6.3.

Рассмотрим решение задачи о вычислении интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$ в пакете Mathcad. Соответствующий документ состоит из следующих блоков.

1. Задание подынтегральной функции:

$$f(x) := \sin(x)$$

2. Задание координат вершин прямоугольника:

$$X \text{ min} := 0 \quad X \text{ max} := \frac{\pi}{2}$$

$$Y \text{ min} := 0 \quad Y \text{ max} := 1.5$$

3. Задание числа точек случайной последовательности:

$$N := 1000$$

Генерация последовательностей случайных чисел с равномерным законом распределения на интервалах $[X \text{ min}, X \text{ max}]$, $[Y \text{ min}, Y \text{ max}]$:

$$x := \text{runit}(N, X \text{ min}, X \text{ max})$$

$$y := \text{runit}(N, Y \text{ min}, Y \text{ max})$$

4. Задание координатной сетки для построения графика подынтегральной функции:

$$i := 0..N-1$$

$$t_i := X \text{ min} + \frac{X \text{ max} - X \text{ min}}{N-1} \cdot i$$

5. Визуализация случайных чисел с равномерным законом распределения по каждой координате (рис. 1.6.7).

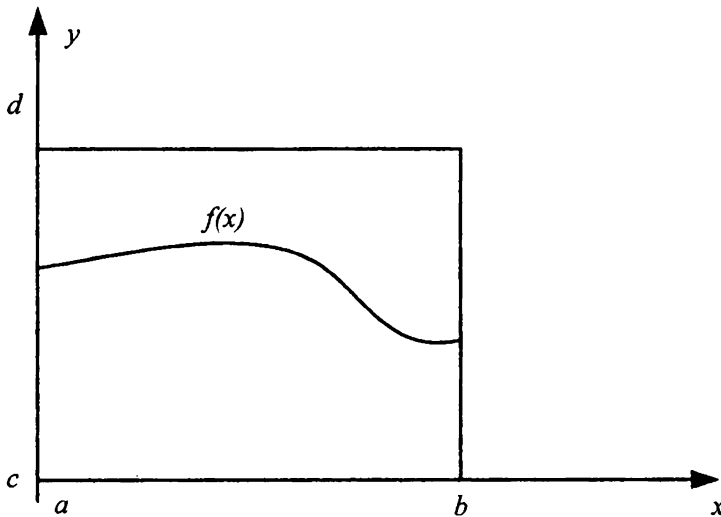


Рис. 1.6.7. Визуализация реализации случайных чисел, использованной для вычисления интеграла

6. Подсчет числа точек, попавших под график функции:

$$n_s := \sum_{i=0}^{N-1} \text{if}(f(x_i) \geq y_i, 1, 0)$$

7. Вычисление площади прямоугольника:

$$A := (X_{\max} - X_{\min}) \cdot (Y_{\max} - Y_{\min})$$

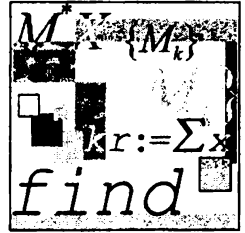
8. Вычисление значения интеграла:

$$A \cdot \frac{n_s}{N} - 1 = 0.037 \quad A \cdot \frac{n_s}{N} = 1.037$$

9. 10. Вычисление интеграла в соответствии с (1.6.31):

$$(X_{\max} - X_{\min}) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) = 0.995$$

$$(X_{\max} - X_{\min}) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) - 1 = 0 - 4.972 \times 10^{-3}$$



Лекция № 7

Методы обработки экспериментальных данных

План

- ☐ Метод наименьших квадратов.
- ☐ Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратичного трехчлена.
- ☐ Нахождение приближающей функции в виде других элементарных функций.
- ☐ Аппроксимация линейной комбинацией функций.
- ☐ Аппроксимация функцией произвольного вида.

1.7.1. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица некоторой зависимости $f(x)$ (табл. 1.7.1).

Таблица 1.7.1. Исходные данные для нахождения аппроксимирующей функции методом наименьших квадратов

x	x_1	x_2	x_n
$f(x)$	y_1	y_2	y_n

Требуется найти формулу, выражающую данную зависимость аналитически. Один из подходов к решению данной задачи состоит в построении интерполяционного многочлена, значения которого будут в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ совпадать

с соответствующими значениями $f(x)$ из табл. 1.7.1. Однако совпадение значений в узлах может вовсе не означать совпадения характеров исходной и интерполирующей функций. Требование неукоснительного совпадения значений тем более не оправданно, когда значения функций $f(x)$ известны с некоторой погрешностью (рис. 1.7.1).

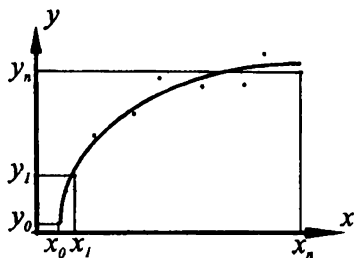


Рис. 1.7.1. К иллюстрации постановки метода наименьших квадратов

Поставим задачу так, чтобы с самого начала обязательно учитывался характер исходной функции: найти функцию заданного вида

$$y = F(x), \quad (1.7.1)$$

которая в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает значения как можно более близкие к табличным значениям $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Следует отметить, что строгая функциональная зависимость для табл. 1.7.1 наблюдается редко, т. к. каждая из входящих в нее величин может зависеть от многих случайных факторов, поэтому обычно используют простые по виду аналитические функции.

Рассмотрим один из наиболее распространенных способов нахождения функции $F(x)$. Предположим, что приближающая функция $F(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет значения:

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n. \quad (1.7.2)$$

Требование близости табличных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ и значений (1.7.2) можно истолковать следующим образом. Будем рассматривать совокупность значений функции $f(x)$ из табл. 1.7.1 и совокупность значений (1.7.2) как координаты двух точек n -мерного пространства. С учетом этого задача приближения функции может быть переформулирована следующим образом: найти такую функцию $F(x)$ заданного вида, чтобы расстояние между точками $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\bar{M}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ было наименьшим. Воспользовавшись метрикой Евклидова пространства, приходим к требованию, чтобы величина

$$\sqrt{(y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \dots + (y_n - \bar{y}_n)^2}, \quad (1.7.3)$$

$$(y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \dots + (y_n - \bar{y}_n)^2 \quad (1.7.4)$$

была наименьшей.

Таблица 1.7.2. Элементарные функции, используемые в методе наименьших квадратов

Вид аппроксимирующей функции	Вид аппроксимирующей функции
$y = ax + b$	$y = \frac{1}{ax + b}$
$y = ax^2 + bx + c$	$y = a \ln x + b$
$y = ax^m$	$y = a \frac{1}{x} + b$
$y = ae^{mx}$	$y = \frac{x}{ax + b}$

Окончательно задача приближения функции $f(x)$ теперь формулируется следующим образом: для функции $f(x)$, заданной табл. 1.7.1, найти функцию $F(x)$ определенного вида так, чтобы сумма квадратов (1.7.4) была наименьшей. Эта задача называется приближением функции методом наименьших квадратов. В качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика функции $f(x)$ часто используют функции, представленные в табл. 1.7.2 (здесь a, m, b — неизвестные параметры).

Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится к отысканию значений параметров.

Рассмотрим метод нахождения параметров приближающей функции в общем виде на примере приближающей функции, зависящей от трех параметров:

$$y = F(x, a, b, c). \quad (1.7.5)$$

Имеем

$$F(x_i, a, b, c) = \bar{y}_i, \quad (1.7.6)$$

Сумма квадратов разностей соответствующих значений функций $f(x)$ и $F(x)$ имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a, b, c))^2 = \Phi(a, b, c). \quad (1.7.7)$$

Сумма является функцией $\Phi(a, b, c)$ трех переменных. Используя необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0,$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_a(x_i, a, b, c) = 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_b(x_i, a, b, c) = 0, \\ \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)] \cdot F'_c(x_i, a, b, c) = 0. \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Решив систему (1.7.8) относительно параметров a, b, c , получаем конкретный вид функции $F(x, a, b, c)$. Изменение количества параметров не приведет к изменению сути самого подхода, а выразится в изменении количества уравнений в системе (1.7.8).

Значения разностей

$$y_i - F(x_i, a, b, c) = \epsilon_i \quad (1.7.9)$$

называют отклонениями измеренных значений от вычисленных по формуле (1.7.5).

Сумма квадратов отклонений

$$\sigma = \sum_i \epsilon_i^2 \quad (1.7.10)$$

в соответствии с принципом наименьших квадратов для заданного вида приближающей функции должна быть наименьшей.

Из двух разных приближений одной и той же табличной функции лучшим считается то, для которого (1.7.10) имеет наименьшее значение.

1.7.2. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратичного трехчлена

Ищем приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, b) = ax + b. \quad (1.7.11)$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 1. \quad (1.7.12)$$

Составляем систему вида (1.7.8):

$$\begin{cases} \sum (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \sum (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

(здесь и далее сумма ведется по переменной $i = 1, 2, \dots, n$).

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0, \\ \sum y_i - a \sum x_i - b n = 0. \end{cases} \quad (1.7.13)$$

Разделив каждое уравнение (1.7.13) на n , получаем:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) \cdot a + \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right) \cdot b = \frac{1}{n} \sum x_i y_i, \\ \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) \cdot a + b = \frac{1}{n} \sum y_i. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum x_i = M_x, \quad \frac{1}{n} \sum y_i = M_y, \\ \frac{1}{n} \sum x_i y_i = M_{xy}, \quad \frac{1}{n} \sum x_i^2 = M_{x^2}. \end{cases}$$

Тогда последняя система будет иметь вид:

$$\begin{cases} M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy}, \\ M_x \cdot a + b = M_y. \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} M_{x^2} & M_x \\ M_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xy} \\ M_y \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{x^2} & M_x \\ M_x & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_{xy} \\ M_y \end{pmatrix}. \quad (1.7.14)$$

Вычислив значения параметров a, b в соответствии с (1.7.14), получаем конкретные значения и, следовательно, конкретный вид линейной функции (1.7.11).

В случае нахождения приближающей функции в форме квадратного трехчлена имеем:

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c. \quad (1.7.15)$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 1.$$

Составляем систему вида (1.7.8):

$$\begin{cases} \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) x_i^2 = 0, \\ \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) x_i = 0, \\ \sum (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sum y_i x_i^2 - a \sum x_i^4 - b \sum x_i^3 - c \sum x_i^2 = 0, \\ \sum y_i x_i - a \sum x_i^3 - b \sum x_i^2 - c \sum x_i = 0, \\ \sum y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i - cn = 0. \end{cases}$$

Разделив каждое уравнение на n и перенеся члены, не содержащие неизвестные параметры, в правую часть, получаем:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum x_i^4 \right) a + \left(\frac{1}{n} \sum x_i^3 \right) b + \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) c = \frac{1}{n} \sum y_i x_i^2, \\ \left(\frac{1}{n} \sum x_i^3 \right) a + \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) b + \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right) c = \frac{1}{n} \sum y_i x_i, \\ \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) a + \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right) b + c = \frac{1}{n} \sum y_i. \end{cases} \quad (1.7.16)$$

Решив систему (1.7.16) относительно неизвестных a, b, c , находим значения параметров приближающей функции.

Пример 1.7.1.

Документ пакета Mathcad, содержащий решение задачи о нахождении линейного и квадратичного трехчленов, состоит из следующих блоков.

1. Задание исходных данных:

$$N := 10$$

$$i := 0..N - 1$$

$$X \min := 0 \quad X \max := 10$$

$$x_i := X \min + \frac{(X \max - X \min)}{N - 1} \cdot i$$

$$y_i := 0.2 \cdot x_i$$

$$y1_i := y_i + (-0.1 + \text{rnd}(0.2))$$

2. Визуализация исходных данных (рис. 1.7.2).

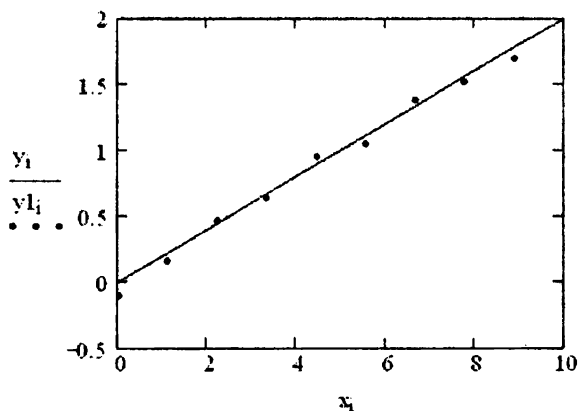


Рис. 1.7.2. График зависимости $y = 0.2x$ и исходные значения, используемые для решения задачи аппроксимации

3. Задание матрицы и столбца свободных членов системы линейных уравнений (1.7.14):

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2 & \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i & 1 \end{bmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y1_i \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y1_i \end{pmatrix}$$

4. Решение системы линейных уравнений (1.7.14):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot d \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.03 \end{pmatrix}$$

5. Вычисление суммы квадратов отклонений измеренных значений от вычисленных:

$$\sum_{i=0}^{N-1} [y_{1i} - (a \cdot x_i + b)]^2 = 0.028$$

6. Нахождение коэффициентов линейной функции встроенными функциями пакета Mathcad:

$$\text{slope}(x, y1) = 0.2$$

$$\text{intercept}(x, y1) = -0.030368$$

7. Задание матрицы и столбца свободных членов системы линейных уравнений (1.7.16):

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^4 & \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^3 & \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2 \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^3 & \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2 & \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2 & \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i & 1 \end{bmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x_i)^2 \cdot y_{1i} \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{1i} \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_{1i} \end{pmatrix}$$

8. Решение системы линейных уравнений (1.7.16):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot d \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.049 \times 10^{-3} \\ 0.24 \\ -0.09 \end{pmatrix}$$

9. Вычисление отклонений измеренных значений от вычисленных:

$$\sum_{i=0}^{N-1} [y_{1i} - [a \cdot (x_i)^2 + b \cdot x_i + c]]^2 = 0.015$$

10. Нахождение коэффициентов квадратичной функции встроенными функциями пакета Mathcad:

$$vs := \text{regress}(x, y1, 2) \quad vs = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -0.09 \\ 0.24 \\ 4.049 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

(отметим, что помимо значений полинома функция `regress()` возвращает значения переменных, необходимых функции `interp()`, для вычисления значения аппроксимирующей функции).

11. Построение графика аппроксимирующей функции (рис. 1.7.3)

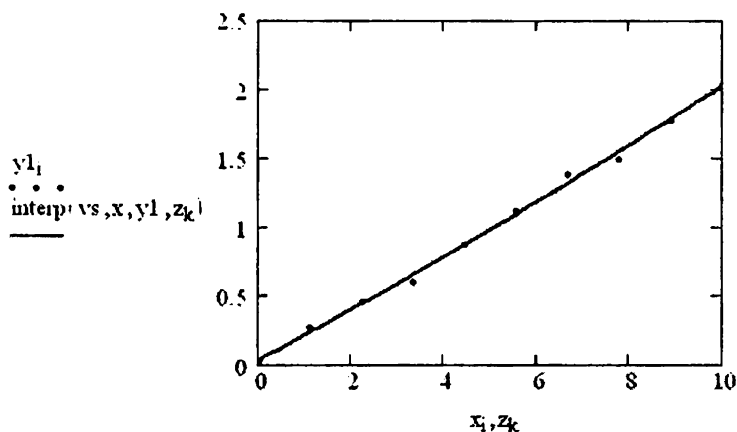


Рис. 1.7.3. График аппроксимирующей функции вида $y(x) = ax^2 + bx + c$, коэффициенты которой найдены функцией `regress()`

1.7.3. Нахождение приближающей функции в виде элементарных функций

Покажем, что задача нахождения приближающей функции, зависящей от двух параметров, может быть сведена к нахождению параметров линейной функции.

Степенная функция (геометрическая регрессия)

Рассмотрим степенную функцию, которая в наиболее общем виде задается следующим выражением:

$$F(x, a, m) = ax^m. \quad (1.7.17)$$

Предполагая, что в табл. 1.7.1 все значения аргумента и значения функции положительны, прологарифмируем (1.7.17) при условии, что $a > 0$:

$$\ln F = \ln a + m \ln x. \quad (1.7.18)$$

Так как функция F является приближающей для функции f , функция $\ln F$ будет приближающей для функции $\ln f$. Введем новую переменную $u = \ln x$; тогда, как следует из (1.7.18), $\ln F$ будет функцией от u : $\Phi(u)$.

Обозначим

$$m = A, \ln a = B, \quad (1.7.19)$$

тогда (1.7.18) принимает вид:

$$\Phi(x, A, B) = Au + B, \quad (1.7.20)$$

т. е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной.

На практике для нахождения приближающей функции в виде степенной используют следующий алгоритм.

1. Составляют по заданной табл. 1.7.1 новую таблицу, прологарифмировав значения x, y в исходной таблице.
2. Находят по новой таблице параметры A и B приближающей функции вида (1.7.20).
3. Находят в соответствии с (1.7.19) значения параметров a, m .

Показательная функция

Рассмотрим показательную функцию, которая в наиболее общем виде задается следующим выражением

$$F(x, a, m) = ae^{mx}, \quad a > 0. \quad (1.7.21)$$

Прологарифмировав равенство (1.7.21), получим:

$$\Phi(x, A, B) = Ax + B. \quad (1.7.22)$$

Таким образом, задача сведена к предыдущей.

Дробно-линейная функция

Рассмотрим дробно-линейную функцию, которая в наиболее общем виде задается следующим выражением

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b}. \quad (1.7.23)$$

Перепишем (1.7.23) следующим образом:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b.$$

Из последнего равенства следует, что надо составить новую таблицу, заменив в ней значения функции обратными числами. Используя новую таблицу, найти a, b и подставить найденные значения параметров в (1.7.23).

Логарифмическая функция

Рассмотрим логарифмическую функцию, которая в наиболее общем виде задается следующим выражением

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b. \quad (1.7.24)$$

Из (1.7.24) видно, что для перехода к линейной функции достаточно сделать подстановку $\ln x = u$. Следовательно, для нахождения значений a, b нужно прологарифмировать значения аргумента в исходной таблице (табл. 1.7.1) и, рассматривая полученные значения в совокупности с исходными значениями функции, найти для новой таблицы приближающую функцию в виде линейной. Коэффициенты a, b найденной функции подставить в (1.7.24).

Гипербола

Рассмотрим гиперболическую функцию, которая в наиболее общем виде задается следующим выражением

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b. \quad (1.7.25)$$

Для перехода к линейной функции достаточно сделать подстановку $u = 1/x$:

$$F(u, a, b) = au + b. \quad (1.7.26)$$

Далее заменить значения аргумента обратными числами и найти для новой таблицы приближающую функцию линейного вида (1.7.26). Полученные значения параметров подставить в (1.7.25).

Дробно-рациональная функция

Рассмотрим дробно-рациональную функцию, которая в наиболее общем виде задается следующим выражением

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b}. \quad (1.7.27)$$

Перепишем (1.7.27) следующим образом:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = a + \frac{b}{x}. \quad (1.7.28)$$

Из (1.7.28) видно, что задача сводится к задаче, рассмотренной в предыдущем разделе. Действительно, если в исходной таблице заменить значения x, y их обратными величинами по формулам $z = 1/x$, $u = 1/y$ и искать для новой таблицы приближающую функцию вида $u = bz + a$, то найденные значения будут искомыми для функции (1.7.27).

1.7.4. Аппроксимация линейной комбинацией функций

Будем искать аппроксимирующую функцию $F(x)$ в виде линейной комбинации известных функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$:

$$F(x) = a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x) + c \cdot f_3(x). \quad (1.7.29)$$

Подставив (1.7.29) в (1.7.8) и выполнив очевидные алгебраические преобразования, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов a, b, c :

$$\begin{pmatrix} \sum f_1(x_i)^2 & \sum f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum f_1(x_i)f_3(x_i) \\ \sum f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum f_2(x_i)^2 & \sum f_2(x_i)f_3(x_i) \\ \sum f_1(x_i)f_3(x_i) & \sum f_2(x_i)f_3(x_i) & \sum f_3(x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i f_1(x_i) \\ \sum y_i f_2(x_i) \\ \sum y_i f_3(x_i) \end{pmatrix}. \quad (1.7.30)$$

Решив систему линейных уравнений (1.7.30) любым известным способом, находим значение коэффициентов a, b, c и тем самым аналитическое выражение для аппроксимирующей функции.

Для решения системы линейных уравнений метода наименьших квадратов при использовании аппроксимации линейной комбинацией известных функций в пакете Mathcad используется функция `linfit()`, возвращающая значения искомых коэффициентов.

Пример 1.7.2.

Использование функции `linfit()` для нахождения коэффициентов аппроксимирующей функции вида $F(x, a, b, c) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1/(x+1)$.

1. Задание исходных данных:

$$vx := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.22 \\ 0.8 \\ 0.12 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Задание вектор-функции, возвращающей значения функций $f_i(x)$:

$$F(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ \frac{1}{x+1} \end{pmatrix}$$

3. Решение системы линейных уравнений (1.7.30):

$$S := \text{linfit}(vx, vy, F)$$

$$S = \begin{pmatrix} 3.052 \\ -1.439 \\ 0.513 \end{pmatrix}$$

4. Задание аппроксимирующей функции:

$$g(t) := F(t) \cdot s$$

5. Задание координатной сетки для построения графика аппроксимирующей функции:

$$Np := 200 \quad i := 0..Np$$

$$x_i := vx_0 + \frac{vx_5 - vx_0}{Np} \cdot i$$

6. Построение графика аппроксимирующей функции (рис. 1.7.4).

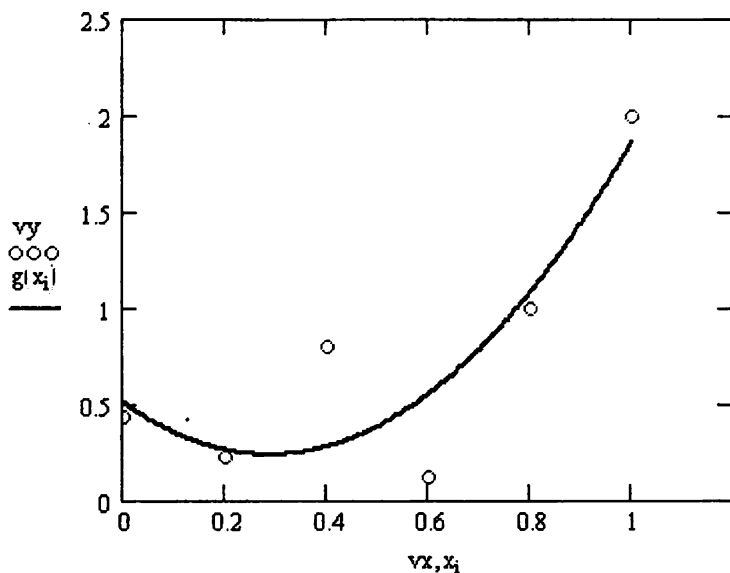


Рис. 1.7.4. График аппроксимирующей функции вида

$$F(x, a, b, c) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1/(x+1),$$

коэффициенты которой найдены с помощью функции `linfit()`

1.7.5. Аппроксимация функцией произвольного вида

В общем случае в методе наименьших квадратов приходится решать систему нелинейных уравнений типа (1.7.8). Для этого в пакете Mathcad используется функция `genfit()`, возвращающая значения искомых коэффициентов.

Пример 1.7.3.

Продemonстрируем использование функции `genfit()` на примере функции $F(x, a, b, c) = \exp(a + b \cdot x + c \cdot x^2)$.

1. Задание исходных данных:

$$vx := \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 1 \\ 1.4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 9.4 \\ 11.2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

2. Задание вектор-функции, возвращающей значения аппроксимирующей функции и ее частных производных по соответствующим параметрам:

$$F(x, u) := \begin{pmatrix} e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 \cdot x^2} \\ e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 \cdot x^2} \\ x \cdot e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 \cdot x^2} \\ x^2 \cdot e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 \cdot x^2} \end{pmatrix}$$

3. Задание начального приближения:

$$vg := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Решение системы нелинейных уравнений:

$$P := \text{genfit}(vx, vy, vg, F)$$

$$P = \begin{pmatrix} 2.575 \\ -0.821 \\ 0.055 \end{pmatrix}$$

5. Задание аппроксимирующей функции:

$$g(t) := F(t, P)_0$$

6. Задание координатной сетки для построения графика аппроксимирующей функции:

$$Np := 200 \quad i := 0..Np$$

$$x_i := vx_0 + \frac{vx_5 - vx_0}{Np} \cdot i$$

7. Построение графика аппроксимирующей функции (рис. 1.7.5).

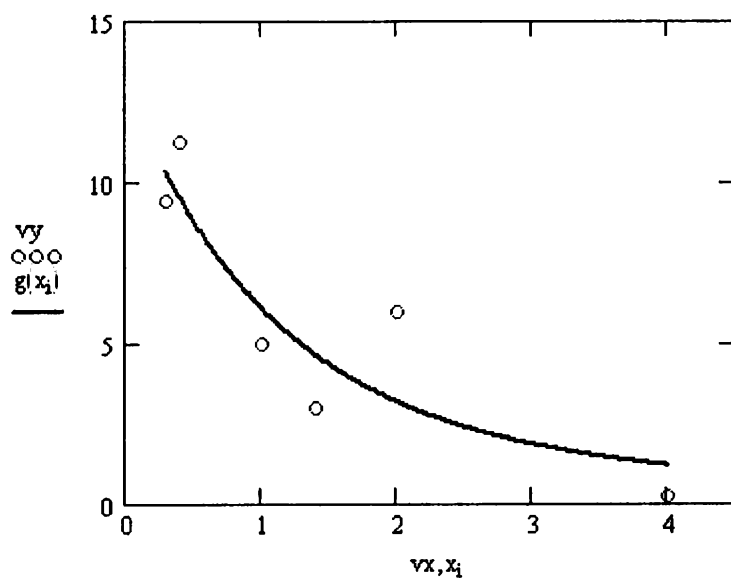
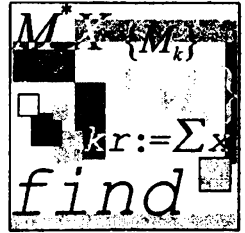


Рис. 1.7.5. График аппроксимирующей функции вида

$$F(x, a, b, c) = \exp(a + b \cdot x + c \cdot x^2),$$

коэффициенты которой найдены с помощью функции `genfit()`



Лекция № 8

Преобразование Фурье

План

- ☐ Разложение периодических функций в ряд Фурье.
- ☐ Эффект Гиббса.
- ☐ Спектральный анализ дискретных функций конечной длительности.
- ☐ Быстрое преобразование Фурье.

1.8.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье

По определению *периодической функции* называют функцию, отвечающую условию:

$$s(t) = s(t + nT), \quad (1.8.1)$$

где T — период функции; $n = 1, 2, \dots$

Для нахождения спектрального разложения функции $s(t)$ введем в рассмотрение следующие наборы функций:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right), \dots, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \dots \\ & \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right), \dots, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \dots \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

Любая из функций (1.8.2), которую для краткости обозначим $u_m(t)$, удовлетворяет условию периодичности (1.8.1).

Рассмотрим три следующие интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi mt/T) \cos(2\pi nt/T) dt &= \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \neq 0, \\ 2, m = n = 0 \end{cases} \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi mt/T) \sin(2\pi nt/T) dt &= 0, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi mt/T) \sin(2\pi nt/T) dt &= \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \neq 0. \\ 0, m = n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Функции, удовлетворяющие условию (1.8.3), называются *ортogonalными*, а систему функций (1.8.2) называют *ортонормированным базисом*, образованным гармоническими функциями с кратными частотами. Условие ортогональности можно записать в компактной форме, используя символ Кронекера:

$$\int_0^T u_i(t) u_k(t) dt = \delta_{ik}, \quad (1.8.4)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Разложим произвольную периодическую функцию $s(t)$ в ряд:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t). \quad (1.8.5)$$

Представление (1.8.5) называется обобщенным рядом Фурье функции $s(t)$ в выбранном базисе.

Коэффициенты данного ряда находятся умножением (1.8.5) на базисную функцию $u_k(t)$ и интегрированием по периоду функции $s(t)$:

$$\int_0^T s(t) u_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_0^T u_i u_k dt. \quad (1.8.6)$$

Откуда, используя свойство ортонормированности (1.8.4), найдем

$$c_k = \int_0^T s(t) u_k(t) dt. \quad (1.8.7)$$

Подставляя в (1.8.7) набор функций (1.8.2), найдем значения коэффициентов ряда:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi n/T) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi n/T) dt. \quad (1.8.8)$$

Введя основную частоту $\omega = 2\pi/T$ последовательности, образующей периодическую функцию $s(t)$, запишем ряд Фурье для периодического сигнала:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)). \quad (1.8.9)$$

Анализ (1.8.9) показывает, что функция $s(t)$ содержит не зависящую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых гармоник, с частотами $\omega_n = n\omega$ ($n = 1, 2, \dots$), кратными основной частоте последовательности. Можно показать, что имеет место равенство:

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2 + b_k^2]. \quad (1.8.10)$$

Если записать коэффициенты ряда Фурье в виде:

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n,$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n},$$

то получим эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n). \quad (1.8.11)$$

Спектральное разложение периодической функции $s(t)$ можно выполнить, используя систему базисных функций в виде экспонент с мнимыми показателями:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(ik\omega t)}{\sqrt{T}} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.8.12)$$

которые, как легко убедиться, вычислив интеграл

$$\int_0^T u_m u_k^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{imt} e^{-ikt} dt = \delta_{mk},$$

являются ортогональными (здесь знак * означает комплексное сопряжение).

Ряд Фурье в данном случае принимает вид:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1.8.13)$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (1.8.14)$$

На практике принято использовать и другую форму записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}, \quad (1.8.15)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (1.8.16)$$

Выражения (1.8.13)—(1.8.16) представляют собой ряд Фурье в комплексной форме. Спектр функции $s(t)$ в соответствии с формулами (1.8.15), (1.8.16) содержит компоненты на отрицательной полуоси частот, причем $C_{-n} = C_n^*$, поэтому слагаемые с положительными и отрицательными частотами объединяются в пары, например:

$$C_n e^{in\omega t} + C_{-n} e^{-in\omega t} = |C_n| e^{i(n\omega t + \varphi_n)} + |C_n| e^{-i(n\omega t + \varphi_n)} = 2|C_n| \cos(n\omega t - \varphi_n).$$

Таким образом, отрицательная частота является не физическим, а математическим понятием, вытекающим из способа представления комплексных чисел.

Отметим, что в технической литературе, посвященной анализу сигналов, задачу вычисления коэффициентов разложения функции в ряд Фурье называют *задачей анализа*, а задачу восстановления функции по известным коэффициентам ряда Фурье — *задачей синтеза*.

1.8.2. Эффект Гиббса

Эффект Гиббса возникает при разложении в ряд Фурье разрывных функций. Изучим основные его проявления на примере разложения прямоугольной импульсной функции

$$s(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq t \leq T/2, \\ -1/2, & T/2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

которая имеет скачок, равный 1 в точке разрыва $T/2$. Формальное разложение в ряд Фурье находится подстановкой функции $s(t)$ в формулы (1.8.8), вычислением интегралов, которые оказываются равными

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \frac{[1 + (-1)^{k+1}]}{k} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k}, & k \text{ — четное,} \\ 0, & k \text{ — нечетное} \end{cases}$$

и подстановкой выражений для коэффициентов в (1.8.9):

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{T}3t\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{T}5t\right) + \dots \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k+1)t\right). \end{aligned}$$

Использование конечного числа членов ряда приводит к тому, что частичные суммы ряда являются функциями, в которых присутствуют периодические составляющие. Их период равен периоду последнего удержанного члена или первого оставленного.

К. Ланцош предложил способ уменьшения эффекта пульсаций за счет сглаживания усеченного ряда

$$s_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) \quad (1.8.17)$$

интегрированием (усреднением) по периоду последнего оставленного члена.

При выборе в качестве интервала сглаживания периода последнего члена усеченного ряда Фурье сглаженное значение $h_N(t)$ получим как среднее от $s_N(t)$:

$$h_N(t) = \frac{1}{T/N} \int_{t-(T/2N)}^{t+(T/2N)} s_N(\xi) d\xi \quad (1.8.18)$$

(отметим, что на практике N берется как номер первого отбрасываемого члена ряда).

Подставляя (1.8.17) в (1.8.18), получим:

$$\begin{aligned} h_N(t) &= \frac{N}{T} \int_{t-(T/2N)}^{t+(T/2N)} \frac{a_0}{2} d\xi + \\ &+ \frac{N}{T} \sum_{k=1}^N \left[a_k \int_{t-(T/2N)}^{t+(T/2N)} \cos\left(\frac{2\pi k}{T}\xi\right) d\xi + b_k \int_{t-(T/2N)}^{t+(T/2N)} \sin\left(\frac{2\pi k}{T}\xi\right) d\xi \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{N}{T} \sum_{k=1}^N \left[a_k \left\{ \frac{\sin \left[2\pi k/T (t + T/2N) \right] - \sin \left[2\pi k/T (t - T/2N) \right]}{2\pi k/T} \right\} - \right. \\ \left. - b_k \left\{ \frac{\cos \left[2\pi k/T (t + T/2N) \right] - \cos \left[2\pi k/T (t - T/2N) \right]}{2\pi k/T} \right\} \right].$$

Применяя известные тригонометрические формулы, окончательно получаем:

$$h_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \sigma(N, k) \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right], \quad (1.8.19)$$

где $\sigma(N, k)$ — так называемые сигма-факторы:

$$\sigma(N, k) = \frac{\sin(\pi k/N)}{\pi k/N}. \quad (1.8.20)$$

Таким образом, сглаженный ряд Фурье есть исходный ряд Фурье с коэффициентами, умноженными на соответствующие сигма-факторы. Отметим, что эффект сглаживания достигается за счет того, что при $k = N$ сигма-фактор N -го члена оказывается равным нулю.

С физической точки зрения формулу (1.8.19) можно трактовать как наблюдение исходной функции $s_N(t)$ через узкое просвечивающее прямоугольное окно шириной T/N . Наблюдаемая функция $h_N(t)$ есть средняя интенсивность света от исходной функции $s_N(t)$. Она оказывается более яркой, когда функция $s_N(t)$ больше, и менее яркой, когда функция меньше.

Пример 1.8.1.

Исследование эффекта Гиббса в пакете Mathcad.

1. Задание функций, возвращающих значения коэффициентов разложения функции в ряд Фурье:

$$A(k, f, T) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t, T) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T} \cdot t\right) dt$$

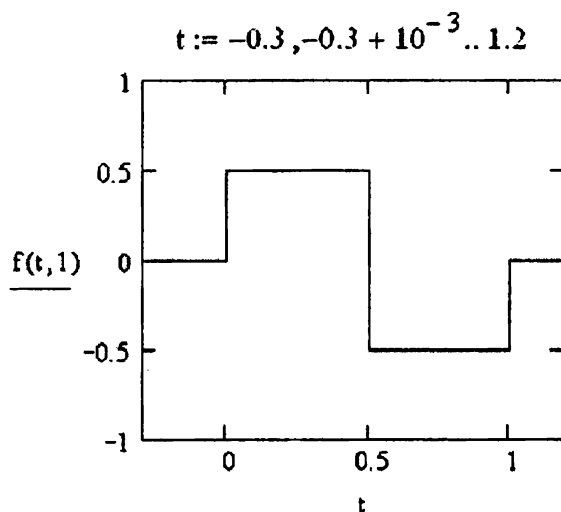
$$B(k, f, T) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t, T) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T} \cdot t\right) dt$$

2. Задание анализируемой функции (рис. 1.8.1)

$$f(t,T) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \text{otherwise} & \\ \frac{-1}{2} & \text{if } \frac{T}{2} < t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 1.8.1. Задание анализируемой функции $f(x)$ (файл f.mcd)

3. Построение графика исходной функции (рис. 1.8.2).

Рис. 1.8.2. График функции $s(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -1/2, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$

4. Вычисление коэффициентов разложения функции в ряд Фурье:

$$Nf := 20 \quad T := 1$$

$$k := 0..Nf$$

$$a_k := A(k, f, T)$$

$$i := 1..Nf$$

$$b_i := B(i, f, T)$$

5. Визуализация модуля коэффициентов разложения прямоугольного импульса в ряд Фурье (рис. 1.8.3).

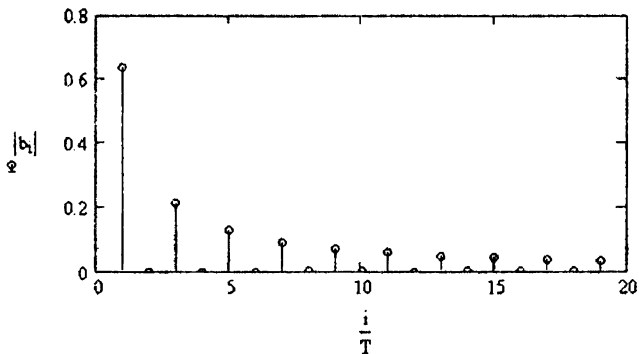


Рис. 1.8.3. Зависимость коэффициентов разложения прямоугольного импульса в ряд Фурье от номера члена ряда

6. Задание функции, описывающей ряд Фурье:

$$s(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_i \left(a_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot i \cdot t\right) + b_i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot i \cdot t\right) \right)$$

7. Вычисление значений усеченного ряда Фурье:

$$Np := 1000 \quad k := 0..Np$$

$$t1_k := \frac{T}{Np} \cdot k$$

$$S_k := s(t1_k)$$

8. Визуализация усеченного ряда Фурье (рис. 1.8.4).

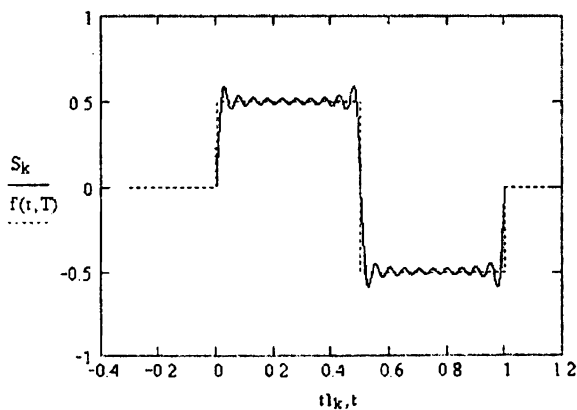


Рис. 1.8.4. Частичная сумма ряда Фурье

1.8.3. Спектральный анализ дискретных функций конечной длительности

Рассмотрим особенности спектрального представления дискретной функции, заданной на временном интервале конечной длительности $[0, T]$ N отсчетами $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}$, взятыми соответственно в моменты времени $0, \Delta, 2\Delta, \dots, (N-1)\Delta$. Полное число отсчетов $N = T/\Delta$.

Можно показать, что для дискретной последовательности коэффициенты ряда Фурье определяются формулой:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-i2\pi nk/N}. \quad (1.8.21)$$

Формула (1.8.21) определяет последовательность коэффициентов, образующих дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое имеет следующие свойства.

1. ДПФ есть линейное преобразование.
2. Число коэффициентов $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$, вычисляемых в соответствии с (1.8.21), равно числу отсчетов дискретной последовательности.
3. Коэффициент C_0 (постоянная составляющая) есть среднее значение дискретной последовательности.
4. Если N — четное число, то

$$C_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k s_k.$$

Для вещественной дискретной последовательности коэффициенты ДПФ, номера которых расположены симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары:

$$C_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-i2\pi(N-n)k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{i2\pi nk/N} = C_n^*,$$

поэтому можно считать, что коэффициенты $C_{N/2+1}, \dots, C_{N-1}$ отвечают отрицательным частотам.

Если для дискретной последовательности $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{N-1}$ найдены коэффициенты ДПФ $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$, то восстановление исходной дискретной последовательности может быть осуществлено по формуле:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{i2\pi nk/N}. \quad (1.8.22)$$

1.8.4. Быстрое преобразование Фурье

Из формул (1.8.21) и (1.8.22) видно, что для вычисления ДПФ или обратного ДПФ последовательности из N элементов требуется выполнить N^2 операций с комплексными числами. Если число элементов обрабатываемых массивов порядка тысячи и более, то время, необходимое на выполнение этих преобразований, резко возрастает и теряется возможность обработки сигналов в реальном масштабе времени.

В 60-е годы Кули и Тьюки был предложен метод вычисления коэффициентов Фурье, позволивший снизить объем вычислений до $N \log_2 N$ операций. Он получил название алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). В настоящее время процедуры, реализующие алгоритм БПФ, входят во все математические библиотеки, используемые при написании программ на языках программирования высокого уровня и специализированные пакеты для математических вычислений. В связи с тем, что подробное рассмотрение алгоритма выходит за рамки нашей книги, мы рассмотрим только основную идею БПФ для случая, когда число отсчетов $N = 2^p$, где p — целое число.

Разобьем входную последовательность $\{s_k\}$ на две части с четными и нечетными номерами:

$$\{s_k\}_E = \{s_{2k}\}, \{s_k\}_O = \{s_{2k+1}\}, \quad (1.8.23)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Это позволяет представить n -й коэффициент ДПФ в виде:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} \left(s_{2k} e^{-i \frac{2\pi n}{N} 2k} + s_{2k+1} e^{-i \frac{2\pi n}{N} (2k+1)} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} s_{2kE} e^{-i \frac{2\pi n}{N/2} k} + e^{-i \frac{2\pi n}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} s_{2k+1O} e^{-i \frac{2\pi n}{N/2} k} \right). \end{aligned} \quad (1.8.24)$$

Из (1.8.24) видно, что первая половина коэффициентов ДПФ исходного сигнала с номерами от 0 до $N/2 - 1$ выражается через коэффициенты ДПФ двух частных последовательностей:

$$C_n = C_{nE} + e^{-i \frac{2\pi n}{N}} C_{nO}, \quad (1.8.25)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Так как последовательности коэффициентов массивов $\{s_k\}_E$ и $\{s_k\}_O$ являются периодическими с периодом $N/2$, то

$$C_{nE} = C_{n+N/2E}, \quad C_{nO} = C_{n+N/2O}. \quad (1.8.26)$$

Подставляя (1.8.26) в (1.8.25) и учитывая, что

$$e^{-i\frac{2\pi(n+N/2)}{N}} = e^{-i\pi} e^{-i\frac{2\pi n}{N}} = -e^{-i\frac{2\pi n}{N}}, \quad (1.8.27)$$

получаем выражение для второй половины множества коэффициентов ДПФ:

$$C_{n+N/2} = C_{nE} - e^{-i\frac{2\pi n}{N}} C_{nO}, \quad (1.8.28)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Формулы (1.8.26), (1.8.28) лежат в основе алгоритма БПФ: последовательности отсчетов с четными и нечетными номерами вновь разбиваются на две части. Процесс продолжается до тех пор, пока не получится последовательность, состоящая из одного элемента. ДПФ данной последовательности совпадет с самим элементом. Затем последовательно находятся коэффициенты ДПФ предыдущих последовательностей.

В пакет Mathcad входят четыре типа функций, выполняющих прямое и обратное БПФ: `fft/iff`, `cfft/icfft`, `FFT/IFFT`, `CFFT/ICFFT`. Функции `fft/iff`, `FFT/IFFT` используют для действительных последовательностей, число элементов которых равно 2^m (m — натуральное число). Первое условие является следствием того, что вторая половина коэффициентов ДПФ вещественных последовательностей является комплексно сопряженной с первой. Это позволяет при выполнении вычислений сохранять только вторую половину вектора, хранящего коэффициенты ДПФ, экономя при этом память компьютера и сокращая время вычислений. Второе требование предъявляется в связи с тем, что для вычисления спектра используется алгоритм БПФ, пригодный только для последовательностей, число членов которых кратно степени 2.

Обращение к функциям.

- `fft(v)` — возвращает дискретное преобразование Фурье 2^m -мерного вещественнозначного вектора, аргумент которого есть результат дискретизации через равные промежутки времени некоторой функции. Результат работы программы — комплексный вектор размерности $2^{m-1} + 1$. Элементы вектора, возвращаемого функцией `fft`, вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{i2\pi nk/N},$$

где N — число элементов вектора v .

- $\text{ifft}(v)$ — обратное дискретное преобразование Фурье, комплексного вектора, содержащего значения ДПФ. Вектор v должен иметь $2^m + 1$ элементов. Результат работы программы — действительный вектор размерности 2^{m+1} . Элементы вектора, возвращаемого функцией ifft , вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{-i2\pi nk/N},$$

где N — число элементов вектора v . Отметим, что для всех вещественнозначных векторов справедливо соотношение $\text{ifft}(\text{fft}(v)) = v$.

- $\text{FFT}(v)$ — возвращает дискретное преобразование Фурье 2^m -мерного вещественнозначного вектора, аргумент которого есть результат дискретизации через равные промежутки времени некоторой функции. Результат работы программы — комплексный вектор размерности $2^{m-1} + 1$. Элементы вектора, возвращаемого функцией FFT , вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{-i2\pi nk/N},$$

где N — число элементов вектора v .

- $\text{IFFT}(v)$ — возвращает обратное дискретное преобразование Фурье комплексного вектора, содержащего значения ДПФ. Вектор v должен иметь $2^m + 1$ элементов. Результат работы программы — действительный вектор размерности $2^m + 1$. Элементы вектора, возвращаемого функцией IFFT , вычисляются по формуле:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{i2\pi nk/N},$$

где N — число элементов вектора v . Отметим, что для всех вещественнозначных векторов справедливо соотношение $\text{ifft}(\text{fft}(v)) = v$.

Функции cfft/icfft , cFFT/ICFFT используются в том случае, если:

- данные содержащиеся в векторе v , комплексные;
 - вектор v имеет размерность, отличную от 2^m .
- $\text{cfft}(v)$, $\text{cFFT}(v)$ — возвращает дискретное преобразование Фурье комплексного или вещественнозначного вектора, число элементов которого отлично от 2^m . Возвращаемый массив имеет тот же самый размер, что исходный вектор.

- $\text{icfft}(v)$, $\text{ICFFT}(v)$ — возвращает обратное дискретное преобразование Фурье. Возвращаемый массив имеет тот же самый размер, что исходный вектор.

Функции $\text{cfft}(v)$, $\text{CFFT}(v)$ и $\text{icfft}(v)$, $\text{ICFFT}(v)$ взаимно обратные друг другу, т. е. $\text{icfft}(\text{cfft}(v)) = v$, $\text{ICFFT}(\text{CFFT}(v)) = v$.

При использовании в качестве аргументов функции $\text{cfft}(v)$, $\text{CFFT}(v)$ матриц данные функции возвращают результат двумерного преобразования Фурье исходной матрицы.

Пример 1.8.2.

Вычисление спектра периодической функции:

$$s(t) = A \sin(2\pi f_s t) + B \sin(2\pi F_s t),$$

где $A = 3$; $B = 7$; $f_s = 10$ Гц; $F_s = 25$ Гц, заданной дискретными значениями в $N = 2^{12}$ точках на интервале $[0, 2]$ с.

1. Задание временной сетки:

$$N := 2^{12}$$

$$i := 0..N - 1$$

$$T1 := 0 \quad T2 := 2$$

$$\Delta := \frac{T2 - T1}{N}$$

$$t_i := \Delta \cdot i$$

2. Задание функции $s(t)$:

$$A := 3 \quad B := 7$$

$$f_s := 10 \quad F_s := 25$$

$$s(t) := A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t) + B \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_s \cdot t)$$

3. Вычисление мгновенных значений функции:

$$v_i := s(t_i)$$

4. Вычисление преобразования Фурье дискретной последовательности:

$$c := \text{FFT}(v)$$

5. Вычисление частот спектральных гармоник (в Гц):

$$k := 1.. \frac{N}{5}$$

$$f_k := \frac{k}{N \cdot \Delta}$$

6. Визуализация модуля спектра функции $s(t)$ (рис. 1.8.5).

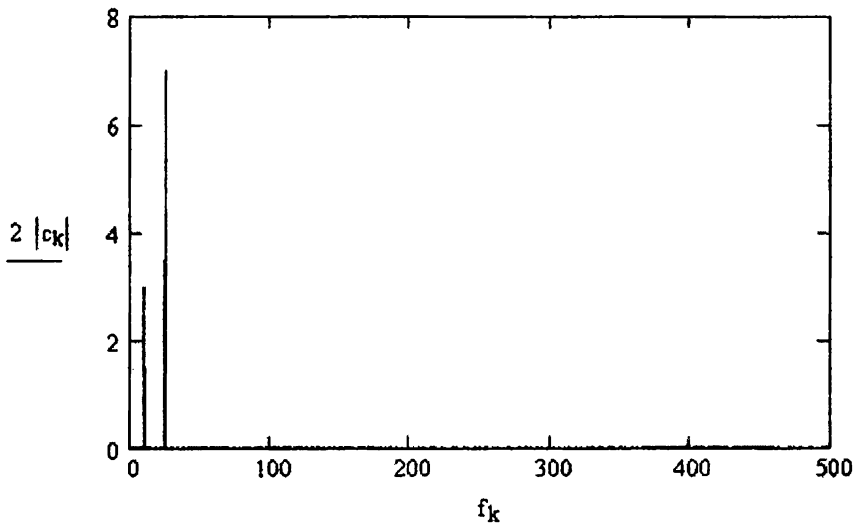
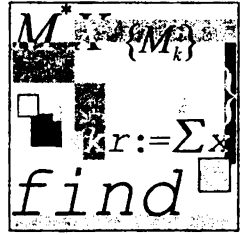


Рис. 1.8.5. Спектр мощности дискретной последовательности



Лекция № 9

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

План

- ☐ Постановка задачи.
- ☐ Метод Пикара.
- ☐ Метод Эйлера.
- ☐ Метод Рунге—Кутты.

1.9.1. Постановка задачи

Определение 1.9.1. Дифференциальным уравнением (ДУ) первого порядка называют соотношение вида:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1.9.1)$$

Определение 1.9.2. Дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.9.2)$$

где $f(x, y)$ — заданная функция двух переменных, называется ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной.

Определение 1.9.3. Решением ДУ на интервале I называется непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, превращающая уравнение в тождество на интервале I .

Для ДУ первого порядка (1.9.1), (1.9.2), по определению, получаем:

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0, \quad (1.9.3)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)). \quad (1.9.4)$$

Определение 1.9.4. Соотношение (1.9.3) называется решением ДУ (1.9.4) в неявной форме (или интегралом уравнения (1.9.2)), если оно определяет y как функцию от x : $y = \varphi(x)$, которая есть решение ДУ (1.9.2).

Определение 1.9.5. График решения $y = \varphi(x)$ ДУ (1.9.2) называется интегральной кривой данного уравнения.

Определение 1.9.6. Проекция графика решения на ось ординат называется фазовой кривой или траекторией ДУ.

Определение 1.9.7. Задача о нахождении решения $y = \varphi(x)$ ДУ (1.9.2), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Определение 1.9.8. Через каждую точку (x, y) из области определения уравнения (1.9.2) проведем прямую, тангенс угла которой к оси абсцисс равен $f(x, y)$. Данное семейство прямых называется полем направлений, соответствующим ДУ (1.9.2) (или полем направлений функции $f(x, y)$).

Интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений функции $f(x, y)$.

Существование и единственность задачи Коши ДУ (1.9.1), (1.9.2) обеспечивается теоремой Пикара.

Теорема Пикара. Если функция f определена и непрерывна в некоторой области G , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad (1.9.5)$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|, \quad (1.9.6)$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| \leq h$, где h — положительное число, существует, и притом только одно, решение $y = y(x)$ ДУ (1.9.2), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$.

Здесь M — константа Липшица, зависящая в общем случае от a и b . Если $f(x, y)$ имеет в G ограниченную производную $f'_y(x, y)$, то при $(x, y) \in G$ можно принять

$$M = \max |f'_y(x)|. \quad (1.9.7)$$

Определение 1.9.9. ДУ n -го порядка называют соотношением вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.9.8)$$

x — независимая переменная; $y = y(x)$ неизвестная функция аргумента x ; $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)})$ — заданная функция переменных $x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}$.

Определение 1.9.10. Задача о нахождении решения ДУ (1.9.8), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.9.9)$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, называется задачей Коши для системы ДУ.

ДУ n -го порядка заменой

$$\begin{aligned} y' &= z_1, \\ y'' &= z_2, \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

$$y^{(n-1)} = z_{n-1}$$

сводится к системе ДУ первого порядка:

$$\begin{aligned} y' &= z_1, \\ y'' &= z_2, \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

$$y^{(n-1)} = z_{n-1}$$

$$z' = f(x, y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}).$$

Например, ДУ второго порядка

$$y'' = -\omega^2 y \quad (1.9.12)$$

можно записать в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned}y' &= z, \\z' &= -\omega^2 y.\end{aligned}\tag{1.9.13}$$

Методы решений ДУ подразделяются на три основные группы.

1. Аналитические методы.
2. Графические методы.
3. Численные методы.

1.9.2. Метод Пикара

Метод Пикара позволяет получить приближенное решение ДУ (1.9.2) в виде функции, заданной аналитически.

Пусть в условиях теоремы существования требуется найти решения (1.9.2) с начальным условием $y_0 = y(x_0)$. Запишем ДУ (1.9.1) в следующем эквивалентном виде:

$$dy = f(x, y)dx.\tag{1.9.14}$$

Проинтегрируем обе части (1.9.14) от x_0 до x :

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y)dx\tag{1.9.15}$$

Вычислив интеграл в правой части, получим:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx.\tag{1.9.16}$$

Очевидно, что решение интегрального уравнения (1.9.16) будет удовлетворять ДУ (1.9.2) и начальному условию $y_0 = y(x_0)$. Действительно, при $x = x_0$ получим:

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y)dx = y_0.$$

Интегральное уравнение (1.9.16) позволяет использовать метод последовательных приближений. Положим $y = y_0$ и получим из (1.9.16) первое приближение:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0)dx.\tag{1.9.17}$$

Интеграл, стоящий в правой части (1.9.17), содержит только переменную x , после нахождения этого интеграла будет получено аналитическое выражение приближения y_1 как функции переменной x . Заменим теперь в уравнении (1.9.16) y найденным значением $y_1(x)$ и получим второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \quad (1.9.18)$$

и т. д.

В общем случае итерационная формула имеет вид:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.9.19)$$

Последовательное применение формулы (1.9.19) дает последовательность функций:

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \dots \quad (1.9.20)$$

Так как функция f непрерывна в области G , то она ограничена в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку (x_0, y_0) , т. е.

$$|f(x, y)| \leq N. \quad (1.9.21)$$

Применяя к уравнению (1.9.19) принцип сжимающих отображений, можно показать, что последовательность (1.9.20) сходится по метрике $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ в пространстве непрерывных функций φ , определенных на сегменте $|x - x_0| \leq d$, таких что $|\varphi(x) - y_0| \leq Nd$. Предел последовательности является решением интегрального уравнения (1.9.16), а следовательно, и ДУ (1.9.2) с начальными условиями $y_0 = y(x_0)$. Это означает, что k -й член последовательности (1.9.20) является приближением к точному решению ДУ (1.9.2) с определенной степенью точности.

Оценка погрешности k -го приближения дается формулой:

$$|y(x) - y_k(x)| \leq M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (1.9.22)$$

где M — константа Липшица (1.9.7); N — верхняя грань модуля функции f из неравенства (1.9.21), а величина d для определения окрестности $|x - x_0| \leq d$ вычисляется по формуле:

$$d = \min \left(a, \frac{b}{N} \right). \quad (1.9.23)$$

1.9.3. Метод Эйлера

В основе метода Эйлера лежит идея графического построения решения ДУ (рис. 1.9.1).

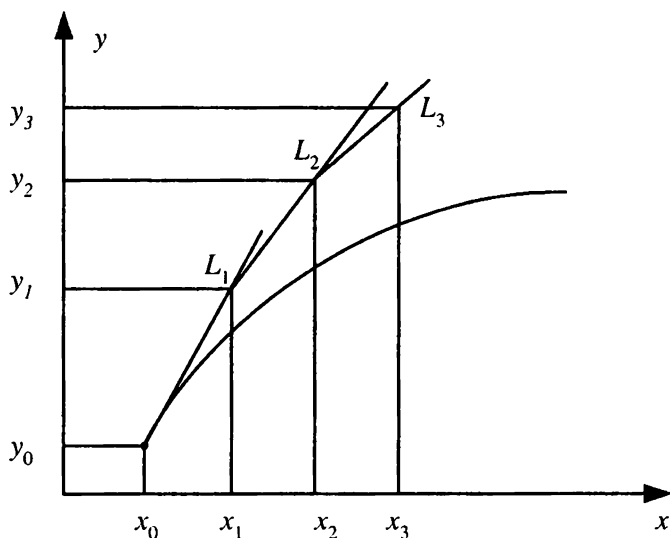


Рис. 1.9.1. К объяснению метода Эйлера

Пусть дано уравнение (1.9.2) с начальным условием $y_0 = y(x_0)$. Выбрав достаточно малый шаг h , построим, начиная с точки x_0 , систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ рассмотрим отрезок касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$, уравнение которой $y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$.

При $x = x_1$ из уравнения касательной получаем $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Следовательно, приращение функции на первом шаге равно $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0)$.

Проведя аналогично касательную к интегральной кривой в точке (x_1, y_1) , получим:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1),$$

что при $x = x_2$ дает $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, т. е. y_2 получается из y_1 добавлением приращения $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1)$.

Таким образом, вычисление таблицы значений функции, являющейся решением ДУ (1.9.2), состоит в последовательном применении пары формул:

$$\Delta y_k = hf(x_k, y_k), \quad (1.9.24)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \quad (1.9.25)$$

Метод Эйлера, как видно из рисунка, имеет погрешность. Определим локальную погрешность, присутствующую на каждом шаге, которая определяется разностью между точным значением функции и соответствующим значением касательной. Для первого шага:

$$\begin{aligned} \Delta &= y(x_1) - (y_0 + hf(x_0, y_0)) = y(x_0 + h) - (y_0 + hf(x_0, y_0)) = \\ &= y_0 + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \dots - (y_0 + hf(x_0, y_0)) \approx y''(x_0)\frac{h^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1.9.26)$$

Из (1.9.26) видно, что локальная погрешность пропорциональна h^2 . Суммарная погрешность Δ_S после N шагов пропорциональна $N \cdot O(h^2)$, поскольку $N = 1/h$, то $\Delta_S = O(h)$, т. е. метод Эйлера — метод первого порядка точности по h .

Известны различные уточнения метода Эйлера. Модификации данных методов направлены на уточнение направления перехода из точки (x_i, y_i) в точку (x_{i+1}, y_{i+1}) . Например, в методе Эйлера—Коши используют следующий порядок вычислений:

$$\begin{aligned} y_{i+1}^* &= y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2}. \end{aligned} \quad (1.9.27)$$

Геометрически это означает, что определяется направление интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y_{i+1}^*) , а в качестве окончательного берется среднее значение этих направлений.

Пример 1.9.1.

Решение задачи Коши дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2, \quad y(0) = 1.3.$$

1. Задание функции, стоящей в правой части уравнения:

$$f(x, y) := x^2$$

2. Задание начальных условий:

$$x0 := 0 \quad y0 := 1.3$$

3. Задание функции, реализующей вычислительный алгоритм метода Эйлера (рис. 1.9.2). Аргументы функции: $y0$ — значение решение в точке $x0$; $x0, x1$ — левый и правый концы интервала вычисления численного решения; N — число сетки, на которой ищется решение ДУ; f — имя функции, стоящей в правой части ДУ. Функция возвращает таблицу, состоящую из двух столбцов, первый столбец — значения аргумента, второй столбец — значения решения ДУ.

$$\text{Euler}(y0, x0, x1, N, f) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{x1 - x0}{N} \\ z0,0 \leftarrow x0 \\ z0,1 \leftarrow y0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} z_{i,0} \leftarrow x0 + h \cdot i \\ z_{i,1} \leftarrow z_{i-1,1} + h \cdot f(z_{i-1,0}, z_{i-1,1}) \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$$

Рис. 1.9.2. Функция, реализующая метод Эйлера для ДУ первого порядка (файл Euler.mcd)

4. Нахождение численного решения ДУ на интервале $[0,5]$:

$$x1 := 5$$

$$N := 10 \quad i := 0..N$$

$$A := \text{Euler}(x0, y0, x1, N, f)$$

5. Визуализация численного решения (рис. 1.9.3).

6. Построение разности между численным и точным решениями (рис. 1.9.4).

7. Задание функции, реализующей метод Эйлера—Коши (рис. 1.9.5). Аргументы функции: $y0$ — значение решения в точке $x0$; $x0, x1$ — левый и правый концы интервала вычисления численного решения; N — число сетки, на которой ищется решение ДУ; f — имя функции, стоящей в правой части ДУ. Функция возвращает таблицу, состоящую из двух

столбцов, первый столбец — значения аргумента, второй столбец — значения решения ДУ.

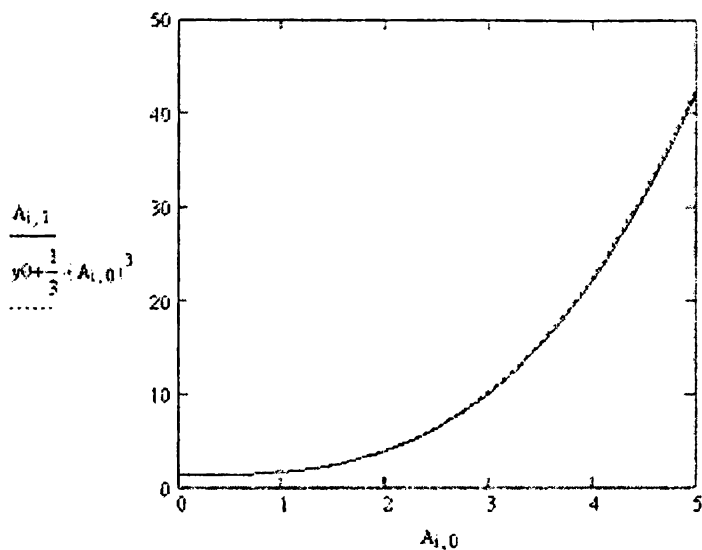


Рис. 1.9.3. Численное решение ДУ $y' = x^2$, полученное методом Эйлера

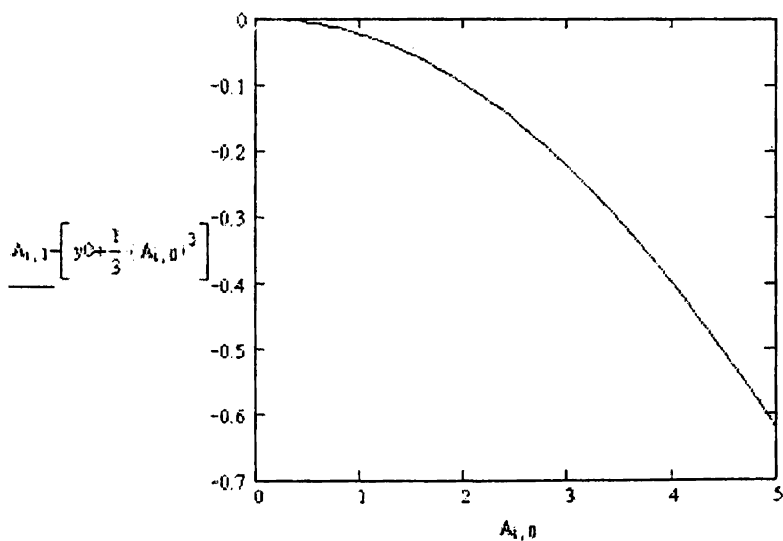


Рис. 1.9.4. Разность между численным и точным решениями ДУ $y' = x^2$

```

Euler1(y0,x0,x1,N,f) :=
    h ← (x1 - x0) / N
    z0,0 ← x0
    z0,1 ← y0
    for i ∈ 1..N
        zi,0 ← x0 + h · i
        Z ← zi-1,1 + h · f(zi-1,0, zi-1,1)
        zi,1 ← zi-1,1 + (h/2) · (f(zi-1,0, zi-1,1) + f(zi,0, Z))
    z

```

Рис. 1.9.5. Функция, реализующая метод Эйлера—Коши для ДУ первого порядка (файл Euler1.mcd)

8. Нахождение численного решения ДУ на интервале $[0,5]$:

$$A1 := Euler1(x0, y0, x1, N, f)$$

9. Визуализация численного решения (рис. 1.9.6).

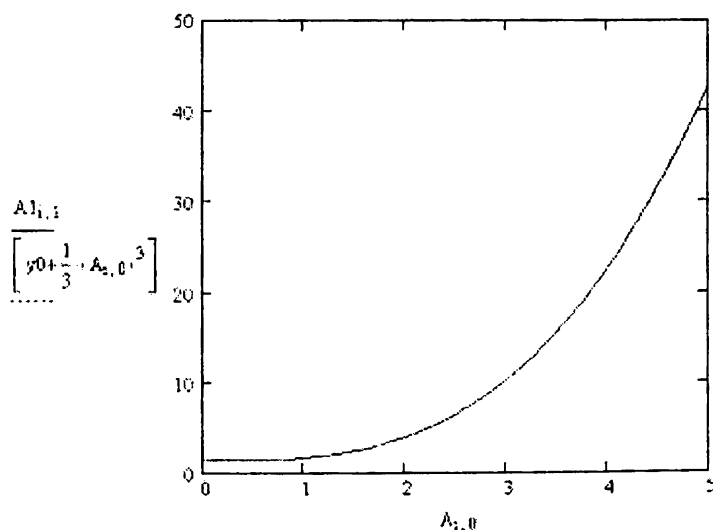


Рис. 1.9.6. Численное решение ДУ $y' = x^2$, полученное методом Эйлера—Коши

10. Построение разности между численным и точным решениями (рис. 1.9.7).

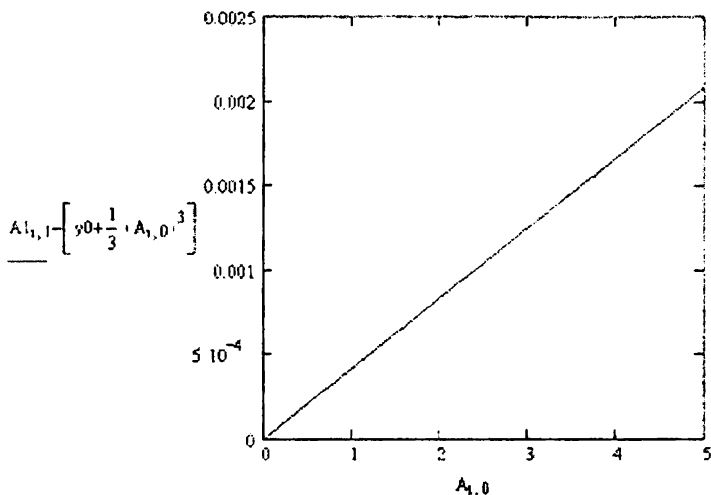


Рис. 1.9.7 Разность между точным и численным решениями задачи Коши ДУ $y' = x^2$, полученным методом Эйлера—Коши

1.9.4. Метод Рунге—Кутты

Метод Эйлера и метод Эйлера—Коши относятся к семейству методов Рунге—Кутты. Для построения данных методов можно использовать следующий общий подход. Фиксируем некоторые числа:

$$\alpha_2, \dots, \alpha_q; p_1, \dots, p_q; \beta_{ij}, \quad 0 < j < i \leq q.$$

Последовательно вычисляем:

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + \alpha_2 \cdot h, y + \beta_{12} k_1(h)),$$

$$k_q(h) = h \cdot f\left(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \dots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h)\right)$$

и полагаем:

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h) = z(h). \quad (1.9.28)$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров $\alpha_i, p_i, \beta_{ij}$. Обозначим

$$\varphi(h) = y(x+h) - z(h).$$

Будем предполагать, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0,$$

а $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$ для некоторой функции $f(x, y)$.

По формуле Тэйлора справедливо равенство:

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad (1.9.29)$$

где $0 < \theta < 1$.

При $q = 1$ будем иметь:

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y),$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(0) = (y'(x+h) - p_1 f(x, y))|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1),$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h).$$

Ясно, что равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется для любых функций $f(x, y)$ лишь при условии, что $p_1 = 1$. При данном значении p_1 из формулы (1.9.28) получаются формулы (1.9.24), (1.9.25) метода Эйлера. Погрешность данного метода на шаге согласно (1.9.29) равна:

$$\varphi(h) = \frac{\varphi''(x+h\theta) \cdot h^2}{2}.$$

Рассмотрим случай $q = 2$, тогда

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x, y) - p_2 h f(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{x} = x + \alpha_2 h$, $\bar{y} = y + \beta_2 h f(x, y)$.

Согласно исходному дифференциальному уравнению:

$$y' = f,$$

$$y'' = f_x + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = f_x + f_y f(x, y),$$

$$\begin{aligned} y''' &= f_{xx} + f_{xy} f + f \frac{\partial f_y}{\partial x} + f_y \frac{\partial f}{\partial x} = \\ &= f_{xx} + f_{xy} f + f(f_{xy} + f_{yy} f) + f_y(f_x + f_y f) = \\ &= f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y y''. \end{aligned} \quad (1.9.30)$$

Вычисляя производные функции $\varphi(h)$ и подставляя в выражения для $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ значение $h = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0, \\ \varphi'(0) &= (1 - p_1 - p_2)f, \\ \varphi''(0) &= (1 - 2p_2\alpha_2)f_x + (1 - 2p_2\beta_{21})f_y f.\end{aligned}\quad (1.9.31)$$

Требование

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$$

будет выполняться для всех $f(x, y)$ только в том случае, если одновременно справедливы следующие три равенства относительно четырех параметров:

$$\begin{aligned}1 - p_1 - p_2 &= 0, \\ 1 - 2p_2\alpha_2 &= 0, \\ 1 - 2p_2\beta_{21} &= 0.\end{aligned}\quad (1.9.32)$$

Задавая произвольно значения одного из параметров и определяя значения остальных из системы (1.9.32), можно получать различные методы Рунге—

Кутты с порядком погрешности $s = 2$. Например, при $p_1 = \frac{1}{2}$ из (1.9.32) по-

лучаем: $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$.

Для выбранных значений параметров выражение (1.9.28) приобретает следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2}$$

(здесь y_{i+1} записано вместо $y(x+h)$, y_i — вместо $y(x)$, а через y_{i+1}^* обозначено выражение $y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.)

Таким образом, для рассматриваемого случая приходим к расчетным формулам (1.9.27) метода Эйлера-Коши. Из (1.9.29) следует, что главная часть погрешности на шаге есть

$$\varphi'''(0)h^3/6,$$

т. е. погрешность пропорциональна третьей степени шага.

На практике наиболее часто используют метод Рунге—Кутты с $q = 4$, $s = 4$. Данный метод реализуется в соответствии со следующими расчетными формулами:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(x, y), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),\end{aligned}$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad (1.9.33)$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3),$$

$$\Delta y = z(h) - y(x) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Погрешность рассматриваемого метода Рунге—Кутты на шаге пропорциональна пятой степени шага.

Геометрический смысл использования метода Рунге—Кутты с расчетными формулами состоит в следующем. Из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_1 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_1 = f(x_i, y_i)$. На этом направлении выбирается точка с координатами $\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$. Затем из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемым углом α_2 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$. Наконец, из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_3 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + h, y_i + k_3)$. Этим задается еще одно направление, определяемое углом α_4 , для которого $\operatorname{tg} \alpha_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)$. Четыре полученные направления усредняются в соответствии с выражением (1.9.33). На этом окончательном направлении и выбирается очередная точка $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \Delta y)$.

Пример 1.9.2.

Решение задачи Коши дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x^2$,

$y(0) = 1,3$ методом Рунге—Кутты четвертого порядка.

1. Задание функции, стоящей в правой части уравнения:

$$f(x, y) := x^2$$

2. Задание начальных условий:

$$x_0 := 0 \quad y_0 := 1.3$$

3. Задание функции, реализующей вычислительный алгоритм метода Рунге—Кутты четвертого порядка (рис. 1.9.8). Аргументы функции: y_0 — значение решения в точке x_0 ; x_0, x_1 — левый и правый концы интервала вычисления численного решения; N — число сетки, на которой ищется решение ДУ; f — имя функции, стоящей в правой части ДУ. Функция возвращает таблицу, состоящую из двух столбцов, первый столбец — значения аргумента, второй столбец — значения решения ДУ.

```

RungeKutta(y0, x0, x1, N, f) :=
  h ← (x1 - x0) / N
  z0,0 ← x0
  z0,1 ← y0
  for i ∈ 1..N
    zi,0 ← x0 + h · i
    k1 ← h · f(zi-1,0, zi-1,1)
    k2 ← h · f(zi-1,0 + h/2, zi-1,1 + k1/2)
    k3 ← h · f(zi-1,0 + h/2, zi-1,1 + k2/2)
    k4 ← h · f(zi-1,0 + h, zi-1,1 + k3)
    zi,1 ← zi-1,1 + 1/6 · (k1 + 2 · k2 + 2 · k3 + k4)
  z

```

Рис. 1.9.8. Функция, реализующая метод Рунге—Кутты четвертого порядка для ДУ первого порядка (файл Runge-Kutta.mcd)

4. Нахождение численного решения ДУ на интервале $[0,5]$:

$x1 := 5$

$N := 100$

$i := 0..N$

$A2 := \text{RungeKutta}(y_0, x_0, x1, N, f)$

5. Визуализация численного решения (рис. 1.9.9).

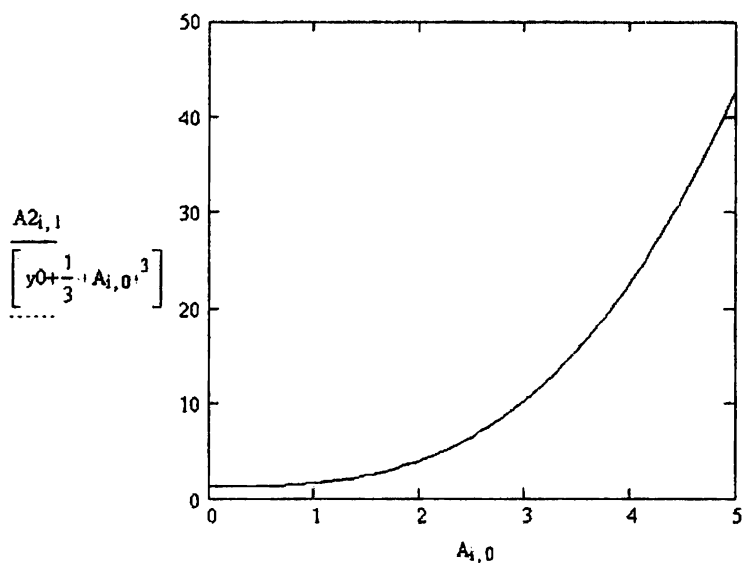


Рис. 1.9.9. Численное решение ДУ $\frac{dy}{dx} = x^2$, полученное методом Рунге—Кутты

6. Построение разности между численным и точным решениями (рис. 1.9.10).

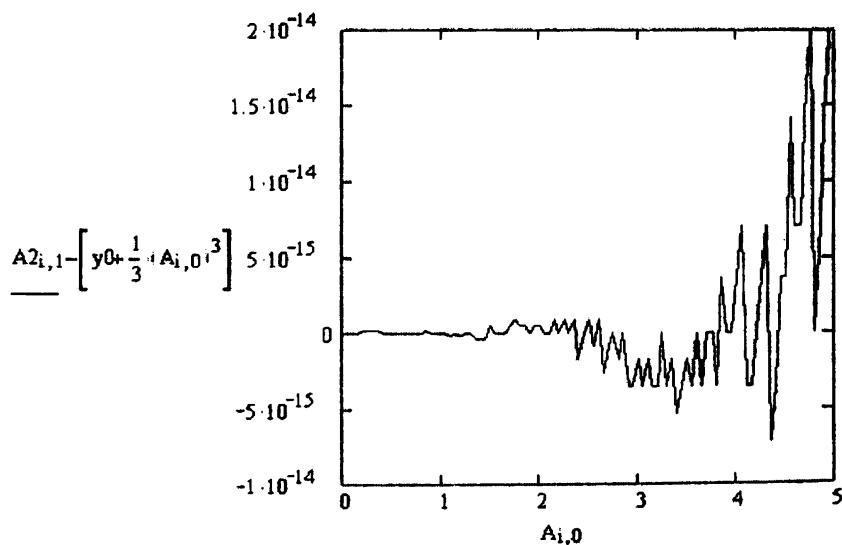
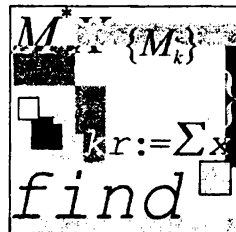


Рис. 1.9.10. Разность между численным и точным решения ДУ $\frac{dy}{dx} = x^2$



Лекция № 10

Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

План

- ☐ Примеры уравнений в частных производных.
- ☐ Типы уравнений с частными производными.
- ☐ Численные методы решения эллиптических уравнений.
- ☐ Явные разностные схемы.
- ☐ Неявные разностные схемы.
- ☐ Решение уравнений с частными производными методом Монте-Карло.

1.10.1. Примеры уравнений

Определение 1.10.1. Дифференциальные уравнения, содержащие частные производные, называются дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП).

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в УЧП неизвестная функция зависит от нескольких переменных (например, температура $u(x, t)$ зависит от координаты x и времени t).

Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения:

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$$

Примеры УЧП:

- ☐ $u_t = u_{xx}$ (одномерное уравнение теплопроводности);
- ☐ $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ (двумерное уравнение теплопроводности);
- ☐ $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ (уравнение Лапласа в полярных координатах);
- ☐ $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ (трехмерное волновое уравнение);
- ☐ $u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$ (телеграфное уравнение).

Методы решения УЧП:

- ☐ метод разделения переменных;
- ☐ метод интегральных преобразований;
- ☐ метод преобразования координат;
- ☐ преобразование зависимой переменной;
- ☐ численные методы;
- ☐ метод теории возмущений;
- ☐ метод функций Грина;
- ☐ метод интегральных уравнений;
- ☐ вариационные методы;
- ☐ метод разложения по собственным функциям;
- ☐ метод обратной задачи рассеивания.

1.10.2. Типы уравнений

Важность классификации УЧП обусловлена тем, что для каждого класса существует своя общая теория и методы решения уравнений. УЧП можно классифицировать по многим признакам.

Методы классификации УЧП.

1. По порядку уравнения (*порядком УЧП* называют наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение):
 - $u_t = u_x$ (уравнение первого порядка);
 - $u_t = u_{xx}$ (уравнение второго порядка);
 - $u_t = uu_{xxx} + \sin x$ (уравнение третьего порядка).

2. По числу переменных (*числом переменных* называют число независимых переменных):

- $u_t = u_{xx}$ (уравнение с двумя переменными);
- $u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ (уравнение с тремя переменными r, θ, t).

3. По критерию "линейное/нелинейное".

Линейным УЧП второго порядка с двумя независимыми переменными называется уравнение вида:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G,$$

где A, B, C, D, E, F и G константы или заданные функции переменных x и y :

- $u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$ (линейное уравнение);
- $uu_{xx} + u_t = 0$ (нелинейное уравнение);
- $u_{xx} + uu_{yy} = 0$ (линейное уравнение);
- $xu_x + uu_y + u^2 = 0$ (нелинейное уравнение).

4. По критерию "однородное/неоднородное".

Уравнение (1.10.1) называется *однородным*, если правая часть $G(x, y)$ тождественно равна нулю для всех x и y . Если $G(x, y)$ не равна нулю тождественно, то уравнение называется *неоднородным*.

5. По виду коэффициентов.

Если коэффициенты A, B, C, D, E, F и G уравнения (1.10.1) константы, то уравнение (1.10.1) называется уравнением с постоянными коэффициентами, в противном случае уравнением с переменными коэффициентами.

Основные типы линейных уравнений

Параболический тип. Уравнения параболического типа описывают процессы теплопроводности и диффузии и определяются условием:

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Гиперболический тип. Уравнения гиперболического типа описывают колебательные системы и волновые движения и определяются условием:

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Эллиптический тип. Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся процессы и определяются условием:

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Примеры:

□ $u_t = u_{xx}, B^2 - 4AC = 0$ (параболическое);

□ $u_{tt} = u_{xx}, B^2 - 4AC = 4$ (гиперболическое);

□ $u_{\xi\eta} = 0, B^2 - 4AC = 1$ (гиперболическое);

□ $u_{xx} + u_{yy} = 0, B^2 - 4AC = -4$ (эллиптическое);

□ $yu_{xx} + u_{yy} = 0, B^2 - 4AC = -4y \begin{cases} \text{эллиптическое при } y > 0; \\ \text{параболическое при } y = 0; \\ \text{гиперболическое, } y < 0. \end{cases}$

1.10.3. Численные методы решения эллиптических уравнений

При решении эллиптических УЧП ставится задача отыскания решения в некоторой области пространства при заданных значениях функции на границе области (задача Дирихле).

Пример 1.10.1.

Требуется найти решение уравнения Лапласа $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$, $0 < r < 1$ с заданными граничными условиями (ГУ) $u(1, \theta) = \sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Рассмотрение численных методов решения задачи Дирихле уравнения Лапласа в прямоугольной области $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

УЧП:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

ГУ:

$$u(x, 0) = g_1(y), u(1, y) = g_2(y), u(x, 1) = g_3(y), u(0, y) = g_4(y)$$

начнем со знакомства с понятием *конечно-разностная частная производная*.

Напомним, что при численном интегрировании производную функции, определяемую в соответствии с выражением

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

мы заменяли выражением

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (1.10.1)$$

с точностью до членов порядка h , аппроксимирующей производную в точке x .

Выражение, стоящее в правой части (1.10.1), называется правой разностной производной.

В разложении Тейлора функции $f(x)$ можно заменить h на $-h$ и получить левую разностную производную:

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (1.10.2)$$

Складывая (1.10.1) и (1.10.2), получаем центральную разностную производную:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (1.10.3)$$

Поступая аналогично, можно получить аппроксимацию второй производной

$$f''(x) \cong \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]. \quad (1.10.4)$$

Теперь можно распространить понятие конечно-разностной аппроксимации на частные производные. Используя разложение функции двух переменных в ряд Тейлора

$$u(x+h, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + \dots,$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} - \dots,$$

находим выражения для конечно-разностной аппроксимации частных производных:

$$u_x(x, y) \cong \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h},$$

$$u_{xx}(x, y) \equiv \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)],$$

$$u_y(x, y) \equiv \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k},$$

$$u_{yy}(x, y) \equiv \frac{1}{h^2} [u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)].$$

В данных формулах частные производные аппроксимируются правыми, центральными и левыми разностями, но мы далее будем использовать центральные разностные аппроксимации.

Построим в плоскости (x, y) равномерную сетку (рис. 1.10.1).

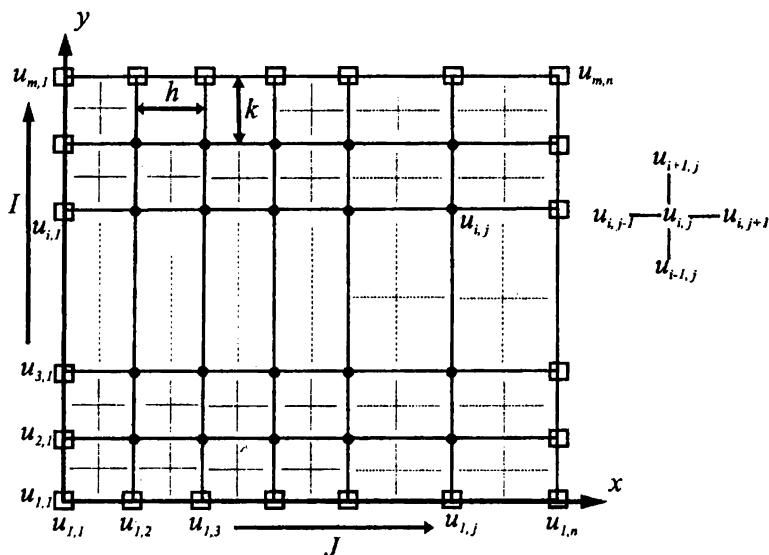


Рис. 1.10.1. Координатная сетка, используемая для решения УЧП эллиптического типа

Будем использовать следующие обозначения:

$$u(x_j, y_i) = u_{i,j},$$

$$u(x_j, y_i + k) = u_{i+1,j},$$

$$u(x_j, y_i - k) = u_{i-1,j},$$

$$u(x_j - h, y_i) = u_{i,j-1},$$

$$u(x_j + h, y_i) = u_{i,j+1},$$

$$u_x(x_j, y_i) = \frac{1}{2h}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}),$$

$$u_y(x_j, y_i) = \frac{1}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

$$u_{xx}(x_j, y_i) = \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}),$$

$$u_{yy}(x_j, y_i) = \frac{1}{k^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

Заменим частные производные в уравнении Лапласа их конечно-разностной аппроксимацией:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \frac{1}{k^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0. \quad (1.10.5)$$

Если $k = h$, то уравнение Лапласа приводится к виду:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0. \quad (1.10.6)$$

Разрешив (1.10.6) относительно u_{ij} , получим:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}). \quad (1.10.7)$$

Отметим, что в (1.10.7) все соотношения берутся для внутренних узлов сетки, т. к. значения функции на границах заданы. Соотношение (1.10.7) можно трактовать, как аппроксимацию значения функции в точке (x_i, y_j) средним значением решения по четырем соседним точкам. На первый взгляд польза от выражения (1.10.7) не очевидна, т. к. мы нашли связь между значением функции в i, j -ом узле и значениями функции в соседних узлах: $(i, j-1)$ -ом, $(i, j+1)$ -ом, $(i-1, j)$ -ом, $(i+1, j)$ -ом, которые также неизвестны. Однако оказывается, что если задать некоторые начальные значения решения уравнения Лапласа в узлах сетки и затем их последовательно уточнять в соответствии с (1.10.7), то итерационный процесс будет сходиться (релаксировать) к точному решению.

Таким образом, для численного решения задачи Дирихле методом релаксации можно использовать следующий алгоритм.

1. Присвоить величинам $u_{i,j}$ во внутренних узлах сетки некоторые численные значения (например, равные среднему значению всех граничных условий).

2. Пересчитывать значения во всех внутренних точках сетки в соответствии с (1.10.7) (заменяя старое значение средним значением, вычисленным по четырем соседним точкам).

Отметим, что при этом не важно — по строкам или по столбцам организован процесс счета. Недостатком данной схемы является низкая скорость сходимости итерационного процесса, которую, однако, можно улучшить, используя специальные методы, например, метод верхней и нижней релаксации [3], основанные на обсуждавшемся нами ранее методе Зейделя.

Пример 1.10.2.

Решение задачи Дирихле уравнения Лапласа в пакете Mathcad.

УЧП: $u_{xx} + u_{yy} = 0$,

ГУ: $u(x, 0) = 0$, $u(1, y) = g_2(y)$, $u(x, 1) = 0$, $u(0, y) = g_4(y)$.

1. Задание функции, реализующей метод релаксации (рис. 1.10.2) и возвращающей значения функции $u(x, y)$, вычисляемые в узлах координатной сетки. Аргументы функции: N — число узлов сетки; N_Iter — число шагов метода релаксации; Φ — имя матрицы значения потенциала в граничных узлах сетки и начальное значение потенциала во внутренних узлах сетки.

```

itez2(N, N_Iter, Φ) :=
    h ← 1/N
    for k ∈ 0..N_Iter
        for j ∈ 1..N-1
            for i ∈ 1..N-1
                Φi,j ← 1/4 · (Φi+1,j + Φi-1,j + Φi,j+1 + Φi,j-1)
    Φ
  
```

Рис. 1.10.2. Функция, реализующая метод релаксаций (файл Iter2.mcd)

2. Задание потенциала в граничных узлах сетки и начального приближения во внутренних узлах сетки:

$N := 14$

$i := 0..N$ $j := 0..N$

$\mu_{i,0} := 5$ $\mu_{i,N} := 5$

$$\mu_{0,j} := 5 \quad \mu_{N,j} := 5$$

$$kx := 1..N - 1 \quad ky := 1..N - 2$$

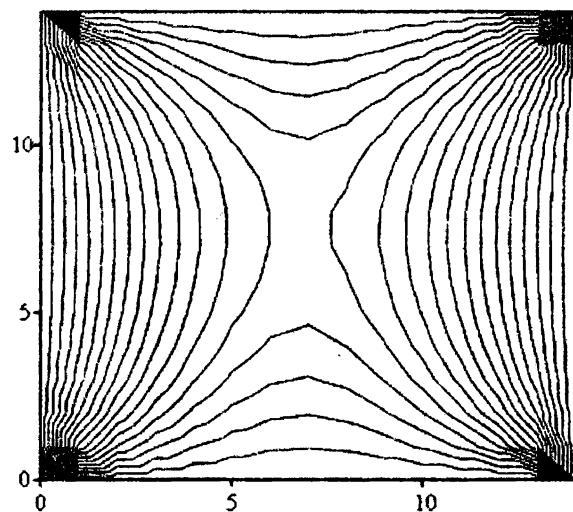
$$\mu_{kx,ky} := 12$$

$$Ni := 100$$

3. Вычисление численного решения уравнения Лапласа методом релаксации:

$$B2 := \text{iter2}(N, Ni, \mu)$$

4. Визуализация численного решения уравнения Лапласа (рис. 1.10.3).



B2

Рис. 1.10.3. Карта линий равного потенциала численного решения уравнения Лапласа

1.10.4. Явные разностные схемы

Явные разностные схемы используются для решения уравнений, в которые входят производные по времени. Для решения данных задач используются явные разностные схемы, с которыми мы познакомимся на примере явной схемы бегущего счета для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим решение смешанной краевой задачи для следующего УЧП:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty,$$

ГУ:

$$\begin{cases} u(0, t) = 1 \\ u_x(1, t) = -[u(1, t) - g(t)], \quad 0 < t < \infty; \end{cases} \quad (1.10.8)$$

НУ:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Рассматриваемое УЧП описывает распределение температуры в стержне, начальная температура которого равна нулю. Левый конец стержня находится при постоянной температуре, на правом конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой определяется функцией $g(t)$.

Для решения задачи методом конечных разностей построим прямоугольную сетку (рис. 1.10.4), узлы которой определяются формулами:

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$t_i = ik, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

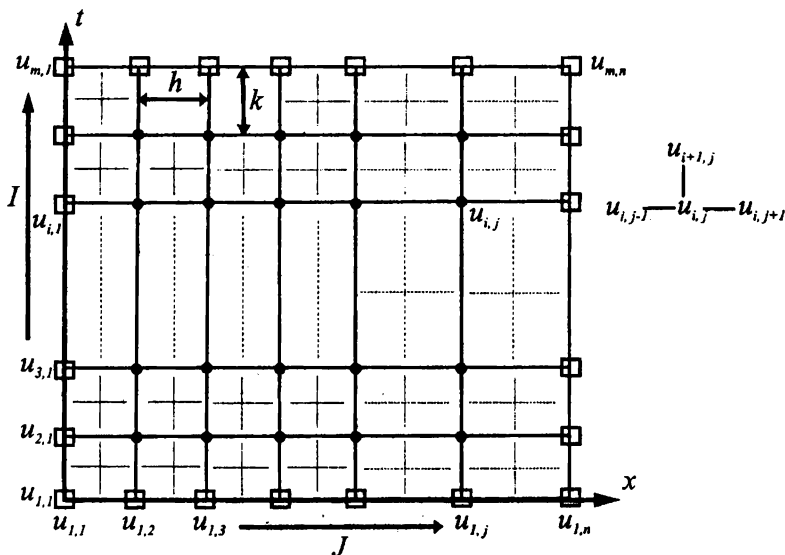


Рис. 1.10.4. Пространственно-временная сетка, используемая для решения одномерного уравнения теплопроводности

Отметим, что значения $u_{i,j}$ на левой и нижней сторонах сетки известны из начальных и граничных условий, на правой границе известно значение частной производной решения уравнения по переменной x .

Заменим частные производные в уравнении теплопроводности их конечно-разностными аппроксимациями:

$$u_t = \frac{1}{k} [u(x, t+k) - u(x, t)] = \frac{1}{k} [u_{i+1, j} - u_{i, j}],$$

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] = \frac{1}{h^2} [u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}].$$

Подставим данные выражения в исходное уравнение $u_t = u_{xx}$ и разрешим получившееся уравнение относительно значений функции на верхнем временном слое. В результате получаем:

$$u_{i+1, j} = u_{i, j} + \frac{k}{h^2} [u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}]. \quad (1.10.9)$$

Формула (1.10.9) решает поставленную задачу, поскольку она выражает решение в данный момент времени через решение в предыдущий момент времени.

Для решения смешанной краевой задачи необходимо аппроксимировать производную в граничном условии на правом конце:

$$u_x(1, t) = -[u(1, t) - g(t)].$$

Используя конечно-разностную аппроксимацию, получаем:

$$\frac{1}{h} [u_{i, n} - u_{i, n-1}] = -[u_{i, n} - g_i]. \quad (1.10.10)$$

Из (1.10.10) находим:

$$u_{i, n} = \frac{u_{i, n-1} - hg_i}{1+h}. \quad (1.10.11)$$

Формулы (1.10.9), (1.10.11) позволяют начать вычисления по явной схеме.

Алгоритм вычислений по явной схеме реализуется следующей последовательностью действий.

1. Находим решение на сеточном слое $t = \Delta t$, используя явную формулу:

$$u_{2, j} = u_{1, j} + \frac{k}{h^2} [u_{1, j+1} - 2u_{1, j} + u_{1, j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \quad (1.10.12)$$

2. Находим величину $u_{2, n}$ по формуле (1.10.11):

$$u_{2, n} = \frac{u_{2, n-1} + hg_2}{1+h}. \quad (1.10.13)$$

Завершив шаги 1 и 2, получаем решение для $t = \Delta t$. Для получения решения при $t = 2\Delta t$ повторяют шаги 1, 2, поднявшись на одну строку вверх, т. е. уве-

личив i на единицу и используя $u_{i,j}$ с предыдущей строки. Аналогично вычисляется решение в последующие моменты времени $t = 3\Delta t, 4\Delta t, \dots$

У явной схемы имеется один существенный недостаток: если шаг по времени оказывается достаточно большим по сравнению с шагом по x , то погрешности округления могут стать настолько большими, что полученное решение теряет смысл, т. е. решение становится неустойчивым. Можно показать, что для применимости явной схемы должно выполняться условие $k/h^2 \leq 0,5$.

Пример 1.10.3.

Решение краевой задачи уравнения теплопроводности в пакете Mathcad.

1. Задание начальных и граничных условий:

$$t := 0..29 \quad x := 1..49$$

$$f_{0,x} := 0 \quad f_{0,0} := 0$$

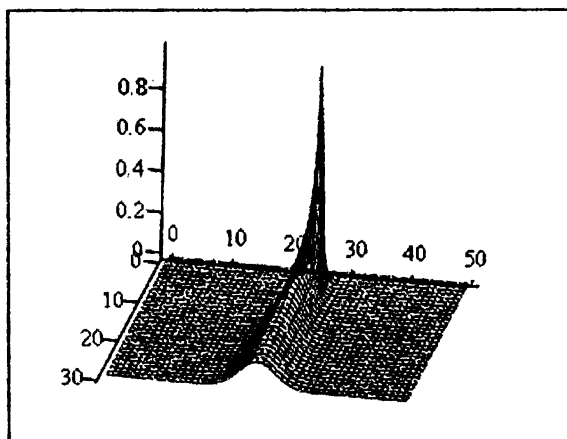
$$f_{0,50} := 0 \quad f_{0,25} := 0$$

2. Вычисление решения в последовательные моменты времени в соответствии с (1.10.9):

$$k := 0.15$$

$$f_{t+1,x} := f_{t,x} + k \cdot (f_{t,x-1} - 2 \cdot f_{t,x} + f_{t,x+1})$$

3. Визуализация численного решения уравнения теплопроводности (рис. 1.10.5).



f

Рис. 1.10.5. Численное решение уравнения теплопроводности

Получим явную вычислительную схему для нахождения численного решения УЧП гиперболического типа на примере волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (1.10.14)$$

Запишем уравнение (1.10.14) в конечных разностях:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \frac{1}{v^2} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\tau^2}. \quad (1.10.15)$$

Полученное уравнение позволяет выразить значение функции u в момент времени t_{i+1} через значения функции в предыдущие моменты времени:

$$u_{i+1,j} = v^2 \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}. \quad (1.10.16)$$

Такая разностная схема (1.10.16) устойчива, если $\tau \leq h/v$.

Отметим, что для начала вычислений в соответствии с (1.10.16) необходимо знать значения функции в моменты времени t_0 и t_1 . Данное обстоятельство обусловлено тем, что мы решаем уравнение второго порядка по времени. Для нахождения решений в моменты времени t_0 и t_1 необходимо использовать начальное условие для первых производных функции u .

Пример 1.10.4.

Решение волнового уравнения (1.10.14) в пакете Mathcad.

1. Задание числа узлов по времени:

$$Nt := 60 \quad i := 0..Nt$$

2. Задание числа шагов по координате:

$$Nx := 100 \quad j := 0..Nx$$

3. Задание начальных условий $u(0, x) = \sin(\pi \cdot x)$, $u'(0, x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$:

$$U_{0,j} := \sin\left(\pi \cdot \frac{j}{50}\right)$$

$$U_{1,j} := U_{0,j}$$

4. Вычисление численного решения волнового уравнения в соответствии с (1.10.16):

$$a := 1 \quad k := 1$$

$$j := 1..Nx-1 \quad i := 1..Nt$$

$$U_{i+1,j} := a^2 \cdot k \cdot (U_{i,j+1} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i,j-1}) + 2 \cdot U_{i,j} - U_{i-1,j}$$

5. Визуализация численного решения волнового уравнения (рис. 1.10.6).

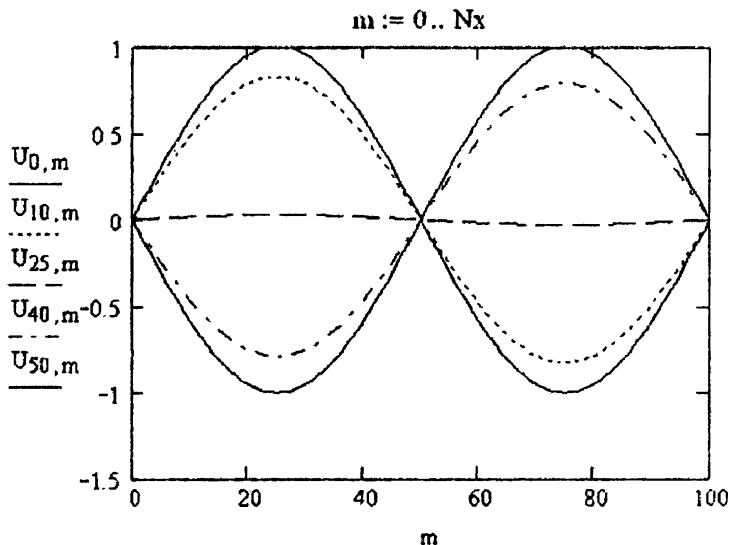


Рис. 1.10.6. Решение волнового уравнения в выбранные моменты времени

1.10.5. Неявная разностная схема для уравнения параболического типа

Построим неявную разностную схему для уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу:

УЧП:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

ГУ:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (1.10.17)$$

НУ:

$$u(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Воспользуемся следующими конечно-разностными аппроксимациями частных производных u_t и u_{xx} :

$$u_t(x, t) = \frac{1}{k} [u(x, t+k) - u(x, t)],$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{\lambda}{h^2} [u(x+h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x-h, t+k)] +$$

$$+ \frac{1-\lambda}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)],$$

где λ выбирается из отрезка $[0, 1]$.

Отметим, что u_{xx} аппроксимируется взвешенным средним центральных разностных производных в момент времени t и $t+k$. При $\lambda = 0,5$ получается обычное среднее двух центральных производных, при $\lambda = 0$ получаем обычную явную схему, о которой речь шла выше.

После замены частных производных u_t , u_{xx} в задаче (1.10.17) получаем разностную задачу

$$\frac{1}{k} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) = \frac{\lambda}{h^2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}) + \frac{1-\lambda}{h^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}),$$

$$\begin{cases} u_{i,1} = 0, \\ u_{i,n} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.10.18)$$

$$u_{1,j} = 1, \quad j = 2, \dots, n-1.$$

Перенесем все неизвестные значения u с верхнего временного слоя (с индексом $i+1$) в левую часть уравнения:

$$-\lambda r u_{i+1,j+1} + (1+2r\lambda) u_{i+1,j-1} =$$

$$= r(1-\lambda) u_{i,j+1} + [1-2r(1-\lambda)] u_{i,j} + r(1-\lambda) u_{i,j-1}, \quad (1.10.19)$$

где $r = k/h^2$.

Если i фиксирован, а j изменяется от 2 до $n-1$, соотношения (1.10.19) определяют систему $n-2$ уравнений с $n-2$ неизвестными $u_{i+1,2}, u_{i+1,3}, u_{i+1,4}, \dots, u_{i+1,n-1}$, которые являются решением задачи во внутренних узлах сетки на временном слое $t = (i+1)\Delta t$.

Наглядное представление о структуре каждого уравнения (1.10.19) дает рис. 1.10.7.

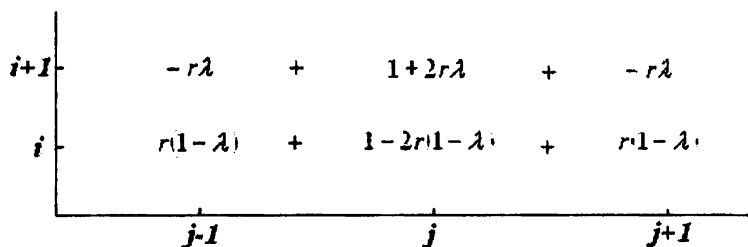


Рис. 1.10.7. Структура уравнения (1.10.19)

Для нахождения ее решения преобразуем систему к эквивалентному виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1^* & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & c_2^* & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_3^* & & & & 0 \\ \cdot & & & & & & & c_{n-1}^* \\ \cdot & & & & & & & 0 \\ \cdot & & & & & & & 1 \\ \cdot & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n^* \end{bmatrix}, \quad (1.10.20)$$

$$\text{где } c_1^* = \frac{c_1}{b_1}, \quad c_{j+1}^* = \frac{c_{j+1}}{b_{j+1} - a_j c_j^*}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2, \quad d_1^* = \frac{d_1}{b_1},$$

$$d_{j+1}^* = \frac{d_{j+1} - a_j d_j^*}{b_{j+1} - a_j c_j^*}.$$

Решение системы (1.10.20) находится последовательно снизу вверх. Для нахождения решения на следующем шаге во времени следует вновь решить аналогичную систему. Отметим, что объем вычислений на каждом шаге больше, чем в явной схеме, но хорошую точность удастся получить даже при гораздо большем шаге.

Предваряя решение смешанной краевой задачи, запишем в явном виде систему линейных уравнений для схемы с $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & & r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1,2} \\ u_{i+1,3} \\ \vdots \\ u_{i+1,n-2} \\ u_{i+1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i,1} + r \cdot u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,n-2} \\ u_{i,n-1} + r \cdot u_{i,n} \end{pmatrix}, \quad (1.10.21)$$

где $u_{i,1} = u(t, 0)$, $u_{i,n} = u(t, 1)$. Системы такого вида мы будем использовать ниже при решении смешанной краевой задачи для уравнения параболического вида.

Пример 1.10.5.

Решение смешанной краевой задачи УЧП $u_t = u_{xx}$, НУ: $u(0, x) = \sin(\pi x) + x$, $0 \leq x \leq 1$, ГУ: $u(t, 0) = 0$, $u(t, 1) = 1$ с использованием неявной разностной схемы ($\lambda = 1$).

1. Задание числа узлов сетки по координате:

$$Nx := 100 \quad j := 0..Nx$$

2. Задание числа шагов по времени:

$$Nt := 100 \quad i := 0..Nt$$

3. Задание начальных условий:

$$u_{0,j} := \sin\left(\pi \cdot \frac{j}{Nx}\right) + \frac{j}{Nx}$$

4. Задание граничных условий:

$$\alpha := 0 \quad \beta := 1$$

$$k := 0..Nx - 2$$

$$u_{i,0} := \alpha \quad u_{i,Nx} := \beta$$

5. Вычисление матрицы системы (1.10.21):

$$m := 1..Nx - 2$$

$$r := 5$$

$$A_{k,k} := 1 + 2 \cdot r$$

$$A_{m-1,m} := -r \quad A_{m,m-1} := -r$$

6. Задание функции, возвращающей решения УЧП параболического типа в заданные моменты времени (рис. 1.10.8)

```

U(u) :=
  u1 ← submatrix(u, 0, 0, 1, Nx - 1)
  for i ∈ 1.. Nt
    a ← r · u1-1, 0
    b ← r · u1-1, Nx
    u10, 0 ← u10, 0 + a
    u10, Nx-2 ← u10, Nx-2 + b
    u2 ← A-1 · u1T
    u1 ← u2T
    for j ∈ 1.. Nx - 1
      ui, j ← u10, j-1
  u

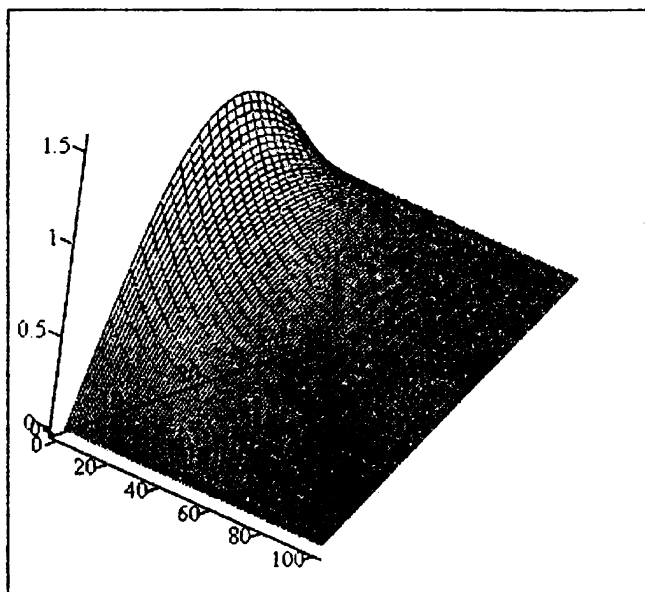
```

Рис. 1.10.8. Функция, возвращающая численные значения решения УЧП параболического типа в заданные моменты времени (файл u.mcd)

7. Вычисление решений УЧП:

$$U1 := U(u)$$

8. Визуализация решений УЧП (рис. 1.10.9).



U1

Рис. 1.10.9. Решение смешанной краевой задачи УЧП
параболического типа

1.10.6. Решение уравнений методом Монте-Карло

Рассмотрим решение задачи Дирихле уравнения Лапласа *методом случайных блужданий*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Для иллюстрации метода Монте-Карло рассмотрим игру, которая называется "Блуждающий пьяница".

Правила игры.

1. Блуждания пьяницы начинаются из произвольной точки сетки (в нашем случае это точка A (рис. 1.10.10)).

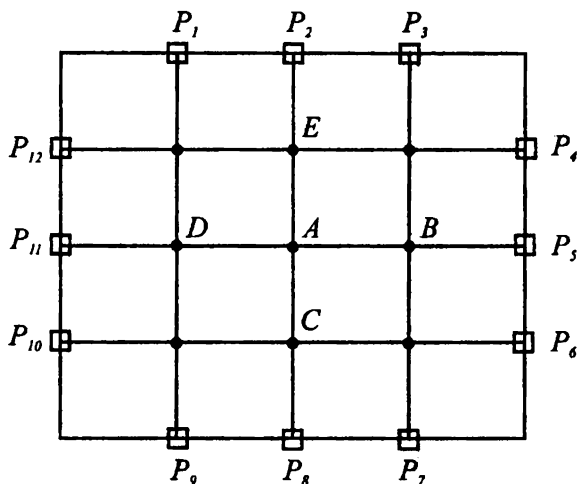


Рис. 1.10.10. К объяснению нахождения решения УЧП методом Монте-Карло

2. На каждом шаге пьяница случайным образом перемещается в одну из четырех соседних точек сетки (в нашем случае это одна из точек C, B, D, E). Вероятность попадания в каждую из точек равна $1/4$.
3. После перехода в соседнюю точку процесс блуждания возобновляется. Перемещения пьяницы продолжаются до тех пор, пока он не достигнет одной из граничных точек P_i . Номер граничной точки фиксируется и на этом случайная прогулка заканчивается.
4. Производим повторение шагов 1—3 достаточное количество раз и определим количество посещений пьяницей каждой граничной точки. Отношение числа посещений пьяницей каждой точки границы к полному числу испытаний определяет вероятность попадания пьяного в данную точку границы.
5. Предположим, что пьяница получает вознаграждение g_i , если он достигает точки P_i , и предположим, что цель игры — вычислить среднее вознаграждение $R(A)$ для всех случайных прогулок, начинающихся из точки A . Тогда искомый средний выигрыш определяется формулой:

$$R(A) = g_1 P_A(p_1) + g_2 P_A(p_2) + \dots + g_{12} P_A(p_{12}). \quad (1.10.22)$$

Для чего надо играть в "Блуждающего пьяницу"?

Оказывается, что среднее вознаграждение (1.10.22) является решением задачи Дирихле в точке A . Данный вывод основан на двух фактах.

- Предположим, что пьяница начал свое движение из точки, лежащей на границе. Каждая такая прогулка заканчивается в той же точке, и пьяница

немедленно получает вознаграждение g_i . Таким образом, среднее вознаграждение для каждой точки равно g_i .

- Теперь предположим, что прогулка начинается из внутренней точки. Тогда ясно, что среднее вознаграждение для точки $R(A)$ будет средним арифметическим от средних вознаграждений для четырех соседних точек:

$$R(A) = \frac{1}{4} [R(B) + R(C) + R(D) + R(E)]. \quad (1.10.23)$$

Итак, мы видим, что $R(A)$ удовлетворяет уравнению (1.10.23) в каждой внутренней точке и равно g_i в граничной точке. Если g_i — значения функции $g(x, y)$ из граничного условия в граничных точках P_i , то два наших уравнения точно совпадают с двумя уравнениями, которые получены при решении задачи Дирихле методом конечных разностей. То есть величина $R(A)$ соответствует величине u_{ij} в разностных уравнениях:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} [u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}], \quad (1.10.24)$$

$$u_{i,j} = g_{i,j}, \quad (1.10.25)$$

где (i, j) — внутренняя точка; $g_{i,j}$ — значение решения в граничной точке (i, j) .

Таким образом, величина $R(A)$ действительно аппроксимирует решение уравнения с частными производными в точке A .

Пример 1.10.6.

Решение методом случайных блужданий в пакете Mathcad уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$, $u(x, 0) = 5$, $u(x, 1) = 0$.

1. Задание параметров координатной сетки:

$$Nx := 14 \quad i := 0..Nx - 1$$

$$Ny := 14 \quad j := 0..Ny - 1$$

2. Задание граничных условий:

$$XL_i := 5 \quad Yu_j := 0$$

$$XR_i := 5 \quad Yd_j := 0$$

3. Задание функции, возвращающей численные значения решения уравнения Лапласа методом Монте-Карло (рис. 1.10.11). Аргументы функции: Nx, Ny — число узлов сетки; $NTrial$ — число испытаний; XL — вектор, содержащий граничные значения на левой границе; XR — вектор, содержащий граничные условия на правой границе; Yd — вектор, содержащий решения на нижней границе, Yu — вектор, содержащий решения на верхней границе.

```

R(Nx, Ny, NTrial, XL, XR, Yu, Yd) :=
  for j ∈ 0..Nx-1
    U0,j ← Ydj
    U0,j-1 ← Yuj
  for i ∈ 0..Ny-1
    Ui,0 ← XLi
    Ui,Nx-1 ← XRi
  for i ∈ 1..Nx-2
    for j ∈ 1..Ny-2
      X ← j
      Y ← i
      for m ∈ 0..Nx-1
        VLm ← 0
        VRm ← 0
      for m ∈ 0..Ny-1
        GLm ← 0
        GRm ← 0
      for k ∈ 0..NTrial-1
        x ← X
        y ← Y
        while x ≠ 0 ∧ x ≠ Nx-1 ∧ y ≠ 0 ∧ y ≠ Ny-1
          R ← rnd1()
          x ← x-1 if 0.25 < R < 0.5
          x ← x+1 if 0.25 < R < 0.5
          y ← y-1 if 0.5 < R < 0.75
          y ← y+1 if 0.75 < R < 1
          VLy ← VLy + 1 if x = 0
          VRy ← VRy + 1 if x = Nx-1
          GLx ← GLx + 1 if y = 0
          GRx ← GRx + 1 if y = Ny-1
          Ui,j ← 1/NTrial * [ ∑m=1Nx-2 GLm U0,m + ∑m=1Ny-2 GRm Um,Nx-1 + ∑m=1Nx-2 VLm Um,0 + ∑m=1Ny-2 VRm Um,Nx-1 ]
    Ui,j

```

Рис. 1.10.11. Функция, возвращающая численное решение уравнения Лапласа методом Монте-Карло (файл R.mcd)

4. Поиск численного решения уравнения Лапласа:

$$U := R(Nx, Ny, 1000, XL, XR, Yu, Yd)$$

5. Визуализация численного решения уравнения Лапласа (рис. 1.10.12).

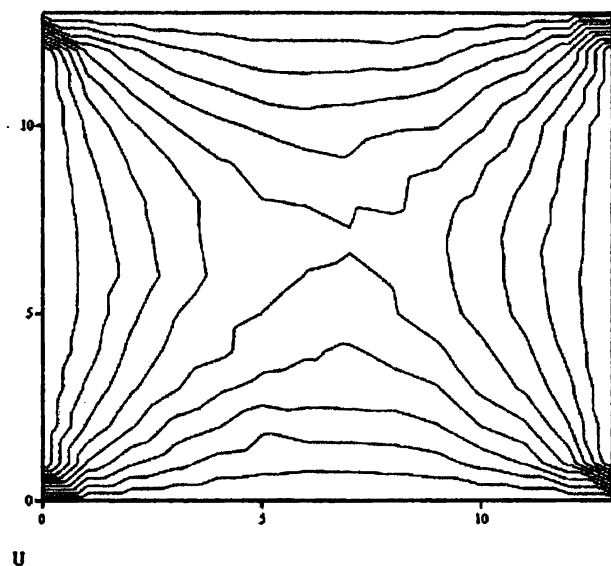


Рис. 1.10.12. Решение уравнения Лапласа методом Монте-Карло

Для сравнения на рис 1.10.13 представлено решение уравнения Лапласа, полученное методом релаксаций.

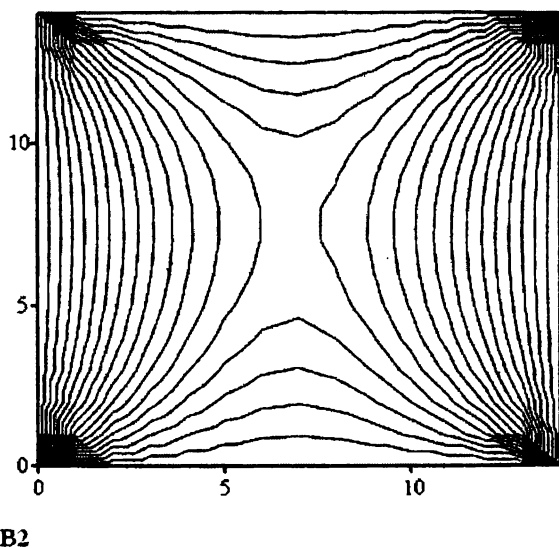


Рис. 1.10.13. Решение уравнения Лапласа методом релаксации

Рассмотрим эллиптическую краевую задачу

$$u_{xx} + (\sin x)u_{xx} = 0$$

на границе квадрата $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $u(x, y) = g(x, y)$.

Для того чтобы решить эту задачу, заменим u_{xx} , u_{yy} и $\sin x$ следующим образом:

$$u_{xx} = u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1},$$

$$u_{yy} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j},$$

$$\sin x = \sin x_j$$

и подставим их в УЧП. Разрешив получившееся уравнение относительно $u_{i,j}$, получаем:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - \sin x_j (u_{i+1,j} + u_{i-1,j})}{2(1 + \sin x_j)}. \quad (1.10.26)$$

Коэффициенты при $u_{i+1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i-1,j}$ положительны и их сумма равна единице. Другими словами, решение $u_{i,j}$ является взвешенным средним решением в четырех соседних точках.

Следовательно, можно модифицировать метод "Блуждающего пьяницы" так, чтобы вероятности перехода в соседние точки равнялись бы коэффициенту в соответствующем члене. Другими словами, если пьяница находится в точке (i, j) , то он переходит в точку

$$(i, j+1) \text{ с вероятностью } \frac{1}{2(1 + \sin x_j)},$$

$$(i, j-1) \text{ с вероятностью } \frac{1}{2(1 + \sin x_j)},$$

$$(i+1, j) \text{ с вероятностью } \frac{\sin x_j}{2(1 + \sin x_j)},$$

$$(i-1, j) \text{ с вероятностью } \frac{\sin x_j}{2(1 + \sin x_j)}.$$

В остальном правила игры не меняются. Модификация для других задач может оказаться более хитроумной, однако основная идея метода не меняется.



Лекция № 11

Численные методы решения интегральных уравнений

План

- Общие сведения об интегральных уравнениях.
- Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма.
- Квадратурный метод решения интегральных уравнений Вольтерры.

1.11.1. Общие сведения об интегральных уравнениях

Определение 1.11.1. *Интегральным уравнением* называется уравнение относительно неизвестной функции, содержащейся под знаком интеграла.

К интегральным уравнениям приводят многие задачи, возникающие в математике и математической физике. Исторически первой задачей, сведенной к интегральному уравнению

$$\int_0^z \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{z-\xi}} d\xi = f(z),$$

считается *задача Абеля*, имеющая следующую формулировку.

Определить вид кривой $x = \varphi(z)$, по которой в вертикальной плоскости Oxz под действием силы тяжести должна скатываться материальная точка, так чтобы, начав свое движение с нулевой начальной скоростью из точки $z = z_0$, она достигала оси Ox за заданное время $T = f(z)$.

Интегральные уравнения широко используются в моделях, рассматриваемых в теории упругости, газовой динамике, электродинамике, экологии и других областях физики, в которых они являются следствием законов сохранения массы, импульса и энергии. Достоинство данных моделей состоит в том, что

интегральные уравнения, в отличие от дифференциальных, не содержат производных искомой функции и, следовательно, жесткие ограничения на гладкость решения отсутствуют.

Пример 1.11.1.

Зависимости между напряжениями σ и деформациями ε в упруго-вязких материалах описываются уравнениями:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E_0} \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E \int_0^t T(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau,$$

где E — модуль упругости; $K(t-\tau)$ — функция влияния напряжения $\sigma(t)$ в момент времени τ на деформацию $\varepsilon(t)$ в момент времени t ; $T(t-\tau)$ — аналогичная функция влияния деформации.

Пример 1.11.2.

Решение задачи об определении вида потенциальной энергии по периоду колебаний [23, § 12] сводится к решению интегрального уравнения

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

где E — энергия частицы; m — масса частицы; $x_1(E)$, $x_2(E)$ — ординаты точки остановки, являющиеся решением уравнения

$$U(x) = E.$$

Интегральное уравнение в достаточно общем виде можно записать в следующей форме:

$$x(t) = \int_D K(t, s, x(s)) ds + f(t), \quad (1.11.1)$$

где D — некоторая область n -мерного пространства; x — неизвестная функция; f — известная функция, зависящая от времени¹; K — функция относительно x (линейная или нелинейная).

Далее мы ограничим рассмотрение одномерными линейными интегральными уравнениями, в которых функция $x(t)$ является функцией, зависящей от одной переменной, а область D — отрезком конечной длины, в каждой точке

¹ В общем случае функции $x(t)$, $f(t)$ — вектор-функции.

которого подынтегральная функция $K(t, s, x(s))$ представима в виде $Q(t, s)x(s)$.

Классификация типов линейных интегральных уравнений проводится по виду верхней границы интеграла в (1.11.1): если верхняя граница интегрирования является постоянной, то уравнение называется уравнением Фредгольма, если переменной — уравнением Вольтерры, которые, в свою очередь, подразделяются на уравнения первого и второго рода. На практике наиболее широко применяются линейные интегральные уравнения второго рода:

Фредгольма:

$$x(t) = \lambda \int_a^b Q(t, s)x(s)ds + f(t) \quad (1.11.2)$$

и Вольтерры:

$$x(t) = \lambda \int_a^t Q(t, s)x(s)ds + f(t), \quad (1.11.3)$$

где $f(t)$ — неизвестная функция; $x(t)$ — решение уравнения; $Q(t, s)$ — ядро интегрального уравнения.

Ядро интегрального уравнения Фредгольма определяется на множестве точек квадрата $[a, b] \times [a, b]$ (рис. 1.11.1, а), уравнения Вольтерра — в треугольнике $a \leq s \leq t \leq b$ (рис. 1.11.1, б)

Отметим, что, доопределив ядро $Q(t, s)$ уравнения Вольтерры нулем, в треугольнике $a \leq s \leq t \leq b$ уравнение Вольтерры можно считать уравнением Фредгольма и применять для его решения методы уравнения Фредгольма. Однако при этом могут быть упущены некоторые специфические особенности уравнения Вольтерры, что определяет необходимость их отдельного рассмотрения.

Дополнительный множитель λ , который может быть отнесен к интегральному ядру, в (1.11.1), (1.11.2) введен для придания уравнениям более общего вида. Существуют теоремы, устанавливающие существование решений интегральных уравнений при различных значениях λ , которые доказываются подобно тому, как это делается в теории линейных ДУ, через рассмотрение соответствующих однородных уравнений ($f(t) = 0$).

Значительно более сложной задачей оказывается задача доказательства существования, единственности и непрерывной зависимости решений от функции $f(t)$ для интегральных уравнений первого рода:

□ Фредгольма:

$$\int_a^b Q(t, s)x(s)ds = f(t), \quad (1.11.4)$$

□ Вольтерры:

$$\int_a^t Q(t, s)x(s)ds = f(t),$$

относящиеся к классу некорректных задач.

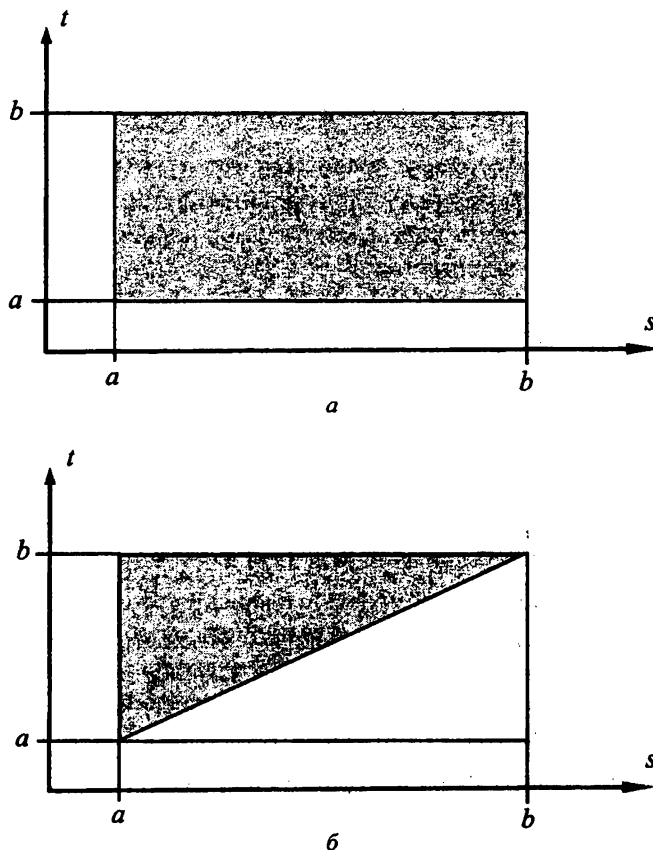


Рис. 1.11.1. Область задания ядер $Q(t, s)$ интегральных уравнений:

a — Фредгольма, b — Вольтерры

Уравнения первого и второго рода можно записать в общем виде, используя функцию $h(t)$, тождественно равную нулю для уравнений первого рода и единице — для уравнений второго рода:

$$h(t)x(t) = \lambda \int_a^b Q(t, s)x(s)ds + f(t). \quad (1.11.6)$$

Когда функция $h(t)$ обращается в ноль в некоторых точках прямоугольника интегрирования, уравнение (1.11.6) относится к интегральным уравнениям третьего рода. Уравнения данного типа встречаются в приложениях значительно реже, чем уравнения первых двух типов, и значительно менее изучены.

Многие используемые на практике интегральные уравнения имеют ядро, зависящее только от разности $t - s$. Интегральные уравнения с данным типом ядра называются уравнениями с разностным ядром. Примером данного типа уравнений является уравнение, получаемое в задаче Абеля.

Если $Q(t, s)$ и $f(t)$ — непрерывные функции, то при любых значениях параметра λ непрерывное решение уравнения Вольтерры второго рода (1.11.5) существует, и оно единственное. Для уравнения Фредгольма второго рода (1.11.4) при тех же требованиях единственное непрерывное решение существует, например, при условии, что

$$|\lambda| < \frac{1}{C(b-a)}, \quad (1.11.7)$$

где $C = \max_{t, s \in [a, b]} |Q(t, s)|$.

При снижении требований к гладкости возможных решений условие (1.11.7) ослабляется. Например, для функций, интегрируемых с квадратом, в роли достаточного условия фигурирует неравенство

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b Q^2(t, s) dt ds}}. \quad (1.11.8)$$

Известны формулы (или совокупности формул), позволяющие найти точное решение $x(t)$. Например, решение уравнения Вольтерры, с λ с мультипликативным ядром

$$Q(t, s) = p(t)s(t) \quad (1.11.9)$$

вычисляется по формуле:

$$x(t) = \int_a^t R(t, s) f(s) ds + f(t), \quad (1.11.10)$$

где

$$R(t, s) = p(t)q(s)e^{\int_t^s p(\xi)q(\xi)d\xi}. \quad (1.11.11)$$

Решение уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$Q(t, s) = \sum_{i=1}^m p_i(t) q_i(s) \quad (1.11.12)$$

имеет вид:

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^m z_i p_i(t) + f(t), \quad (1.11.13)$$

где числа z_i — решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} z_1 - \lambda c_{1,1} z_1 - \lambda c_{1,2} z_2 - \dots - \lambda c_{1,m} z_m = d_1; \\ z_2 - \lambda c_{2,1} z_1 - \lambda c_{2,2} z_2 - \dots - \lambda c_{2,m} z_m = d_2; \\ \vdots \\ z_1 - \lambda c_{m,1} z_1 - \lambda c_{m,2} z_2 - \dots - \lambda c_{m,m} z_m = d_m, \end{cases} \quad (1.11.14)$$

$$\text{где } c_{ij} = \int_a^b q_i(s) p_j(s) ds, \quad d_i = \int_a^b q_i(s) f(s) ds.$$

Условие существования и единственности решения уравнения Фредгольма с вырожденным ядром, очевидно, зависит от значения определителя $D(\lambda)$ системы линейных алгебраических уравнений (1.11.14), называемого *определителем Фредгольма*. Если $D(\lambda) \neq 0$, то решение существует и единственно.

Наличие методов нахождения точного решения интегрального уравнения с вырожденным ядром позволяет построить приближенный метод, в основе которого лежит замена одного уравнения другим, ядро которого вырождено и в некотором смысле близко к ядру исходного уравнения. Данная замена ядра опирается на различные способы локальной аппроксимации функций, зависящих от двух переменных. Помимо упомянутого выше метода замены ядра на вырожденное, известен ряд других приближенно-аналитических методов решения интегральных уравнений, например, метод последовательных приближений, метод моментов и др. Подробное описание этих и других методов можно найти в [15, 24—29].

Далее мы рассмотрим численные методы решения интегральных уравнений, в основе которых лежит замена интеграла в интегральном уравнении конечной суммой, используя какую-либо квадратурную формулу. Это позволяет свести решение исходной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений, число которых определяется числом узлов временной сетки. Методы решения интегральных уравнений, основанные на данном подходе, называются *квадратурными методами* или *методами конечных сумм*.

Преимущество данных методов состоит в простоте их реализации. Отметим, что без каких-либо изменений данные методы можно применять для решения нелинейных интегральных уравнений, имея в виду, что в этом случае приходится решать систему нелинейных алгебраических уравнений.

1.11.2. Квадратурный метод решения интегральных уравнений Фредгольма

Заменим определенный интеграл (1.11.4) его приближенным значением, вычисляемым с помощью квадратурной формулы:

$$\int_a^b \varphi(s) ds \approx \sum_j^n A_j \varphi(s_j), \quad (1.11.15)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$ — номера узлов временной сетки; A_j — весовые коэффициенты квадратурной формулы.

Подставив правую часть приближенного равенства (1.11.15) с $\varphi(s) = Q(t, s) \cdot x(s)$ вместо интеграла в уравнение Фредгольма второго рода (1.11.4), получим

$$x(t) \approx \lambda \sum_{j=1}^n A_j Q(t, s_j) x(s_j) + f(t). \quad (1.11.16)$$

Выражение (1.11.16) задает функцию, описывающую приближенное решение интегрального уравнения (1.11.4). Введем на отрезке $[a, b]$ дискретную временную сетку $t_1, t_2, \dots, t_n$, узлы которой совпадают с узлами сетки $s_1, s_2, \dots, s_n$. Для каждого момента времени t_j выполняется равенство

$$x(t_i) \approx \lambda \sum_{j=1}^n A_j Q(t_i, s_j) x(s_j) + f(t_i), \quad (1.11.17)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Введем обозначения $Q_{i,j} = Q(t_j, s_j)$, $f_i = f(t_i)$, $x_i = x(t_i)$ и запишем (1.11.17) в виде системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} (1 - \lambda A_1 Q_{1,1}) x_1 - \lambda A_2 Q_{1,2} x_2 - \dots - \lambda A_n Q_{1,n} x_n = f_1; \\ (1 - \lambda A_2 Q_{2,1}) x_1 - \lambda A_2 Q_{2,2} x_2 - \dots - \lambda A_n Q_{2,n} x_n = f_2; \\ \vdots \\ (1 - \lambda A_n Q_{n,1}) x_1 - \lambda A_2 Q_{n,2} x_2 - \dots - \lambda A_n Q_{n,n} x_n = f_n, \end{cases} \quad (1.11.18)$$

для решения которой можно использовать любой из методов, подробно обсуждавшихся в лекции № 3.

Таким образом, нахождение решения уравнения Фредгольма второго рода осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Задать временную сетку t_i .
2. Вычислить значения функции $f(t)$ в узлах временной сетки.
3. Вычислить элементы матрицы, составленной из коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений.
4. Решить систему линейных уравнений.

Пример 1.11.3.

Решение в пакете Mathcad интегрального уравнения:

$$x(t) = \int_1^2 \frac{x(s) ds}{\sqrt{t+s^2}} + \sqrt{t+1} - \sqrt{t+4} + t \quad (\text{точное решение } x(t) = t).$$

1. Задание функции $Q(t, s)$:

$$Q(t, s) := \frac{1}{\sqrt{t+s^2}} \quad \lambda := 1$$

2. Задание функции $f(t)$:

$$f(t) := \sqrt{t+1} - \sqrt{t+4} + t$$

3. Задание временной сетки:

$$x1 := 1 \quad x2 := 2$$

$$N := 300 \quad i := 0..N-1$$

$$h := \frac{x2 - x1}{N - 1}$$

$$t_i := x1 + h \cdot i \quad s := t$$

4. Задание коэффициентов квадратурной формулы метода трапеций:

$$A_i := 1 \quad A_0 := \frac{1}{2} \quad A_{N-1} := \frac{1}{2}$$

5. Вычисление значений функции $Q(t, s)$ в узлах сетки:

$$j := 0..N-1$$

$$q_{ij} := Q(t_i, s_j)$$

6. Вычисление значений функции $f(t)$ в узлах временной сетки:

$$F_i := f(t_i)$$

7. Вычисление элементов матрицы системы линейных уравнений (рис. 1.11.2).

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..N-1 \\ \quad \quad M_{i,j} \leftarrow 1 - \lambda \cdot A_i \cdot q_{i,j} \cdot h \text{ if } i = j \\ \quad \quad M_{i,j} \leftarrow -\lambda \cdot A_i \cdot q_{i,j} \cdot h \text{ otherwise} \end{cases}$$

Рис. 1.11.2. Вычисление элементов матрицы системы линейных уравнений (файл M.mcd)

8. Решение системы линейных уравнений:

$$x := M^{-1} \cdot F$$

9. Построение графика решения (рис. 1.11.3).

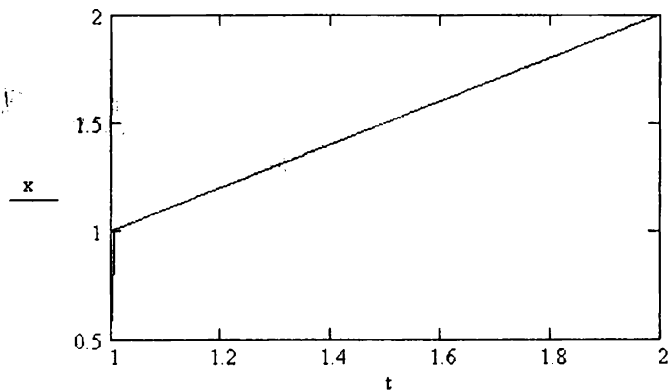


Рис. 1.11.3. Решение дифференциального уравнения

$$x(t) = \int_1^2 \frac{x(s) ds}{\sqrt{t+s^2}} + \sqrt{t+1} - \sqrt{t+4} + t$$

Точность численного решения интегрального уравнения зависит от нескольких факторов: применяемой квадратурной формулы, числа узлов временной сетки, свойств функции $Q(t, s)$. В ряде книг приводятся аналитические выражения, позволяющие оценить максимальную погрешность численного реше-

ния при использовании различных вычислительных схем [24, 25, 27, 28]. Однако эти оценки оказываются малопригодными из-за их громоздкости, поэтому на практике используют менее строгий метод контроля точности численного решения — *принцип Рунге*. Данный принцип состоит в сравнении численных решений, полученных на временных сетках с шагом $2h$ и h , в одних и тех же узлах временной сетки. Абсолютное значение разности данных решений характеризует величину погрешности численного решения. Недостаток данного подхода состоит в том, что при данном способе контроля приходится ограничиваться квадратурными формулами, пригодными только для сеток с равномерным шагом.

Важно понимать, что необходимо согласовывать выбор конкретной квадратурной формулы (точнее порядок ее точности) со степенью гладкости ядра интегрального уравнения. Если ядро и свободный член оказываются недостаточно гладкими, то для вычисления интеграла не следует применять высокоточные квадратуры, а лучше ограничиться такими формулами, как формулы трапеций и прямоугольников.

Данное замечание иллюстрирует рис. 1.11.4, на котором представлено решение уравнения из примера 1.11.3, полученное при использовании квадратурной формулы Симпсона.

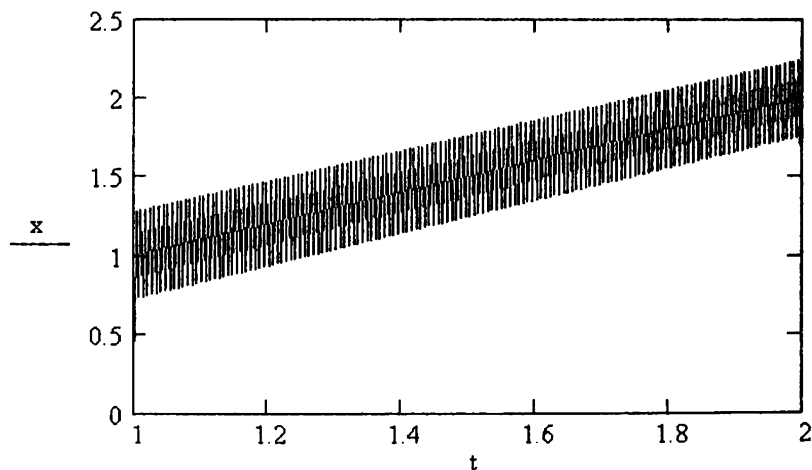


Рис. 1.11.4. Численное решение интегрального уравнения

$$x(t) = \int_1^2 \frac{x(s)ds}{\sqrt{t+s^2}} + \sqrt{t+1} - \sqrt{t+4} + t,$$

полученное при использовании формулы Симпсона

Листинг программы, возвращающей значение коэффициентов в формуле Симпсона, представлен на рис. 1.11.5.

```

A :=
  A0 ←  $\frac{1}{3}$ 
  AN-1 ←  $\frac{1}{3}$ 
  k ← 0
  for i ∈ 1..N-2
    if k = 0
      Ai ←  $\frac{4}{3}$ 
      k ← 1
    otherwise
      Ai ←  $\frac{2}{3}$ 
      k ← 0
  A

```

Рис. 1.11.5. Листинг программы, возвращающей значения коэффициентов в формуле Симпсона (файл A.mcd)

1.11.3. Квадратурный метод решения интегральных уравнений Вольтерры

Так как параметр λ в линейных интегральных уравнениях Вольтерры, в отличие от уравнения Фредгольма, не несет такой нагрузки, положим его равным единице и будем численно решать уравнение

$$x(t) = \int_a^t Q(t, s)x(s)ds + f(t), \quad (1.11.19)$$

где $t \in [a, b]$.

Учитывая, что уравнение Вольтерры формально можно считать уравнением Фредгольма вида:

$$x(t) = \int_a^t Q(t, s)x(s)ds + f(t) \quad (1.11.20)$$

с ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} Q(t, s) & \text{при } a \leq s \leq t \leq b; \\ 0 & \text{при } a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \quad (1.11.21)$$

для нахождения решения рассматриваемого уравнения воспользуемся результатами предыдущего раздела.

Введем в рассмотрение временную сетку $s_i \in [a, b]$, состоящую из n узлов, и выберем конкретную квадратурную с весами A_j , тогда приближенное решение интегрального уравнения принимает вид (1.11.17). Составим систему линейных алгебраических уравнений, аналогичную системе (1.11.18), которая в силу свойств ядра интегрального уравнения (1.11.21) вырождается в треугольную:

$$\begin{cases} (1 - A_1 Q_{1,1})x_1 = f_1; \\ -A_1 Q_{2,1}x_1 + (1 - A_2 Q_{2,2})x_2 = f_2; \\ \vdots \\ -A_1 Q_{n,1}x_1 - A_2 Q_{n,2}x_2 - \dots + (1 - A_n Q_{n,n})x_n = f_n. \end{cases} \quad (1.11.22)$$

Из (1.11.22) видно, что искомые значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ находятся последовательными вычислениями по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{f_1}{1 - A_1 Q_{1,1}}; \quad (1.11.23)$$

$$x_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_j Q_{i,j} x_j}{1 - A_i Q_{i,i}}, \quad (1.11.24)$$

где $i = 2, \dots, n$.

Пример 1.11.4.

Решение в пакете Mathcad интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^t t \cos^2(t s^3) x(s) ds + t^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tg}(t^4) \quad (\text{точное решение уравнения } x = t^2).$$

1. Задание функции $f(t)$:

$$f(t) := t^2 - \frac{1}{3} \tan(t^4)$$

2. Задание функции $Q(t, s)$:

$$Q(t, s) := t \cdot \cos(t \cdot s^3)^2$$

3. Задание временной сетки:

$$t1 := 0 \quad t2 := 0.5$$

$$N := 300 \quad i := 1..N-1 \quad j := i$$

$$h := \frac{t2 - t1}{N - 1} \quad t_i := t1 + h \cdot i \quad s := t$$

4. Задание коэффициентов квадратурной формулы метода трапеций:

$$A_i := 1 \quad A_0 := 0.5 \quad A_{N-1} := 0.5$$

5. Вычисление значений ядра интегрального уравнения в узлах временной сетки:

$$q_{i,j} := Q(t_i, s_j)$$

6. Вычисление значений функции $f(t)$ в узлах временной сетки:

$$F_i := f(t_i)$$

7. Нахождение численного решения в соответствии с (1.11.23), (1.11.24):

$$x_0 = \frac{F_0}{1 - A_0 Q_{0,0}}$$

$$m := 1..N-1$$

$$x_m := \frac{F_m + \sum_{j=0}^{m-1} A_j Q_{m,j} x_j}{1 - A_m Q_{m,m}}$$

8. Визуализация решения интегрального уравнения (рис. 1.11.6).

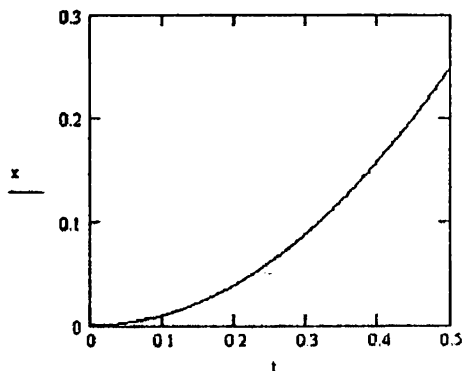


Рис. 1.11.6. Решение интегрального уравнения $x(t) = \int_0^t t \cos^2(ts^3) x(s) ds + t^2 - \frac{1}{3} \lg(t^4)$

9. Оценка параметров решения методом наименьших квадратов:

$$a := \text{regress}(t, x, 2)$$

$$a_3 = -1.679 \times 10^{-6} \quad a_4 = -7.675 \times 10^{-6} \quad a_5 = 1$$

(решение уравнения имеет вид $x(t) := a_3 + a_4 \cdot t + a_5 \cdot t^2$).

Получим расчетные формулы для решения уравнения Вольтерры первого рода (1.11.5) при использовании метода средних прямоугольников. Решения уравнения будем находить в узлах временной сетки

$$t_1 = a + h, t_2 = t_1 + h, \dots, t_i = t_{i-1} + h. \quad (1.11.25)$$

Подставляя (1.11.25) в (1.11.4), получаем равенства

$$\int_a^{t_i} Q(t_i, s) x(s) ds = f(t_i). \quad (1.11.26)$$

Из (1.11.26) видно, что в данном случае условие совпадения узлов квадратур s_i с узлами временной сетки t_i не является обязательным, поэтому их можно выбрать посередине элементарных промежутков интегрирования $[t_{i-1}, t_i]$ (рис. 1.11.7). Выбор данной сетки означает, что

$$x_1 \approx x(s_1), x_2 \approx x(s_2), \dots, x_n \approx x(s_n). \quad (1.11.27)$$

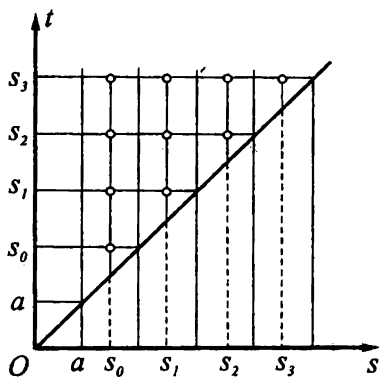


Рис. 1.11.7. К иллюстрации метода средних прямоугольников

Учитывая выбор квадратурной формулы и условия (1.11.27), запишем (1.11.26) в следующем виде:

$$hQ(t_1, s_1) x_1 = f(t_1);$$

$$hQ(t_2, s_1) x_1 + hQ(t_2, s_2) x_2 = f(t_2);$$

$$hQ(t_3, s_1)x_1 + hQ(t_3, s_2)x_2 + hQ(t_3, s_3)x_3 = f(t_3); \quad (1.11.28)$$

где

$$s_i = t_i - \frac{h}{2}.$$

Из равенств (1.11.28) последовательно находим:

$$x_1 = \frac{f(t_1)}{hQ(t_1, s_1)}; \quad (1.11.29)$$

$$x_i = \frac{f(t_i) - h \sum_{j=1}^{i-1} Q(t_i, s_j)x_j}{hQ(t_i, s_i)}, \quad (1.11.30)$$

где $i = 2, 3, \dots$

Пример 1.11.5.

Решение в пакете Mathcad интегрального уравнения

$$\int_1^t (t^2 + s^2 + 1)x(s)ds = t^2 - \frac{1}{t} \quad (\text{точное решение уравнения } x(t) = \frac{1}{t^2}).$$

1. Задание функции $f(t)$:

$$f(t) := t^2 - \frac{1}{t}$$

2. Задание функции $Q(t, s)$:

$$Q(t, s) := t^2 + s^2 + 1$$

3. Задание временной сетки:

$$t1 := 0 \quad t2 := 1.3$$

$$N := 300 \quad i := 1..N-1 \quad j := i$$

$$h := \frac{t2 - t1}{N - 1} \quad t_i := t1 + h \cdot i \quad s_i := t_i + \frac{h}{2}$$

4. Вычисление значений ядра интегрального уравнения в узлах временной сетки:

$$m := 1..N-2 \quad n := m$$

$$Q_{0,0} := Q(t_0, s_0) \quad q_{m,n} := Q(t_m, s_n)$$

5. Вычисление значений функции $f(t)$ в узлах временной сетки:

$$F_0 := f(t_1) \quad F_{i+1} := f(t_i)$$

6. Вычисление значений решения интегрального уравнения в соответствии с (1.11.29), (1.11.30):

$$x_0 = \frac{F_0}{h \cdot q_{0,0}}$$

$$x_m := \frac{F_m - h \cdot \sum_{j=0}^{m-1} q_{m,j} \cdot x_j}{h \cdot q_{m,m}}$$

7. Визуализация численного решения интегрального уравнения (рис. 1.11.8).

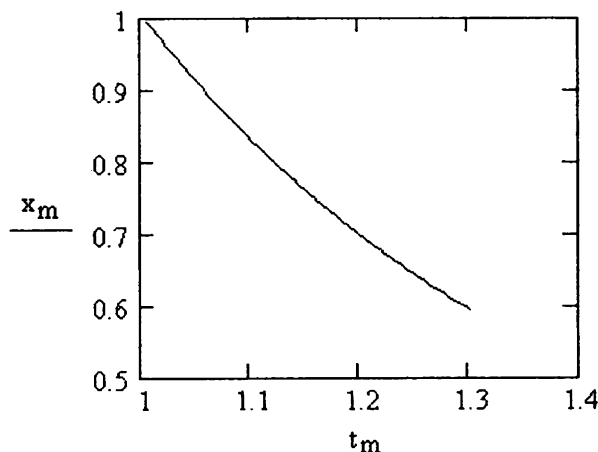


Рис. 1.11.8. Решение интегрального уравнения $\int_1^t (t^2 + s^2 + 1)x(s)ds = t^2 - \frac{1}{t}$

Для использования квадратурных формул замкнутого типа и совпадающей системы узлов возникает проблема вычисления значения $x_1 \approx x(t_1) = x(s_1) = x(a)$, которая не возникала при решении уравнений Вольтерры второго рода. Действительно, при $i = 1$ равенство (1.11.26) теряет всякий смысл.

Для нахождения начального значения x_1 продифференцируем уравнение (1.11.5) по t :

$$Q(t, t)x(t) + \int_a^t Q'_t(t, s)x(s)ds = f'(t). \quad (1.11.31)$$

Положив в (1.11.31) $t = a$, получим:

$$Q(a, a)x(a) = f'(a). \quad (1.11.32)$$

Откуда следует, что

$$x(a) = \frac{f'(a)}{Q(a, a)},$$

следовательно,

$$x_1 = \frac{f'(a)}{Q_{11}}. \quad (1.11.33)$$

При использовании квадратурной формулы трапеций далее получаем:

$$\frac{h}{2}Q_{2,1}x_1 + \frac{h}{2}Q_{2,2}x_2 = f_2 \Rightarrow x_2 = \frac{f_2 - \frac{h}{2}Q_{2,1}x_1}{\frac{h}{2}Q_{2,2}},$$

$$\frac{h}{2}Q_{3,1}x_1 + hQ_{3,2}x_2 + \frac{h}{2}Q_{3,3}x_3 = f_3 \Rightarrow x_3 = \frac{f_3 - \frac{h}{2}Q_{3,1}x_1 - hQ_{3,2}x_2}{\frac{h}{2}Q_{3,3}},$$

т. е. в общем случае при любом $j = 2, 3, \dots$

$$x(s_j) \approx x_j = \frac{f_j - \frac{h}{2}Q_{j,1}x_1 - h \sum_{k=2}^{j-1} Q_{j,k}x_k}{\frac{h}{2}Q_{j,j}}. \quad (1.11.34)$$

Пример 1.11.6.

Решение в пакете Mathcad интегрального уравнения

$$\int_1^t (t^2 + s^2 + 1)x(s)ds = t^2 - \frac{1}{t}$$

на совпадающей системе узлов (точное решение уравнения $x(t) = \frac{1}{t^2}$).

1. Задание функции $f(t)$:

$$f(t) := t^2 - \frac{1}{t}$$

2. Задание функции $Q(t, s)$:

$$Q(t, s) := t^2 + s^2 + 1$$

3. Задание временной сетки:

$$t_1 := 0 \quad t_2 := 1.3$$

$$N := 300 \quad i := 1..N-1 \quad j := i$$

$$h := \frac{t_2 - t_1}{N - 1} \quad t_i := t_1 + h \cdot i \quad s := t$$

4. Задание функции, возвращающей значение производной функции $f(t)$:

$$w(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

5. Вычисление значений функции $f(t)$ в узлах временной сетки:

$$m := 1..N-1 \quad n := m$$

$$F_0 := w(t_0)$$

$$F_m := f(t_m)$$

6. Вычисление значений ядра интегрального уравнения в узлах временной сетки:

$$q_{m,n} := Q(t_m, s_n)$$

7. Вычисление значений решения интегрального уравнения в соответствии (1.11.33), (1.11.34):

$$x_0 := \frac{F_0}{q_{0,0}}$$

$$x_1 := \frac{F_1 - \frac{h}{2} \cdot q_{1,0} \cdot x_0}{\frac{h}{2} \cdot q_{1,1}}$$

$$m := 2..N-1$$

$$y_m := \frac{F_m - \frac{h}{2} \cdot q_{m,0} \cdot y_0 - h \cdot \sum_{k=1}^{m-1} q_{m,k} \cdot y_k}{\frac{h}{2} \cdot q_{m,m}}$$

8. Визуализация численного решения (рис. 1.11.9).

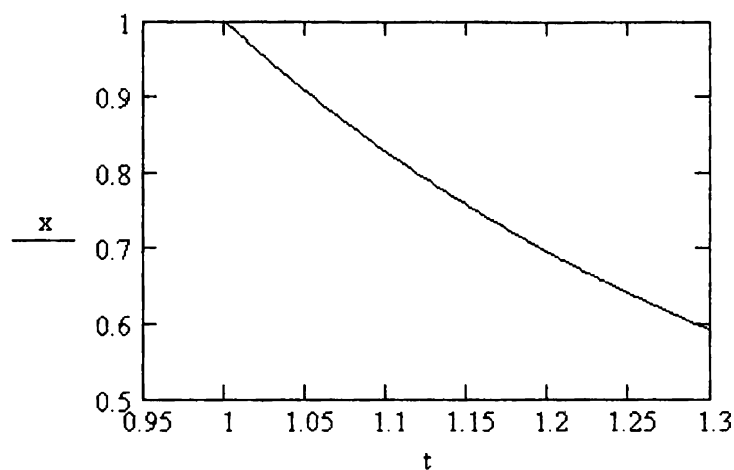
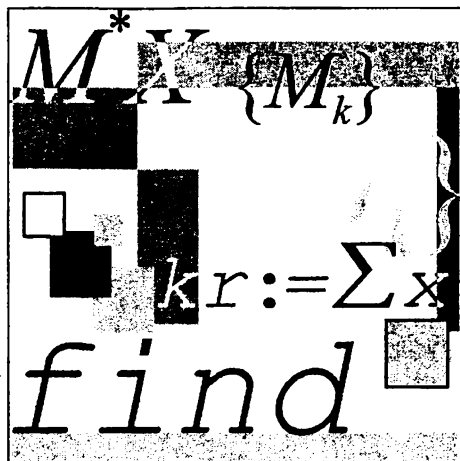


Рис. 1.11.9. Решение уравнения

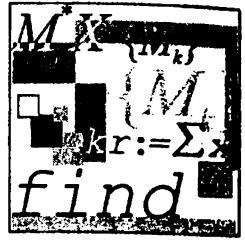
$$\int_1^t (t^2 + s^2 + 1)x(s)ds = t^2 - \frac{1}{t}$$

с использованием квадратурных формул



Часть II

Лабораторные работы



Лабораторная работа № 1

Теория приближенных вычислений

Цель работы: сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций, решения обратной задачи теории погрешностей и нахождения значений выражений по способу границ и методом строгого учета абсолютных погрешностей после каждой операции.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 17—32.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1960. — С. 17—52.
3. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Техника вычислений и алгоритмизация. — М.: Просвещение, 1987. — С. 52—77.
4. Лапчик М. П. Вычисления. Алгоритмизация. Программирование. — М.: Просвещение, 1988. — С. 59—84.
5. Пулькин С. П. Теория и практика вычислений. — М.: Наука, 1967. — С. 30—83.

2.1.1. Абсолютная и относительная погрешности

Пример 2.1.1.

Если $x = 0,00006$, а $\bar{x} = 0,00005$, то $e_x = 0,00001$, а $\delta_x = 0,2$ или 20%

Пример 2.1.2.

Если $x = 100500$, а $\bar{x} = 100000$, то $e_x = 500$, а $\delta_x = 0,005$ или 0,5%

То есть, в строгом смысле действительно верны цифры 2 и 3.

Пример 2.1.5.

Пусть $x = 984,6$, $\delta_x = 0,008$. Определить количество верных цифр в числе x .

Решение.

Очевидно, что $0,008 < 0,01 = 10^{-2}$. Это означает, что число x имеет, по крайней мере, одну верную в строгом смысле цифру (цифра 9). Полученный результат легко подтвердить, используя определение цифры, верной в строгом смысле.

Вычислим $e_x = 984,6 \cdot 0,008 = 7,8768$. Полученная абсолютная погрешность не превышает половину единицы разряда сотен. Откуда следует, что цифра 9 действительно верна в строгом смысле, как по относительной погрешности, так и по абсолютной.

Пример 2.1.6.

Пусть $x = 24,307$, $\delta_x = 0,005 \%$. Определить все верные цифры числа.

Решение.

$\delta_x = 0,00005 = 0,5 \cdot 10^{-4}$, значит, в x , по крайней мере, четыре цифры верны в строгом смысле. Вычислим $\Delta x = 24,307 \cdot 0,00005 = 0,00121535 < 0,005$.

То есть верными цифрами будут являться цифры 2, 4, 3, 0.

Пример 2.1.7.

Дано число $x = 24,010$. Цифры верны в строгом смысле. Указать границы его абсолютной и относительной погрешности.

Решение.

Из определения цифры, верной в строгом смысле, можно заключить, что абсолютная погрешность числа x не превосходит половины единицы разряда тысячных. Значит $e_x = 0,0005$.

Относительную погрешность найдем по формуле:

$$\delta_x = \left| \frac{e_x}{x} \right| = \frac{0,0005}{24,010} = 0,2 \cdot 10^{-4} = 0,2 \cdot 10^{-2} \%$$

Пример 2.1.8.

При взвешивании двух грузов получили следующие значения их масс $x = 0,5$ кг, $y = 50$ кг. Считая абсолютную погрешность взвешивания

равной 1 г, определить относительную погрешность измерения масс тел x , y . Какое из тел взвешено более точно?

Решение.

Относительную погрешность найдем по формулам:

$$\delta_x = \left| \frac{e_x}{x} \right| = \frac{0,001}{0,5} = 2 \cdot 10^{-3} = 0,2\%.$$

$$\delta_y = \left| \frac{e_y}{y} \right| = \frac{0,001}{50} = 2 \cdot 10^{-5} = 0,002\%.$$

Более точно измерен груз весом 50 кг.

2.1.2. Погрешность округленного числа

Пример 2.1.9.

Округляя число $x = 1,1426$ до четырех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближений. Цифры верны в широком смысле.

Решение.

Округлим число x до четырех значащих цифр: $x_1 = 1,143$.

По определению верной цифры в широком смысле абсолютная погрешность $e_x = 0,0001$.

Погрешность округленного числа равна сумме погрешности исходного числа и погрешности округления

$$\Delta_{\text{окр}} = |1,143 - 1,1426| = 0,0004;$$

$$e_{x_1} = 0,0004 + 0,0001 = 0,0005;$$

$$\delta_x = \left| \frac{e_{x_1}}{x_1} \right| = \frac{0,0005}{1,143} = 0,000437 < 0,04\%.$$

Пример 2.1.10.

Число x , все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата x_1 вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешности $x = 1,1426$.

Решение примера 2.1.10 представлено на рис. 2.1.2.

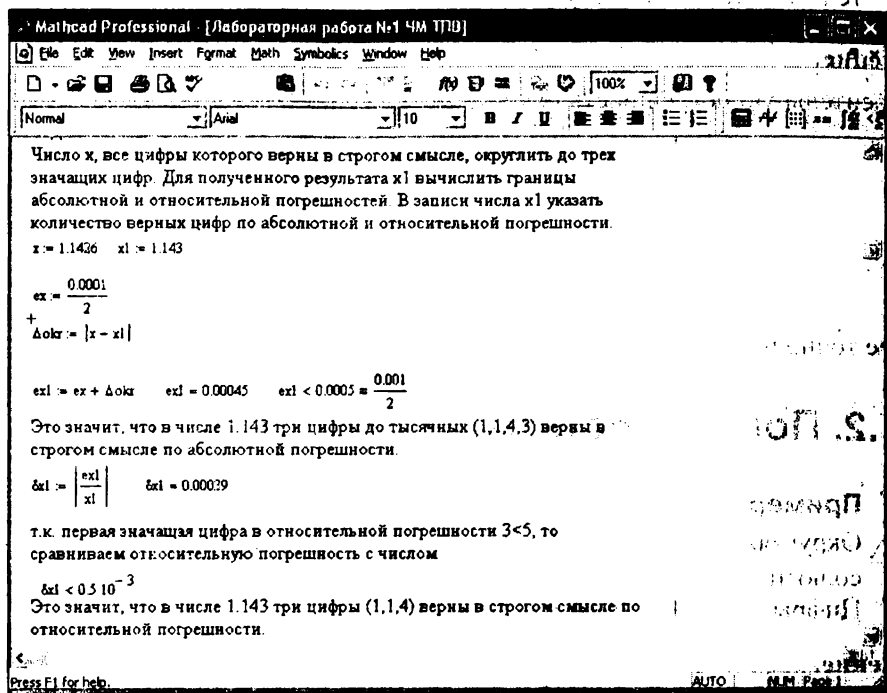


Рис. 2.1.2. Фрагмент рабочего документа к выполнению примера 2.1.10

Пример 2.1.11.

Со сколькими верными в строгом смысле десятичными знаками после запятой нужно взять:

а) $\sqrt{19,35}$;

б) $\sin(0,9)$;

в) $\frac{1}{17,5}$;

г) $\ln(1,25)$,

чтобы относительная погрешность не превышала 0,1%.

Решение.

а) $\sqrt{19,35} = 4,3931765$.

Относительная погрешность $\delta_x \leq 0,001 = 10^{-3}$. Значит, число $\sqrt{19,35}$, по крайней мере, имеет две верные в строгом смысле цифры.

$\Delta x = 4,3931765 \cdot 10^{-3} = 0,00439 < 0,005$. Следовательно, цифры 4 и 3 действительно верны в строгом смысле, поэтому правильный ответ $\sqrt{19,35} \approx 4,39$.

б) $\sin(0,9) = 0,7833269$.

Относительная погрешность $\delta_x \leq 0,001 = 10^{-3}$. Значит, число $\sin(0,9)$, по крайней мере, имеет две верные в строгом смысле цифры.

$\Delta x = 0,7833269 \cdot 10^{-3} = 0,000733 > 0,0005$. Следовательно, цифры 5, 7 и 3 действительно верны в строгом смысле, поэтому правильный ответ $\sin(0,9) = 0,783$

в) $\frac{1}{17,5} = 0,0571429$.

Относительная погрешность $\delta_x \leq 0,001 = 10^{-3}$. Значит, число $\frac{1}{17,5}$, по крайней мере, имеет две верные в строгом смысле цифры.

$\Delta x = 0,0571429 \cdot 10^{-3} = 0,000057 > 0,00005$. Следовательно, цифры 5 и 7 действительно верны в строгом смысле, поэтому правильный ответ $\frac{1}{17,5} = 0,057$.

г) $\ln(1,25) = 0,223144$.

Относительная погрешность $\delta_x \leq 0,001 = 10^{-3}$. Значит, число $\ln(1,25)$, по крайней мере, имеет две верные в строгом смысле цифры.

$\Delta x = 0,223144 \cdot 10^{-3} = 0,00022 < 0,0005$. Следовательно, цифры 2, 2, 3, 1 действительно верны в строгом смысле, поэтому правильный ответ $\ln(1,25) = 0,2231$.

2.1.3. Погрешности арифметических действий

Пример 2.1.12.

Найти сумму приближенных чисел, абсолютные погрешности которых даны. В ответе сохранить верные цифры и одну сомнительную.

$x = 7,12 \pm 0,01$, $y = 8,27 \pm 0,01$.

Решение.

Найдем сумму данных чисел $x + y = 7,12 + 8,27 = 15,39$.

Для определения количества верных цифр найдем абсолютную погрешность суммы $e_{x+y} = 0,01 + 0,01 = 0,02$. Данное число показывает, что в числе 15,39 верными будут цифры до разряда десятых, т. е. цифры 1, 5 и 3. И т. к. мы отбрасываем число 9, большее пяти, то результат сложения будет 15,4.

По относительной погрешности можно получить более строгую оценку количества верных цифр:

$$\delta_x = \frac{0,01}{7,12} = 0,0014 \text{ и } \delta_y = \frac{0,01}{8,27} = 0,0012.$$

Тогда

$$\delta_{x+y} = \frac{7,12}{15,39} \cdot 0,0014 + \frac{8,27}{15,39} \cdot 0,0012 = 0,0012 < 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

То есть в числе 15,39 цифры 1, 5 верны в строгом смысле.

Ответ: 15.

Пример 2.1.13.

Найти разность чисел, цифры которых верны в строгом смысле. В ответе сохранить верные цифры и одну сомнительную.

$$x = 13,876, \quad y = 11,82.$$

Решение.

Так как цифры данных чисел верны в строгом смысле, то их абсолютные погрешности не превосходят единицы разряда, в котором записана последняя верная цифра числа. Поэтому $e_x = 0,0005$, $e_y = 0,005$.

Относительная погрешность чисел x и y соответственно равна:

$$\delta_x = \frac{0,0005}{13,876} = 0,00004;$$

$$\delta_y = \frac{0,005}{11,82} = 0,0004.$$

Найдем разность чисел $x - y = 13,876 - 11,82 = 2,056$.

Найдем абсолютную погрешность полученной разности. Она будет равна

$$e_{x-y} = 0,0005 + 0,005 = 0,0055 < 0,05.$$

То есть в числе 2,056 цифры 2 и 0 верны в строгом смысле.

Найдем относительную погрешность разности. Она будет равна

$$\delta_{x-y} = \frac{13,876}{2,056} \cdot 0,00004 + \frac{11,82}{2,056} \cdot 0,0004 = 0,0025 \leq 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Действительно, две первые цифры верны в числе 2,056.

Ответ: 2,06.

2.1.4. Погрешности элементарных функций

Пример 2.1.14.

Исходные числовые значения аргумента заданы цифрами, верными в строгом смысле. Найти абсолютную и относительную погрешности функции. Определить количество верных цифр в строгом смысле по относительной погрешности в следующих элементарных функциях:

а) $\cos(0,47)$;

б) $y = e^{-3,1}$;

в) $y = \sqrt{21,51}$;

г) $y = \ln(68,214)$.

Решение.

а) Находим значение величины x . Оно будет равно 0,891568.

Абсолютная погрешность аргумента $e_{0,47} = 0,005$. Тогда абсолютная и относительная погрешности величины x равны:

$$e_{\cos(0,47)} = |\sin(0,47)| \cdot 0,005 = 0,00226443;$$

$$\delta_{\cos(0,47)} = |\tan(0,47)| \cdot 0,005 = 0,00253983 \leq 0,005 = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Это означает, что в числе 0,891568 две цифры после запятой верны в строгом смысле.

Ответ: 0,892.

б) Находим значение величины y . Оно будет равно 0,0450492.

Абсолютная погрешность аргумента $e_y = 0,05$. Тогда абсолютные и относительные погрешности величины y равны:

$$e_y = |e^{-3,1}| \cdot 0,05 = 0,0225246;$$

$$\delta_y = 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1}.$$

Это означает, что в числе 0,0450492 одна цифра после запятой верна в строгом смысле.

Ответ: 0,04.

в) Находим значение величины y . Оно будет равно 4,6378875.

Абсолютная погрешность аргумента $e_y = 0,005$. Тогда абсолютные и относительные погрешности величины y равны:

$$e_y = \frac{0,005}{\sqrt{21,51}} = 1,078077 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_y = \frac{0,005}{21,51} = 2,3245002 \cdot 10^{-4} < 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Это означает, что в числе 4,6378875 три цифры после запятой верны в строгом смысле.

Ответ: 4,6378.

г) Находим значение величины y . Оно будет равно 4,2226498

Абсолютная погрешность аргумента $e_y = 0,0005$. Тогда абсолютные и относительные погрешности величины y равны:

$$e_y = \frac{0,0005}{68,234} = 7,3298736 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_y = \frac{0,0005}{68,214 \cdot \ln(68,214)} = 1,7358469 \cdot 10^{-6} < 0,5 \cdot 10^{-5}.$$

Это означает, что в числе 4,2226498 пять цифр после запятой верны в строгом смысле.

Ответ: 4,222649.

Пример 2.1.15.

Вычислить значение величины с помощью метода строгого учета границ абсолютных погрешностей после каждой операции

$$A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln(a)}, \text{ если } a = 12,34, b = 14,3.$$

Решение.

При пооперационном строгом учете ошибок промежуточные результаты после округления до одной запасной (с учетом вычисленной параллельно величины погрешности) и их погрешности заносят в табл. 2.1.1.

Таблица 2.1.1. Расчетная таблица для вычисления погрешности выражения $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln(a)}$

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\ln(a)$	$b + \ln(a)$	A
12,34	14,3	3,513	3,78	7,30	2,5129	16,81	0,434
e_a	e_b	$e_{\sqrt{a}}$	$e_{\sqrt{b}}$	$e_{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	$e_{\ln(a)}$	$e_{b + \ln(a)}$	e_A
0,005	0,05	0,00071	0,0066	0,0073	0,0004	0,05041	0,0017

Значения погрешностей для удобства округлим до двух значащих цифр по избытку и тоже занесем в таблицу.

Цифры даны верными в строгом смысле, значит, $e_a = 0,005$, $e_b = 0,05$.

Найдем $\sqrt{12,34} = 3,51283$. Абсолютная погрешность равна (воспользуемся табл. 2.1.1):

$$e_a = \frac{0,005}{2 \cdot \sqrt{12,34}} = 0,0007117 \approx 0,00071.$$

Из полученного значения погрешности видно, что в результате верны две значащие цифры после запятой, т. е.

$$\sqrt{12,34} = 3,51283 \approx 3,513.$$

Это число внесем в таблицу.

Найдем абсолютную погрешность $\sqrt{14,3} = 3,781534$.

Она будет равна $e_b = \frac{0,05}{2 \cdot \sqrt{14,3}} = 0,0066107 \approx 0,0066$.

Значит, в числе b будет одна верная цифра после запятой.

Аналогично, находим значения всех остальных действий и функций:

$$e_{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 0,00071 + 0,0066 = 0,00731 \approx 0,0073;$$

$$e_{\ln(a)} = \frac{0,005}{12,34} = 0,000405 \leq 0,0005;$$

$$e_{b+\ln(a)} = 0,05 + 0,000405 = 0,050405 \leq 0,5;$$

$$e_A = \frac{16,8 \cdot 0,0073 + 7,30 \cdot 0,05}{16,8^2} = \frac{0,8764}{282,24} = 0,0017.$$

Округляя результат A до верной цифры, получаем окончательный ответ.

Ответ: $A = 0,434 \pm 0,002$.

2.1.5. Способ границ

Способ границ используется для точного определения границ искомого значения функции, если известны границы измерения ее аргументов.

Пример 2.1.16.

Алюминиевый цилиндр с диаметром основания $d = (3 \pm 0,001)$ см и высотой $h = (10 \pm 0,002)$ см весит $p = (95,5 \pm 0,001)$ г. Определить удельный вес γ алюминия и оценить предельную абсолютную погрешность найденного удельного веса.

Решение.

1 способ.

Объем цилиндра равен:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

отсюда

$$\gamma = \frac{p}{V} = \frac{4p}{\pi d^2 h}.$$

Из полученной формулы вытекает, что в области $p > 0$, $d > 0$, $h > 0$ функция γ — возрастающая по аргументу p и убывающая по аргументам d и h .

Имеем:

$$2,999 < d < 3,001;$$

$$9,998 < h < 10,002;$$

$$95,499 < p < 95,501;$$

$$3,14159 < \pi < 3,1416.$$

Тогда для значения γ получим:

$$\underline{\gamma} = \frac{4 \cdot 95,499}{3,1416 \cdot 3,001 \cdot 10,002^2} = 1,350 \text{ г/см}^3 \text{ (нижняя граница);}$$

$$\overline{\gamma} = \frac{4 \cdot 95,501}{3,14159 \cdot 2,999 \cdot 9,998^2} = 1,352 \text{ г/см}^3 \text{ (верхняя граница).}$$

Взяв среднее арифметическое, получим значение γ , равное

$$\gamma = (1,351 \pm 0,002) \text{ г/см}^3.$$

Ответ: $\gamma = (1,351 \pm 0,002) \text{ г/см}^3$.

2 способ.

Используя средние значения аргументов, получим:

$$\underline{\gamma} = \frac{4 \cdot 95,5}{3,1416 \cdot 3 \cdot 10^2} = 1,351 \text{ г/см}^3.$$

Логарифмируя формулу для вычисления объема цилиндра, имеем:

$$\ln \gamma = \ln 4 + \ln p - \ln \pi - 2 \ln d - \ln h.$$

Взяв полный дифференциал, получим:

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta \pi}{\pi} - \frac{2 \Delta d}{d} - \frac{\Delta h}{h};$$

$$\delta_\gamma = \delta_p + \delta_\pi + 2\delta_d + \delta_h = \frac{0,001}{95,5} + \frac{0,00001}{3,1416} + \frac{2 \cdot 0,001}{3} + \frac{0,002}{10} = 8,803 \cdot 10^{-4}.$$

Далее находим:

$$\Delta_\gamma = \delta_\gamma \cdot \gamma = 8,803 \cdot 10^{-4} \cdot 1,351 = 1,2 \cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, имеем:

$$\gamma = (1,351 \pm 0,001) \text{ г/см}^3,$$

что очень близко совпадает с точной оценкой, найденной по способу границ.

Ответ: $\gamma = (1,351 \pm 0,001) \text{ г/см}^3$.

Пример 2.1.17.

Найти предельные абсолютную и относительную погрешности вычисления объема шара по выражению $V = \frac{1}{6} \pi d^3$, если $d = 3,7 \pm 0,05 \text{ см}$, а

$$\pi = 3,14.$$

Решение.

Рассматривая d и π как переменные величины, вычисляем частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6} \cdot d^3 = 8,44;$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 = 21,5.$$

Используя формулу для вычисления погрешности функции, зависящей от двух переменных

$$|\Delta f| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y,$$

находим предельную абсолютную погрешность объема

$$\begin{aligned} \Delta_V &= \left| \frac{\partial V}{\partial \pi} \right| \cdot |\Delta \pi| + \left| \frac{\partial V}{\partial d} \right| \cdot |\Delta d| = 8,44 \cdot 0,0016 + 21,5 \cdot 0,05 = 0,013 + 1,075 = \\ &= 1,088 \text{ см}^3 \approx 1,1 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3 \approx (26,5 \pm 1,1) \text{ см}^3.$$

Отсюда предельная относительная погрешность определения объема

$$\delta_V = \frac{1,088 \text{ см}^3}{26,5 \text{ см}^3} = 0,041 \approx 4\%.$$

Ответ: $\Delta_V = 1,1 \text{ см}^3$, $\delta_V = 4\%$.

Пример 2.1.18.

Для определения модуля Юнга E по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула $E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 p}{a^3 b s}$, где l — длина стержня;

a и b — измерения поперечного сечения стержня; s — стрела прогиба; p — нагрузка. Вычислить предельную относительную погрешность при определении модуля Юнга E , если $p = 20$ кг; $\delta_p = 0,1\%$; $a = 3$ мм; $\delta_a = 1\%$; $b = 44$ мм; $\delta_b = 1\%$; $l = 50$ см; $\delta_l = 1\%$; $s = 2,5$ см; $\delta_s = 1\%$.

Решение.

$$\ln E = 3 \ln l + \ln p - 3 \ln a - \ln b - \ln s - \ln 4.$$

Отсюда, заменяя приращения дифференциалами, будем иметь:

$$\frac{\Delta E}{E} = 3 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta p}{p} - 3 \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta s}{s}.$$

Следовательно,

$$\delta_E = 3\delta_l + \delta_p + 3\delta_a + \delta_b + \delta_s = 3 \cdot 0,01 + 0,001 + 3 \cdot 0,01 + 0,01 + 0,01 \approx 0,081.$$

Таким образом, относительная погрешность составит не более 0,081, т. е. примерно 8% от измеряемой величины.

Ответ: $\delta_E \approx 8\%$.

Пример 2.1.19.

Вычислить значение величины z с помощью Mathcad при заданных значениях a, b и c с систематическим учетом абсолютных погрешностей после каждой операции, если цифры верны в строгом смысле.

$$z = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{b + \ln(a)}, \quad a := 12,34 \quad b := 14,3.$$

Решение.

Алгоритм решения представлен на рис. 2.1.3—2.1.5

Для получения значения величины z необходимо выполнить 6 действий.
Будем вычислять абсолютную погрешность после каждого действия с целью определения количества верных цифр в промежуточных результатах.
Т.к. цифры верны в строгом смысле, то абсолютные значения данных чисел a, b равны соответственно:

$$ea := \frac{0.01}{2} \quad ea = 0.005 \quad eb := \frac{0.1}{2} \quad eb = 0.05$$

1) $a1 := \sqrt{a} \quad a1 = 3.5128336141$
 $eal := \left| \frac{d}{da} \sqrt{a} \right| \cdot ea \quad eal = 0.0007 \quad eal < 0.005 = \frac{0.01}{2}$

Значит, в числе $a1$ верны цифры до сотых (т.е. 3, 5, 1, а остальные - сомнительные. т.е.
 $a1 := 3.513$ (сохраняем одну сомнительную цифру)

2) $b1 := \sqrt{b} \quad b1 = 3.7815340802$
 $ebl := \left| \frac{d}{db} \sqrt{b} \right| \cdot eb \quad ebl = 0.0066 \quad ebl < 0.05 = \frac{0.1}{2}$

Значит, в числе $b1$ верны цифры до десятых (т.е. 3, 7, а остальные - сомнительные. т.е.
 $b1 := 3.78$ (сохраняем одну сомнительную цифру)

Press F1 for help. AUTO NUM Page 2

Рис. 2.1.3. Первый этап решения задачи примера 2.1.19

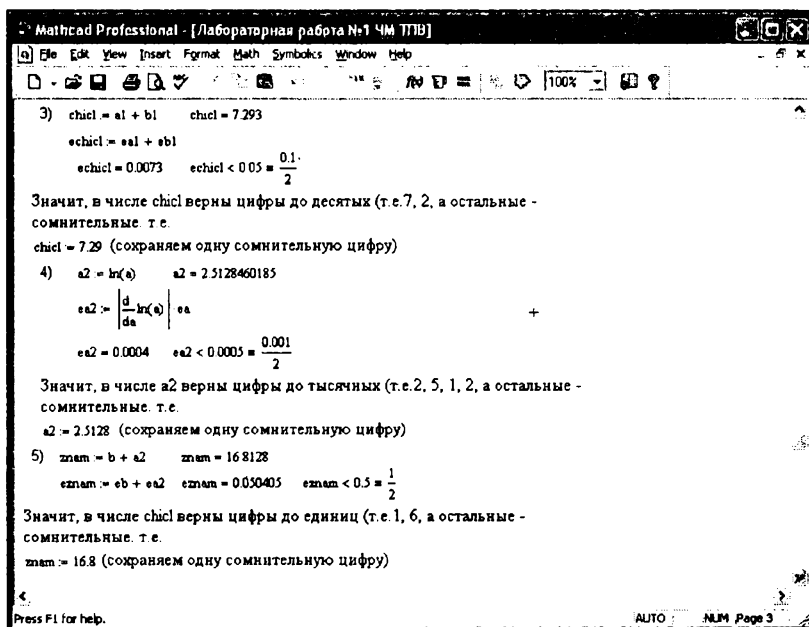


Рис. 2.1.4. Второй этап решения задачи примера 2.1.19

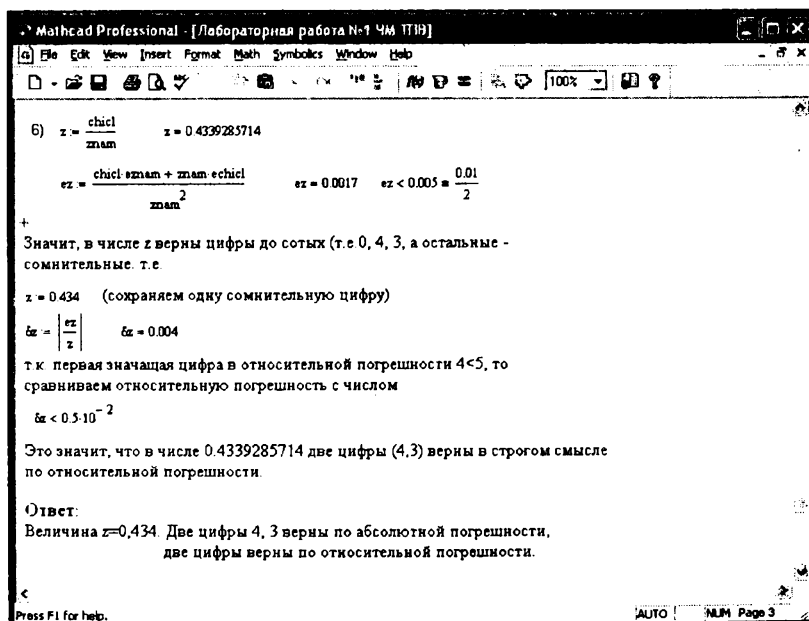


Рис. 2.1.5. Третий этап решения задачи примера 2.1.19

2.1.6. Обратная задача теории погрешностей

На практике очень часто необходимо уметь решать обратную задачу: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины.

Пусть величина предельной абсолютной погрешности Δ_u задана.

Тогда

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

Предполагая, что все слагаемые равны между собой, будем иметь:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| \Delta_{x_2} = \dots = \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n} = \frac{\Delta_u}{n}.$$

Отсюда

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}.$$

В случае, когда предельная абсолютная погрешность всех аргументов x_i одинакова и та же, то

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|};$$

$$\Delta_{x_i} = \frac{|x_i| \Delta_u}{\sum_{j=1}^n \left| x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|}.$$

Пример 2.1.20.

Радиус основания цилиндра $R \approx 2$ м; высота цилиндра $H \approx 3$ м. С какими абсолютными погрешностями нужно определить R и H , чтобы объем цилиндра V можно было вычислить с точностью до $0,1 \text{ м}^3$?

Решение.

Объем вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$ и $\Delta_V = 0,1 \text{ м}^3$. Подставляя все исходные данные, приближенно получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 H = 12;$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R H = 37,7;$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2 = 12,6.$$

Отсюда, т. к. $n = 3$, то, воспользовавшись формулой для вычисления погрешности функции, зависящей от трех переменных

$$|\Delta f| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z,$$

будем иметь:

$$\Delta_\pi = \frac{0,1}{3 \cdot 12} < 0,003;$$

$$\Delta_R = \frac{0,1}{3 \cdot 37,7} < 0,001;$$

$$\Delta_H = \frac{0,1}{3 \cdot 12,6} < 0,003.$$

Таблица 2.1.2. Погрешности значений элементарных функций

Функция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$\sqrt{x}$	$\frac{e_x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2}\delta_x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{e_x}{x^2}$	$\frac{e_x}{ x }$
$\sin(x)$	$ \cos(x) \cdot e_x$	$ \operatorname{ctg}(x) \cdot e_x$
$\cos(x)$	$ \sin(x) \cdot e_x$	$ \operatorname{tg}(x) \cdot e_x$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{e_x}{\cos^2(x)}$	$\frac{2e_x}{ \sin(2x) }$

Таблица 2.1.2 (окончание)

Функция	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$\ln(x)$	$\frac{e_x}{x}$	$\frac{\delta_x}{ \ln(x) }$
$\lg(x)$	$\frac{e_x}{x \cdot \ln(10)}$	$\frac{\delta_x}{ \lg(x) \cdot \ln(10)}$
e^x	$e^x \cdot e_x$	$x \cdot \delta_x$
10^x	$10^x \cdot \ln(10) \cdot e_x$	$\ln(10) \cdot e_x$
x^y	$x^y \left(y \cdot \frac{e_x}{x} + \ln(x) \cdot e_y \right)$	$ y \ln(x) \cdot \delta_y + y \cdot \delta_x$
$\arcsin(x)$	$\frac{e_x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e_x}{ \arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2} }$
$\arccos(x)$	$\frac{e_x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{e_x}{ \arcsin(x) \cdot \sqrt{1-x^2} }$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{e_x}{1+x^2}$	$\frac{e_x}{ \operatorname{arctg}(x) \cdot (1+x^2)}$

2.1.7. Вопросы по теме

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируются виды ошибок?
3. Что значит цифра, верная в строгом, широком смысле?
4. Как находится погрешность округленного числа?
5. Как определить количество верных цифр по относительной погрешности приближенного числа?
6. Как распространяются абсолютная и относительная погрешности в арифметических действиях?
7. Как осуществить оценку погрешности значений элементарных функций?
8. Как формулируется обратная задача теории погрешности?

9. Каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины?
10. В каких случаях используется метод границ?

2.1.8. Задания к лабораторной работе № 1

Задание 2.1.1.

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры (табл. 2.1.3):

а) в строгом смысле;

б) в широком смысле.

Таблица 2.1.3. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

1	а) 11,445	б) 2,043	19	а) 0,4223	б) 0,57
2	а) 8,345	б) 0,288	20	а) 112,45	б) 3,4
3	а) 0,374	б) 4,348	21	а) 2,4516	б) 0,863
4	а) 41,72	б) 0,678	22	а) 5,6432	б) 0,00858
5	а) 18,357	б) 2,16	23	а) 12,688	б) 4,636
6	а) 14,862	б) 8,73	24	а) 15,644	б) 6,125
7	а) 0,3648	б) 21,7	25	а) 16,383	б) 5,734
8	а) 0,5746	б) 236,58	26	а) 18,275	б) 0,00644
9	а) 5,634	б) 0,0748	27	а) 3,75	б) 6,8343
10	а) 20,43	б) 0,576	28	а) 26,3	б) 4,8556
11	а) 12,45	б) 3,4453	29	а) 43,813	б) 0,645
12	а) 2,3445	б) 0,745	30	а) 3,643	б) 72,385
13	а) 0,5746	б) 42,884	31	а) 3,425	б) 7,38
14	а) 3,4	б) 0,078	32	а) 0,573	б) 3,6761
15	а) 2,4342	б) 0,57004	33	а) 0,3825	б) 24,6
16	а) 112,5	б) 0,04453	34	а) 0,856	б) 23,508
17	а) 0,576,	б) 2,5008	35	а) 5,60234	б) 0,07
18	а) 25,613,	б) 0,0748	36	а) 20,4143	б) 0,51

Таблица 2.1.3 (окончание)

37	а) 12	б) 53,3	39	а) 92,451	б) 103,43
38	а) 2,35	б) 0,74015	40	а) 2010,345	б) 0,44745

Задание 2.1.2.

Число x (табл. 2.1.4), все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $x_1 \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешности.

Таблица 2.1.4. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№ варианта	x	№ варианта	x
1	3549	17	2,3143
2	32,147	18	0,012147
3	35,085	19	0,86129
4	7,544	20	0,1385
5	198,745	21	23,394
6	37,4781	22	0,003775
7	0,183814	23	718,21
8	0,009145	24	9,73491
9	11,3721	25	11,456
10	0,2538	26	0,1495
11	10,2118	27	6,2358
12	4,394	28	4,4005
13	0,8437	29	2,3078
14	129,66	30	3,2175
15	48,847	31	0,0002568
16	9,2038	32	37,8455

Таблица 2.1.4 (окончание)

№ варианта	x	№ варианта	x
33	0,09872	37	0,029056
34	3,00971	38	4,7561
35	1,15874	39	0,003822
36	0,003711	40	0,095641

Задание 2.1.3.

Вычислить значение величины z (табл. 2.1.5) при заданных значениях чисел a , b и c используя систематический учет абсолютных погрешностей после каждой операции, а также с помощью метода границ. Найти абсолютную и относительную погрешности z и определить по ним количество верных цифр в z , если цифры a , b и c верны в строгом смысле.

Таблица 2.1.5. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№	Задание	Исходные данные	№	Задание	Исходные данные
1	$z = \frac{4\sqrt{a+b}}{ab-c}$	$a = 0,317$ $b = 3,27$ $c = 4,7561$	4	$z = \frac{ab-4c}{\ln(a)+3b}$	$a = 12,72$ $b = 0,34$ $c = 0,0290$
2	$z = \frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	$a = 0,0399$ $b = 4,83$ $c = 0,0721$	5	$z = \frac{a-\operatorname{tg}(b)}{13c+b}$	$a = 3,49$ $b = 0,845$ $c = 0,0037$
3	$z = \frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	$a = 1,0574$ $b = 1,40$ $c = 1,1236$	6	$z = \frac{ac+3b}{\sqrt{b-c}}$	$a = 0,0976^1$ $b = 2,371$ $c = 1,15887$

Таблица 2.1.5 (продолжение)

№	Задание	Исходные данные	№	Задание	Исходные данные
7	$z = \frac{\ln(a-b)}{\sqrt{b+c}}$	$a = 82,3574$ $b = 34,12$ $c = 7,00493$	14	$z = \frac{(a-c)^2}{\sqrt{a+3b}}$	$a = 11,7$ $b = 0,0937$ $c = 5,081$
8	$z = \frac{a^2 - b}{\sqrt{ab-c}}$	$a = 3,71452$ $b = 3,03$ $c = 0,756$	15	$z = \frac{\sqrt{b-c}}{\ln(a)+b}$	$a = 18,035$ $b = 3,7251$ $c = 0,071$
9	$z = \frac{b+\cos(c)}{3b+2a}$	$a = 0,11587$ $b = 4,256$ $c = 3,00971$	16	$z = \frac{\sqrt[3]{a-c}}{b+2\ln(a)}$	$a = 5,7568$ $b = 21,7$ $c = 2,65$
10	$z = \frac{(b-c)}{2a+b}$	$a = 4,05$ $b = 6,723$ $c = 0,03254$	17	$z = \frac{(a+4c)^3}{b-5a^2}$	$a = 5,33$ $b = 23,123$ $c = 8,802$
11	$z = \frac{\ln(b)-a}{a^2-12c}$	$a = 0,7219$ $b = 135,347$ $c = 0,013$	18	$z = \left(\frac{a+6b}{\ln(c)-a} \right)^3$	$a = 6,0031$ $b = 1,005$ $c = 1,6135$
12	$z = \frac{\ln(c)-10a}{\sqrt{bc}}$	$a = 0,113$ $b = 0,1056$ $c = 89,4$	19	$z = \left(\frac{2a+\cos(b)}{c-3b} \right)^2$	$a = 0,037$ $b = 5,777$ $c = 3,441$
13	$z = \frac{10c+\sqrt{b}}{a^2-b}$	$a = 1,247$ $b = 0,346$ $c = 0,051$	20	$z = a^3 + 2\sin(b-\ln(c))$	$a = 8,317$ $b = 13,521$ $c = 6,123$

Таблица 2.1.5 (продолжение)

№	Задание	Исходные данные	№	Задание	Исходные данные
21	$z = \frac{b^2 + \ln(c)}{\sqrt{c-a}}$	$a = 0,038$ $b = 3,9353$ $c = 5,75$	29	$z = \frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	$a = 5,387$ $b = 13,527$ $c = 0,7565$
22	$z = \frac{\ln(a) + 3b}{ab-c}$	$a = 7,345$ $b = 0,31$ $c = 0,09871$	30	$z = \frac{a - \sin(c)}{b^2 + 6c}$	$a = 1,75$ $b = 1,215$ $c = 0,041$
23	$z = \frac{2\operatorname{tg}(a-b)}{a^2c+b}$	$a = 0,2471$ $b = 0,0948$ $c = 4,378$	31	$z = \frac{b - \sin(a)}{a+3c}$	$a = 3,672$ $b = 4,63$ $c = 0,0278$
24	$z = \frac{4\sqrt{a+c}}{ab-c}$	$a = 1,284$ $b = 4,009$ $c = 3,2175$	32	$z = \frac{a^3(c+b)}{a-b}$	$a = 13,57$ $b = 3,7$ $c = 4,226$
25	$z = \frac{\sin(a-\sqrt{b})}{c+\ln(b)}$	$a = 18,407$ $b = 149,12$ $c = 2,3078$	33	$z = \frac{\sqrt{ab}}{c} + a$	$a = 0,317$ $b = 13,57$ $c = 0,751$
26	$z = \frac{a \ln(b)}{\sin(\sqrt{a+c})}$	$a = 29,49$ $b = 87,878$ $c = 4,403$	34	$z = \frac{a+b}{a\sqrt{b-c}}$	$a = 0,317$ $b = 33,827$ $c = 14,85$
27	$z = \frac{0,8 \ln(b)}{\sqrt{a+bc}}$	$a = 74,079$ $b = 5,3091$ $c = 6,234$	35	$z = \frac{ab}{\cos(c-2a)}$	$a = 5,52$ $b = 3,27$ $c = 14,123$
28	$z = \frac{\sqrt{a}}{bc - \ln(c)}$	$a = 3,4$ $b = 6,22$ $c = 0,149$	36	$z = \frac{a\sqrt{b-c}}{a+c}$	$a = 9,542$ $b = 3,128$ $c = 0,17$

Таблица 2.1.5 (окончание)

№	Задание	Исходные данные	№	Задание	Исходные данные
37	$z = \frac{\sqrt{abc}}{\ln(a) - \operatorname{tg}(b)}$	$a = 9,79$ $b = 2,3327$ $c = 4,198$	39	$z = \frac{\operatorname{tg}(a + 4c)}{b^3}$	$a = 5,147$ $b = 6,222$ $c = 0,0075$
38	$z = \ln(a + 3\sqrt{c})^b$	$a = 6,66$ $b = 3,5$ $c = 1,141$	40	$z = \frac{\sin(a + \sqrt{b})}{a - \sin(c)}$	$a = 2,258$ $b = 0,027$ $c = 9,87$

Задание 2.1.4.

Решить следующие задачи, используя метод границ.

1. Длина воздушной трассы между двумя пунктами равна S км. Самолет преодолевает это расстояние за время t ч. Определить границы средней скорости самолета, если: $4950 \leq S \leq 5050$; $5,9 \leq t \leq 6,1$.
2. Электроплитка рассчитана на напряжение 220 ± 10 В. Найти сопротивление спирали электроплитки, если известно, что через нее должен пройти ток $5 \pm 0,1$ А.
3. Медный брусок имеет объем V м³ ($0,0064 \leq V \leq 0,0065$). Найти его массу, если плотность меди γ кг/м³ составляет $8899 \leq \gamma \leq 8901$.

Задание 2.1.5.

Решить следующие задачи, используя общую формулу погрешности.

1. Удельное электрическое сопротивление ρ металла круглого провода длиной l м с поперечным сечением d мм и сопротивлением R Ом определяется по формуле $\rho = \frac{\pi d^2 R}{4l}$. Найти ρ , если: $l = 12,50 \pm 0,01$ м, $d = 2,00 \pm 0,01$ мм, $R = 0,068 \pm 0,0005$ Ом, $\pi = 3,141 \pm 0,001$. Определить относительную погрешность ρ .

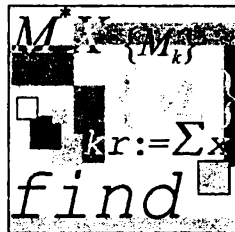
2. Вертикальный цилиндрический резервуар наполнен жидкостью. Определить время, необходимое для опорожнения резервуара через круглое отверстие в дне. Диаметр резервуара $D = 1 \pm 0,01$ м, высота уровня жидкости $H = 2 \pm 0,02$ м, диаметр отверстия дна $d = 0,03 \pm 0,001$ м, коэффициент расхода $\mu = 0,61 \pm 0,02$. Расчет (в секундах) ведется по формуле

$$\tau = \frac{D^2 \sqrt{H}}{\mu d^2 \sqrt{2g}}.$$

Задание 2.1.6.

Решить следующие задачи, используя обратную задачу теории погрешностей:

1. С какой точностью надо измерить радиус круга $R = 30,5$ см и каким количеством значащих цифр следует ограничиться для числа π , чтобы площадь круга была известна с точностью до 0,1%?
2. Длины сторон прямоугольника равны $a \approx 5$ м, $b \approx 200$ м. Какова допустимая предельная абсолютная погрешность при измерении этих величин одинаковая для обеих сторон, чтобы площадь S прямоугольника можно было определить с предельной абсолютной погрешностью $\Delta_S = 1 \text{ м}^2$?



Лабораторная работа № 2

Численные методы решения скалярных уравнений

Цель работы: сформировать у студентов представление о применении уравнений в различных областях деятельности, привить знания об основных этапах решения уравнения, выработать навыки использования различных методов для уточнения корня уравнения и выбора того или иного программного средства для проверки правильности найденного результата.

Литература

1. Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — С. 141—209.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 112—157.
3. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 6—23.
4. Ноздрин И. Н., Степаненко И. М., Костюк П. К. Прикладные задачи по высшей математике. — Киев: Вища школа, 1976. — С. 27.
5. Пулькин С. П. Теория и практика вычислений. — М.: Просвещение, 1967. — С. 127—157.

2.2.1. Метод хорд

Пример 2.2.1.

Решить уравнение $e^x \cdot (2 - x) - 0,5 = 0$ методом хорд с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение.

1. **Отделяем корни.** Этот этап решения осуществляется с помощью аналитического или графического метода. После того как корень, подлежащий уточнению, отделен, за начальное приближение может быть выбрана любая точка $[a, b]$ (начало отрезка, его середина и т. д.).

Воспользуемся графическим методом. Построим график функции и найдем точки пересечения его с осью Ox (рис. 2.2.1).

$$f(x) := (2 - x) \cdot e^x - 0,5$$

$$x := -4, -3,99 \dots 5$$

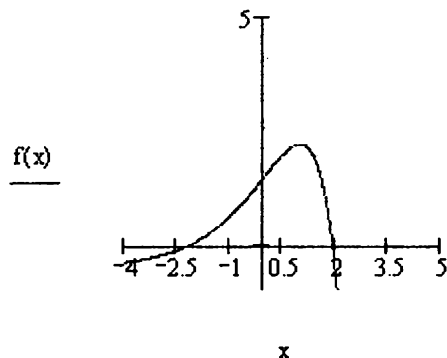


Рис. 2.2.1. Отделение корней графически

Получили два интервала: $[-3; -2]$, $[1,5; 2,5]$. Интервал, в котором мы будем уточнять корень — $[1,5; 2,5]$.

2. **Уточняем корни.** Находим первую производную функции $f(x) = e^x \cdot (2 - x) - 0,5$:

$$z(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

3. **Определяем знаки $f(x)$ на отрезке $[1,5; 2,5]$:**

$$f(1,5) = 1,741 > 0, \quad f(2,5) = -6,591 < 0.$$

Значит, на данном отрезке действительно существует корень нашего уравнения.

4. Строим последовательность значений с использованием рекуррентной формулы метода хорд и анализируем результаты вычисленных значений последовательности x_n (рис. 2.2.2). Для этого рассмотрим значения функции $dz(x_n)$ — эта величина является критерием достижения заданной точности $\varepsilon = 0,001$. Начиная с $n = 8$, значения x_n удовлетворяют критерию достижения заданной точности ($\varepsilon > 8,801 \cdot 10^{-4}$), значит, $x_8 = 1,927$ является решением нашего уравнения.

$n := 0..10$
 $x_0 := a$
 $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n) \cdot (b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$

$dz(x) := \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)}$

$ dz(x_n) =$	$x_n =$
0.777	1.5
0.283	1.709
0.117	1.823
0.051	1.879
0.022	1.905
$9.933 \cdot 10^{-3}$	1.917
$4.423 \cdot 10^{-3}$	1.923
$1.972 \cdot 10^{-3}$	1.925
$8.801 \cdot 10^{-4}$	1.926
$3.928 \cdot 10^{-4}$	1.927
$1.753 \cdot 10^{-4}$	1.927

Рис. 2.2.2. Проверка критерия достижения заданной точности

5. Создаем функцию, реализующую вычисления корня уравнения $e^x \cdot (2 - x) - 0,5 = 0$ на отрезке $[1,5; 2,5]$ с точностью $\varepsilon = 0,001$ методом хорд (рис. 2.2.3). Решением будет являться число 1,927, получившееся на третьем шаге решения.

$$\begin{aligned}
 \text{fhord}(a, b, \varepsilon) := & \left| \begin{array}{l} n \leftarrow 0 \\ az_n \leftarrow a \\ \text{while } \left| \frac{f(az_n)}{f_{1pr}(az_n)} \right| > \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} az_{n+1} \leftarrow az_n - \frac{f(az_n)(b - az_n)}{f(b) - f(az_n)} \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{l} n \\ az_n \end{array} \right) \end{array} \right. \\
 \text{fhord}(1.5, 2, 0.001) = & \left(\begin{array}{l} 3 \\ 1.927 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Рис. 2.2.3. Функция, возвращающая значения корня уравнения методом хорд. Аргументы функции: a, b — концы отрезка; ε — погрешность вычислений, $f_{1pr}(x)$ — функция первой производной

6. Проверяем решение (рис. 2.2.4)

$$\begin{aligned}
 1) \quad & x := 2 \\
 & x1 := \text{root}(f(x), x) \quad x1 = 1.927 \\
 2) \quad & \text{Given} \\
 & (2 - x) \cdot e^x - 0.5 = 0 \\
 & x2 := \text{Find}(x) \quad x2 = 1.927
 \end{aligned}$$

Рис. 2.2.4. Проверка решения уравнения встроенными функциями Mathcad

Ответ: корень уравнения по методу хорд равен 1,927 с точностью 0,001, найденный на третьем шаге.

2.2.2. Метод касательных

Пример 2.2.2.

Вычислить методом касательных корень уравнения $e^x \cdot (2 - x) - 0.5 = 0$ на отрезке $[1.5; 2.5]$ с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Решение.

1. Отделяем корни уравнения (см. разд. 2.2.1).

2. Определяем неподвижную точку.

Для этого определим знаки функции и второй производной на отделенном интервале $[1,5; 2,5]$. Для этого составим функцию, проверяющую условие неподвижности точки (рис. 2.2.5).

$$\begin{aligned}
 a &:= 1.5 \quad b := 2.5 \\
 f(x) &:= (2 - x) \cdot |e^x| - 0.5 \\
 f\_2pr(x) &:= \frac{d^2}{dx^2} f(x) \\
 nt &:= \begin{cases} a & \text{if } f(a) \cdot f\_2pr(a) \geq 0 \\ b & \text{otherwise} \end{cases} \\
 nt &= 2.5
 \end{aligned}$$

Рис. 2.2.5. Определение неподвижной точки

Тогда подвижной точкой будет точка $a = 1,5$.

3. Вычисляем значение итерационной последовательности с использованием рекуррентной формулы метода касательных (рис. 2.2.6).

$$x_0 := a \quad f\_1pr(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f\_1pr(x_i)}$$

$x_i =$	$\frac{f(x_i)}{f\_1pr(nt)}$
1.5	0.0953
2.2769	0.175
2.0199	0.0356
1.9353	$2.8536 \cdot 10^{-3}$
1.9273	$2.3666 \cdot 10^{-5}$
1.9272	$1.6692 \cdot 10^{-9}$
1.9272	

Рис. 2.2.6. Построение итерационной последовательности по методу касательных

Анализируя полученные значения для достижения критерия заданной точности, можно сказать, что решением уравнения будет значение $x_4 = 1,927$ при $n = 4$, т. к. $2,367 \cdot 10^{-5} < 0,001$.

4. Создаем функцию, реализующую метод касательных (аналогично методу хорд).
5. Проверяем полученные результаты.

Отметим, что в пакете Mathcad имеется еще несколько функций, позволяющих решать уравнения, например, функция `solve`, вызываемая с панели **Symbolic** (рис. 2.2.7).

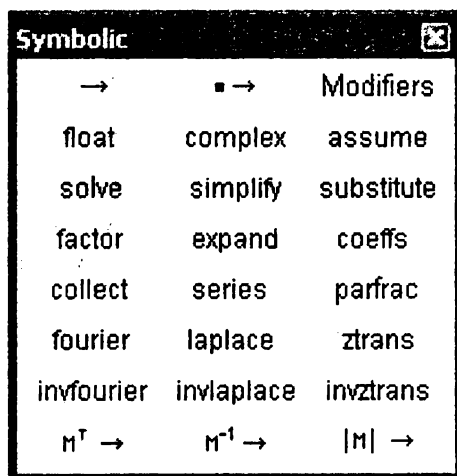


Рис. 2.2.7. Панель Symbolic

Пример использования команды `solve` представлен на рис. 2.2.8.

$$f(x) := (2 - x) \cdot |e^x| - 0.5$$

$$f(x) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1.9272241673439646537 \\ -2.1054665778767432584 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.2.8. Решение уравнения с помощью команды `solve`

2.2.3. Метод простой итерации

Пример 2.2.3.

Решить уравнение $e^x \cdot (2 - x) - 0,5 = 0$ методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение.

Схема решения уравнения методом простой итерации следующая.

1. Отделяем корни.
2. Приводим исходное уравнение к виду $x = f(x)$.

Заменяем уравнение $e^x \cdot (2 - x) - 0,5 = 0$ уравнением вида $x = x - m \cdot F(x)$.

Здесь величина m должна быть подобрана так, чтобы для функции $f(x)$ выполнялись условия 2 и 3 теоремы 1.2.2 о достаточном условии сходимости итерационного процесса.

Производная $F'(x)$ на отрезке $[1,5; 2,5]$ отрицательна, следовательно, функция $F(x)$ на этом отрезке монотонно убывает. Ее значения представлены на рис. 2.2.9.

$F(x) =$

1.7408
1.4812
1.1422
0.7099
0.1686
-0.5
-1.3166
-2.305
-3.4923
-4.9093
-6.5912

Рис. 2.2.9. Значения функции $F(x) = e^x \cdot (2 - x) - 0,5$ на отрезке $[1,5; 2,5]$

Тогда значения функции $f(x)$ будут равны:

$$f(1,5) = 1,5 - m \cdot 1,741;$$

$$f(2,5) = 2,5 - m \cdot (-6,591).$$

Учитывая монотонность функции $f(x)$, из последних равенств легко заметить, что условие 2 теоремы 1.2.2 будет заведомо выполнено, если m — правильная отрицательная дробь (рис. 2.2.10).

$$x := 1.5, 1.6 \dots 2.5$$

$$F(x) := (2 - x) \cdot e^x - 0.5$$

$$|f\_1pr(x)| = \maxf := \max(|f\_1pr(1.5)|, |f\_1pr(2.5)|)$$

2.241

$$\maxf = 18.274$$

2.972

3.832

$$m := \frac{-1}{\maxf}$$

4.84

$$m = -0.055$$

6.017

7.389

8.983

10.83

12.966

15.432

18.274

Рис. 2.2.10. Определение значения m

Поскольку производная $F'(x)$ на концах интервала $[1,5; 2,5]$ положительна ($F'(1,5) = 2,241$, $F'(2,5) = 18,274$) и монотонно возрастает, ее модуль имеет максимум на правом конце отрезка. Тогда если за m принять число $m = \pm \frac{1}{\max F'(2,5)} = -0,055$, то для любого x из отрезка $[1,5; 2,5]$

значение выражения будет правильной отрицательной дробью. Это обеспечивает выполнение условия 2 теоремы 1.2.2 (рис. 2.2.11).

Для выполнения условия 3 теоремы 1.2.2 найдем производную преобразованной функции

$$f'(x) = 1 - m \cdot (-e^x \cdot (2 - x) - e^x)$$

и ее значения на концах отрезка $[1,5; 2,5]$.

Условие 3 теоремы 1.2.2 выполнено: значения производных меньше единицы. За величину q возьмем число 0,877 (рис. 2.2.11).

$$f(x) := x - m \cdot F(x)$$

$f(x) =$	$q(x) := \frac{d}{dx} f(x)$	$ q(x) =$
1.595	$\max q := \max(q(a) , q(b))$	0.877
1.681		0.837
1.763	$q := \max q$	0.79
1.839		0.735
1.909	$q = 0.877$	0.671
1.973		0.596
2.028		0.508
2.074		0.407
2.109		0.29
2.131		0.155
2.139		0

Рис. 2.2.11. Определение значения q

3. Вычисляем значения итерационной последовательности $x_n = f(x_{n-1})$. В качестве начального значения возьмем, например, начало отрезка, точку $x_0 = 1,5$.

Критерием достижения заданной точности $\varepsilon = 0,001$ при решении нашего уравнения методом простой итерации является величина, равная $1,398 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2.2.12).

$$q = 0.877$$

$$A := \frac{\varepsilon \cdot (1 - q)}{q}$$

$$A = 1.398 \times 10^{-5}$$

Рис. 2.2.12. Определение критерия достижения заданной точности q

4. Строим итерационную последовательность (рис. 2.2.13).

$i := 1..25$

$x_0 := a$

$z(x) := x - m \cdot f(x)$

$x_i := z(x_{i-1})$

$|x_i - x_{i-1}| =$

	0
16	1.9263
17	1.9266
18	1.9268
19	1.927
20	1.9271
21	1.9271
22	1.9272
23	1.9272
24	1.9272
25	1.9272

5.0112·10 ⁻⁴
3.2686·10 ⁻⁴
2.1309·10 ⁻⁴
1.3889·10 ⁻⁴
9.0502·10 ⁻⁵
5.8966·10 ⁻⁵
3.8416·10 ⁻⁵
2.5026·10 ⁻⁵
1.6303·10 ⁻⁵
1.062·10 ⁻⁵

$x =$

Рис. 2.2.13. Построение итерационной последовательности по методу простой итерации

Для 24-го приближения получили, что $|x_{24} - x_{23}| < 1,398 \cdot 10^{-5} < A$. Отсюда следует, что $x_{23} = 1,92718$ является приближенным решением нашего уравнения.

- Создаем функцию, реализующую метод простой итерации, для решения уравнения $x = f(x)$ по методу простой итерации (составляется аналогично рассмотренным выше методам).
- Визуализируем решение уравнения методом простой итерации (рис. 2.2.14).

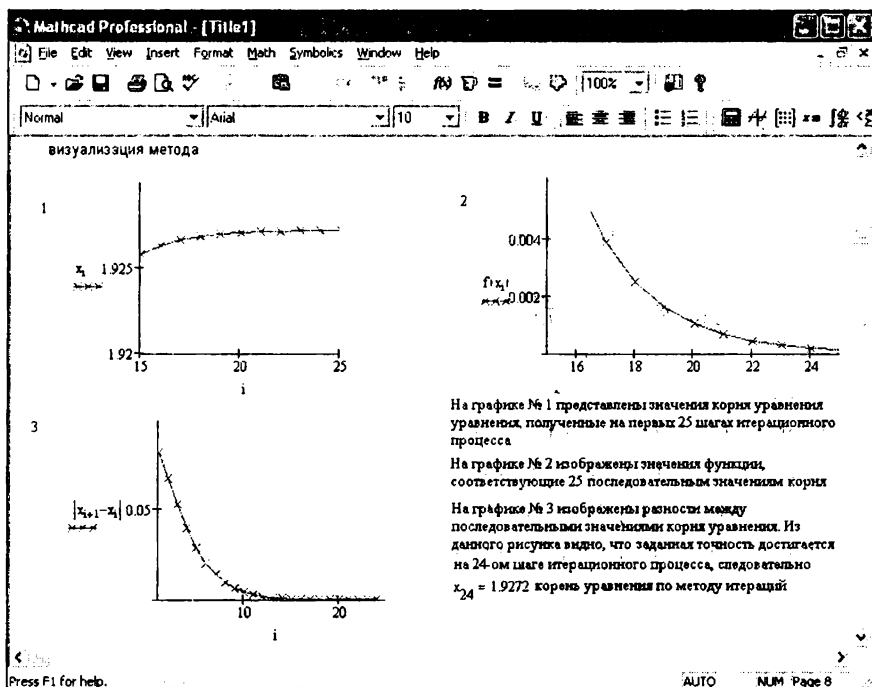


Рис. 2.2.14. Визуализация решения уравнения $F(x) = e^x \cdot (2 - x) - 0,5$

Ответ: решением уравнения будет число $x = 1,92718$, полученное на 24-м шаге.

2.2.4. Вопросы по теме

1. Что значит решить уравнение?
2. Каковы этапы решения уравнения с одной неизвестной численными методами?
3. Какие существуют методы решения уравнения с одной неизвестной?
4. В чем заключается этап отделения корней при использовании численных методов решения уравнения?
5. Суть метода хорд. Графическая интерпретация метода.
6. Суть метода касательных. Графическая интерпретация метода.
7. Суть метода простой итерации.
8. Какое уравнение можно решать методом простой итерации?
9. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения $x = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, содержащего корень, методом простой итерации?

10. Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении уравнения $x = f(x)$ методом хорд, касательных, итераций?
11. Записать формулу нахождения значений последовательности при решении уравнения методом: хорд, касательных.
12. Как строится итерационная последовательность точек при решении уравнения методом простой итерации?

2.2.5. Задания к лабораторной работе № 2

Задание 2.2.1.

1. При расчете воздушного стального провода получили уравнение для определения усилия натяжения при гололеде $F^3 + 443F^2 - 94,1 \cdot 10^5 = 0$. Найти положительный корень (усилие натяжения).
2. При решении вопроса об излучении абсолютно черного тела встречается уравнение $e^{-u} = -\frac{1}{5}u + 1$. Решить его.
3. Решить уравнение $x - e^{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$, которое встречается в задаче о наимыгоднейшей конструкции изоляции для труб.
4. Решить уравнение $\ln(u) = \alpha + \beta u^m$, $m > 0$, встречающееся в электротехнике.
5. Наибольшая скорость воды в трубе круглого сечения достигается тогда, когда центральный угол удовлетворяет уравнению $\operatorname{tg}(x) = x$. Определить этот угол.
6. В задаче о распределении тепла в стержне встречается уравнение $\operatorname{tg}(x) + \gamma x = 0$. Решить его.
7. При исследовании беспроволочного излучателя получено уравнение $x \operatorname{tg}(x) = c$, $c = \text{const}$. Для какого наименьшего положительного или отрицательного значения x постоянная равна 1.
8. Решить уравнение $2 \operatorname{tg}(x) = \frac{x}{p} - \frac{p}{x}$, которое встречается при решении задачи о распространении тепла в стержне при наличии лучеиспускания в окружающее пространство.
9. При определении критической нагрузки для балки, свободно опирающейся одним концом, закрепленной другим и сжимаемой продольной силой,

встречается уравнение $\operatorname{tg} \mu = \frac{p\mu}{p+\mu}$. Решить его при $p=2$, полагая, что $\mu = \pi + x$.

10. Площадь кругового сегмента, дуга которого α , определяется формулой $Q = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha)$ (α есть радианная мера дуги). Найти сегмент, площадь которого равна $1/5$ площади круга (найти сегмент — значит, найти угловую меру его дуги).
11. Прямоугольная стальная пластинка размерами 150×100 см и толщиной 0,5 см закреплена по краям и подвергается действию равномерно распределенной нагрузки, равной $0,25 \text{ кг/см}^2$. Стрела прогиба z определяется из уравнения $1,05z^3 + 0,70z = 96,4$. Найти z , решив данное уравнение (найти корень с четырьмя значащими цифрами).
12. Шар радиуса R разделить на m частей, равных по объему, путем проведения плоскостей, параллельных между собой ($m=5$; $m=10$). Отношение $\frac{h}{R}$ найти с пятью верными десятичными знаками (h — высота шарового слоя).
13. Найти корень уравнения $2 + e^{-x} = \frac{2}{x}$ с точностью до трех десятичных знаков (уравнения такого типа встречаются при изучении колебаний стержня под действием продольного удара).
14. Найти наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(x) = -0,6x$ с тремя верными десятичными знаками (уравнение встречается при изучении теплового режима в стенке).
15. Найти наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(x) = \frac{-0,6}{x}$ с тремя верными десятичными знаками.

Задание 2.2.2.

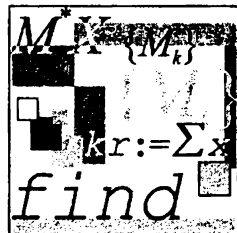
Решить уравнения, приведенные в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1. Варианты заданий для самостоятельного решения

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$	3	$(x-4)^2 \log_{0,5}(x-3) = -1$
2	$0,5^x + 1 = (x-2)^2$	4	$x^2 \cos(2x) = -1$

Таблица 2.2.1 (окончание)

№	Уравнение	№	Уравнение
5	$(x-2)^2 2^x = 1$	23	$\sin(0,5+x) = 2x-0,5$
6	$((x-2)^2 - 1)2^x = 1$	24	$\ln x + (x+1)^3 = 0$
7	$(x-2)\cos x = 1, -2\pi \leq x \leq 2\pi$	25	$3x - 2e^x = 1$
8	$(x-2)^3 \lg(x+11) = 1$	26	$2\sin(x-0.6) = 1,5-x$
9	$5\sin x = x-1$	27	$5x - 8\ln x = 8$
10	$x^4 \cdot 3^x = 2$	28	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$
11	$2\lg x - \frac{x}{3} + 1 = 0$	29	$1,8x^2 - \sin 10x = 0$
12	$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,5x^2 - 1$	30	$\operatorname{ctg}(1,05+x) - x^2 = 0$
13	$2x^2 - 0,5^x - 3 = 0$	31	$\operatorname{ctg} x - \frac{x}{5} = 1$
14	$\cos(x+0,5) = x^3$	32	$\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$
15	$2e^x = 5x+2$	33	$x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$
16	$\sin(x-0,5) - x + 0,8 = 0$	34	$0,5x + \lg(x-1) = 0,5$
17	$\operatorname{tg}^3 x = x-1, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	35	$\sin 0,5x + 1 = x^2$
18	$\operatorname{arctg}(x-1) + 2x = 0$	36	$2x + \lg x = -0,5$
19	$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + x^2 = 4x-3$	37	$(x-2)^2 = \frac{1}{2}e^x$
20	$x^2 - 5 + 0,4^{2x} = 0$	38	$x = \sqrt{\lg(x+2)} + 6$
21	$x - \sin x = 0,35$	39	$\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$
22	$\sqrt{x} - \cos(0,374+x) = 0$	40	$x^2 + 4\sin x = 0$



Лабораторная работа № 3

Численные методы решения систем линейных уравнений

Цель работы: сформировать у студентов представления о прямых и итерационных методах решения систем линейных уравнений, выработать умения составлять и применять алгоритмы и программы для решения систем уравнений, дать навыки в использовании программных средств для решения систем уравнений.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 250—323.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — С. 32—93.
3. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 24—61.
4. Ноздрин И. Н., Степаненко И. М., Костюк П. К. Прикладные задачи по высшей математике. — Киев: Вища школа, 1976. — С. 27.
5. Плис А. И., Сливина Н. А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2002. — С. 81—89.
6. Пулькин С. П. Вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1974. — С. 124—139.

2.3.1. Метод Гаусса—Жордана

Пример 2.3.1.

Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

методом Гаусса—Жордана с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение.

1. Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных A и матрицу свободных членов B (рис. 2.3.1).

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3.1. Ввод матриц A , B

2. Задаем функцию, реализующую метод Гаусса—Жордана. Аргументы функции: A — матрица коэффициентов при неизвестных, B — матрица свободных членов (рис. 2.3.2).

$$s(A, B) := \begin{cases} c \leftarrow \text{augment}(A, B) \\ d \leftarrow \text{rref}(c) \\ x \leftarrow \text{submatrix}(d, 0, 2, 3, 3) \end{cases}$$

$$s(A, B) = \begin{pmatrix} 1.694 \\ -4.49 \\ 2.857 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3.2. Функция, реализующая метод Гаусса—Жордана с использованием встроенных функций Mathcad

Функцию, которая будет реализовать метод Гаусса—Жордана без использования встроенных функций Mathcad, составить самостоятельно.

3. Проверяем решение с помощью встроенных функций Mathcad.

$$1) \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1.694 \\ -4.49 \\ 2.857 \end{pmatrix}$$

$$2) A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1.694 \\ -4.49 \\ 2.857 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad z := 0 \quad y := 0 \quad x := 0$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Given

$$A \cdot X = B$$

$$\text{Find}(X) = \begin{pmatrix} 1.694 \\ -4.49 \\ 2.857 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3.3. Проверка решения встроенными функциями Mathcad:

1) с помощью функции `lsolve`; 2) матричный способ;

3) с помощью блока `Given ... Find`

$$\text{Ответ: } x = \begin{pmatrix} 1,694 \\ -4,490 \\ 2,857 \end{pmatrix}.$$

2.3.2. Метод простой итерации

Пример 2.3.2.

Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение.

1. Приводим исходную систему к виду с преобладающими диагональными коэффициентами.

Для этого, например, первое уравнение запишем третьим, третье уравнение умножим на 2, вычтем второе и запишем на первом месте, а второе уравнение умножим на 2, вычтем первое и запишем на втором месте.

$$\begin{cases} \underline{6}x_1 - 2x_2 + x_3 = 22; \\ 3x_1 + \underline{6}x_2 + x_3 = -19; \\ x_1 + 2x_2 + \underline{5}x_3 = 7. \end{cases}$$

Коэффициенты, расположенные по диагонали и подчеркнутые, являются преобладающими по строке.

2. Составляем матрицы коэффициентов при неизвестных в левой части и свободных членов (рис. 2.3.4).

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 22 \\ -19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3.4. Ввод матриц A , B

3. Получаем преобразованную систему.

Разделим для этого каждое уравнение на свой диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное (рис. 2.3.5).

$$\begin{aligned} i &:= 0..2 & j &:= 0..2 \\ AA_{i,j} &:= \frac{-A_{i,j}}{A_{i,i}} & BB_i &:= \frac{B_i}{A_{i,i}} \\ AA_{i,i} &:= 0 \\ AA &= \begin{pmatrix} 0 & 0.333 & -0.167 \\ -0.5 & 0 & -0.167 \\ -0.2 & -0.4 & 0 \end{pmatrix} & BB &= \begin{pmatrix} 3.667 \\ -3.167 \\ 1.4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 2.3.5. Получение приведенной системы

Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = 3,667 + 0,333x_2 - 0,1667x_3; \\ x_2 = -3,167 - 0,5x_1 - 0,1667x_3; \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,4x_2. \end{cases}$$

Для обеспечения условий сходимости нужно получить систему так, чтобы коэффициенты в правой части системы были *суущественно* меньше единицы.

4. Проверяем одно из условий сходимости итерационного процесса.

Будем устанавливать сходимость, т. е. "погрузим" систему в пространство с одной из трех метрик: ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

В пакете Mathcad коэффициенты сжатия можно определить с помощью функций $\text{normi}(AA)$, $\text{norml}(AA)$, $\text{norme}(AA)$ (соответственно для ρ_1, ρ_2, ρ_3) (рис. 2.3.6) или воспользоваться формулами (рис. 2.3.7).

$$\alpha_1 := \text{normi}(AA) \quad \alpha_1 = 0.667$$

$$\alpha_2 := \text{norml}(AA) \quad \alpha_2 = 0.733$$

$$\alpha_3 := \text{norme}(AA) \quad \alpha_3 = 0.785$$

Рис. 2.3.6. Определение коэффициента сжатия встроенными функциями Mathcad

$$\max \left[\begin{array}{l} \sum (|\overrightarrow{AA^T}|)^{(0)} \\ \sum (|\overrightarrow{AA^T}|)^{(1)} \\ \sum (|\overrightarrow{AA^T}|)^{(2)} \end{array} \right] = 0.667 \quad \max \left[\begin{array}{l} \sum (|\overrightarrow{AA}|)^{(0)} \\ \sum (|\overrightarrow{AA}|)^{(1)} \\ \sum (|\overrightarrow{AA}|)^{(2)} \end{array} \right] = 0.733$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 (|AA_{i,j}|)^2} = 0.785$$

Рис. 2.3.7. Определение коэффициента сжатия с помощью формул

Заметим, что все коэффициенты меньше единицы, значит, систему можно "погрузить" в пространство с любой из метрик. Остановимся на пространстве с метрикой ρ_2 .

Итак, итерационный процесс сходится, причем $\alpha = 0,733$.

5. Находим критерий достижения заданной точности при решении системы уравнений методом простой итерации. Для достижения точности $\varepsilon = 0,001$ приближения нужно находить до тех пор, пока будет выполняться неравенство $\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| < E$ (рис. 2.3.8), т. е. расстояние между двумя соседними приближениями не должно превышать числа E .

$$\varepsilon := 0.001$$

$$E := \frac{\varepsilon \cdot |1 - \alpha_2|}{\alpha_2}$$

$$E = 3.636 \times 10^{-4}$$

Рис. 2.3.8. Определение критерия достижения заданной точности ε

6. Вычисляем значения итерационной последовательности (рис. 2.3.9).

$$k := 0..15$$

$$x^{(0)} := BV \quad x^{(k+1)} := BV + AA \cdot x^{(k)}$$

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x =$	0	1.685	1.702	1.696	1.694	1.694	1.694	1.694	1.694	1.694
	1	-4.461	-4.487	-4.492	-4.491	-4.49	-4.49	-4.49	-4.49	-4.49
	2	2.867	2.847	2.854	2.858	2.858	2.857	2.857	2.857	2.857

Рис. 2.3.9. Вычисление последовательности значений

7. Для определения, какое приближение будет являться решением, необходимо найти расстояния между двумя соседними приближениями по метрике ρ_2 (т. к. выбрано это пространство) (рис. 2.3.10).

$$\left| \langle x^{(k+1)} \rangle_0 - \langle x^{(k)} \rangle_0 \right| + \left| \langle x^{(k+1)} \rangle_1 - \langle x^{(k)} \rangle_1 \right| + \left| \langle x^{(k+1)} \rangle_2 - \langle x^{(k)} \rangle_2 \right|$$

3.8889
2.4178
0.2793
0.1735
0.0629
0.0178
$7.6521 \cdot 10^{-3}$
$9.7975 \cdot 10^{-4}$
$6.9838 \cdot 10^{-4}$
$2.3056 \cdot 10^{-4}$
$6.7746 \cdot 10^{-5}$
$3.0331 \cdot 10^{-5}$
$3.8341 \cdot 10^{-6}$
$2.7071 \cdot 10^{-6}$
$9.0579 \cdot 10^{-7}$
$2.6228 \cdot 10^{-7}$

Рис. 2.3.10. Проверка критерия достижения заданной точности по метрике ρ_2

Полученное десятое значение суммы модулей разностей коэффициентов при неизвестных, равное $2,306 \cdot 10^{-4} < E$, удовлетворяет условию критерия. Это значит, что в таблице значений x девятый столбец является решением системы уравнений методом простой итерации.

8. Визуализируем полученные значения (рис. 2.3.11).

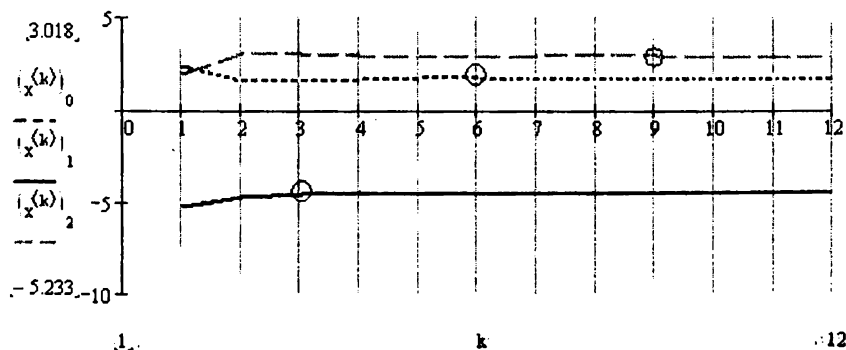


Рис. 2.3.11. Визуализация решения системы уравнений методом простой итерации

Графики показывают, что, начиная с $k=10$, все три линии перестают преломляться, а значит, десятое приближение будет являться решением нашей системы уравнений методом простой итерации.

Ответ: решением системы является вектор-столбец $x = \begin{pmatrix} 1,694 \\ -4,49 \\ 2,857 \end{pmatrix}$, полученный на десятом шаге итерации.

2.3.3. Метод Зейделя

Пример 2.3.3.

Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -6; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение.

1. Вводим матрицу коэффициентов при неизвестных и матрицу свободных членов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2. Транспонируем матрицу A , получим матрицу A^T (транспонированная матрица — это матрица, столбцы которой являются строками исходной матрицы).

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Умножаем левую и правую части исходной системы на матрицу A^T (рис. 2.3.12).
4. Получаем систему вида $x_i = \beta_j + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j$. Для этого разделим коэффици-

енты каждой строки матрицы M на соответствующий разрешающий элемент строки. Получим приведенную систему, к которой применим метод Зейделя (рис. 2.3.13).

$$\begin{aligned}
 AA_{i,j} &:= \frac{-M_{i,j}}{M_{i,i}} & BB_i &:= \frac{Q_i}{M_{i,i}} \\
 AA_{i,i} &:= 0 \\
 AA &= \begin{pmatrix} 0 & -0.667 & -0.905 \\ -0.667 & 0 & -1.143 \\ -0.5 & -0.632 & 0 \end{pmatrix} & BB &= \begin{pmatrix} 1.286 \\ -0.095 \\ 0.868 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.3.12. Вычисление коэффициентов преобразованной матрицы

```

Zeidel(n, ε, a, b, char) :=
  z_new ← 0
  xt(0) ← b
  max ← length(b) - 1
  for k ∈ 0..n
    z_old ← xt(k)
    for j ∈ 0..max
      z_new_j ← b_j + ∑ik=jmax aj,ik · z_old_ik + if (j = 0, 0, ∑il=0j-1 aj,il · z_new_il)
    xt(k+1) ← z_new
  for i ∈ 0..n
    break if |xt(i+1) - xt(i)| < ε
  if char = "otvet"
    for i ∈ 0..n
      break if |xt(i+1) - xt(i)| < ε
    a ← xt(i)
    amax+1 ← i
    a
  xt otherwise

```

Рис. 2.3.13. Получение приведенной системы. Входные параметры программы:

n — число шагов; ε — заданная точность; a, b — матрицы (преобразованные);

otvet — переменная, по которой функция *Zeidel* выдает корни уравнения;

любое другое ее значение — определяет множество шагов решения

5. Для решения системы уравнений, составим функцию, реализующую метод Зейделя (рис. 2.3.14).

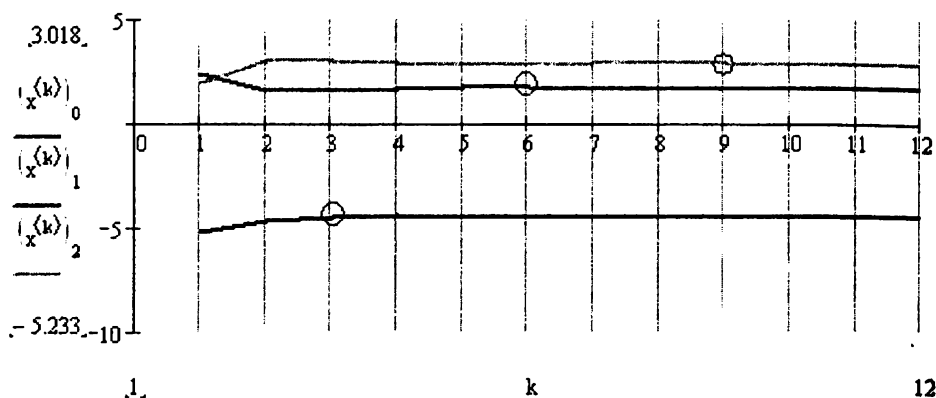


Рис. 2.3.14. Функция, реализующая метод Зейделя.

Ответ: решением системы трех линейных уравнений является вектор

$$x = \begin{pmatrix} 1,693 \\ -4,488 \\ 2,856 \end{pmatrix}, \text{ найденный на 19-ом шаге итерации.}$$

2.3.4. Вопросы по теме

1. Какие вы знаете группы методов решения систем линейных уравнений с n неизвестными?
2. Какие методы относятся к прямым методам решения систем линейных уравнений с n неизвестными?
3. Какие методы относятся к приближенным методам решения систем линейных уравнений с n неизвестными?
4. Что значит решить систему уравнений с n неизвестными?
5. В чем заключается суть метода Гаусса—Жордана для решения систем уравнений?
6. Как формулируется правило прямоугольника для решения систем методом Гаусса—Жордана?
7. Что такое метрика?

8. Что такое сжимающее отображение?
9. В чем заключается суть метода простой итерации для решения систем уравнений?
10. Какую систему можно решать методом простой итерации?
11. Как привести систему к виду с преобладающими диагональными коэффициентами?
12. Как находится расстояние между двумя приближениями в пространстве с метрикой ρ_1, ρ_2, ρ_2 ?
13. Каковы достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении систем?
14. Как найти коэффициент сжатия?
15. Какое условие является критерием достижения заданной точности при решении систем линейных уравнений методом простой итерации, методом Зейделя?
16. Как строится итерационная последовательность значений при решении систем уравнений методом простой итерации, методом Зейделя?

2.3.5. Задание к лабораторной работе № 3

Задание 2.3.1.

Решить систему уравнений с тремя неизвестными (табл. 2.3.1) методом Гаусса—Жордана, методом простой итерации, методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,001$. Составить функции, реализующие методы, проверить решение с помощью встроенных функций пакета Mathcad.

Таблица 2.3.1. Варианты заданий для самостоятельной работы

№ Задание	№ Задание
1 $\begin{cases} 0,21x_1 - 0,45x_2 - 0,20x_3 = 1,97 \\ 0,30x_1 + 0,25x_2 + 0,43x_3 = 0,32 \\ 0,60x_1 - 0,35x_2 - 0,25x_3 = 1,83 \end{cases}$	3 $\begin{cases} 0,45x_1 - 0,94x_2 - 0,15x_3 = -0,15 \\ -0,01x_1 + 0,34x_2 + 0,06x_3 = 0,31 \\ -0,35x_1 + 0,05x_2 + 0,65x_3 = 0,37 \end{cases}$
2 $\begin{cases} 1,53x_1 - 1,65x_2 - 0,76x_3 = 2,18 \\ 0,86x_1 + 1,17x_2 + 1,84x_3 = 1,95 \\ 0,32x_1 - 0,65x_2 + 1,11x_3 = -0,47 \end{cases}$	4 $\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34 \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42 \\ 0,03x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$

Таблица 2.3.1 (продолжение)

№ Задание	№ Задание
5 $\begin{cases} -0,20x_1 + 1,60x_2 - 0,10x_3 = 0,30 \\ -0,30x_1 + 0,10x_2 - 1,50x_3 = 0,40 \\ 1,20x_1 - 0,20x_2 + 0,30x_3 = -0,60 \end{cases}$	13 $\begin{cases} -3x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 = -56,5 \\ 0,5x_1 - 6x_2 + 0,5x_3 = -100 \\ 6,5x_1 + 0,6x_2 - 3x_3 = -210 \end{cases}$
6 $\begin{cases} 0,30x_1 + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60 \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30 \\ 0,50x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	14 $\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15 \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62 \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88 \end{cases}$
7 $\begin{cases} 0,20x_1 + 0,44x_2 + 0,81x_3 = 0,74 \\ 0,58x_1 + 0,29x_2 + 0,05x_3 = 0,02 \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	15 $\begin{cases} 1,02x_1 + 0,72x_2 - 0,65x_3 = 1,27 \\ 0,74x_1 - 1,24x_2 - 1,73x_3 = 0,77 \\ 1,78x_1 + 2,32x_2 + 0,74x_3 = 1,16 \end{cases}$
8 $\begin{cases} 6,34x_1 + 11,75x_2 + 10x_3 = -41,40 \\ 7,42x_1 - 19,03x_2 + 11,75x_3 = -49,49 \\ 5,57x_1 + 7,48x_2 + 6,36x_3 = -27,67 \end{cases}$	16 $\begin{cases} 4,03x_1 + 2,71x_2 - 2,32x_3 = -1,60 \\ -2,45x_1 + 5,28x_2 - 0,36x_3 = 5,36 \\ 1,42x_1 + 2,91x_2 + 12,37x_3 = 5,75 \end{cases}$
9 $\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15 \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 + 0,77x_3 = 0,11 \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12 \end{cases}$	17 $\begin{cases} -3,45x_1 - 1,25x_2 + 0,38x_3 = 5,01 \\ 2,15x_1 + 7,24x_2 - 0,39x_3 = 3,56 \\ 8,61x_1 + 12,94x_2 + 22,92x_3 = -4,72 \end{cases}$
10 $\begin{cases} 56,43x_1 - 8,54x_2 + 6,36x_3 = 9,76 \\ 4,34x_1 + 49,87x_2 + 9,18x_3 = 43,48 \\ 6,75x_1 - 8,93x_2 + 48,88x_3 = 56,92 \end{cases}$	18 $\begin{cases} -5,24x_1 + 2,66x_2 - 2,39x_3 = 9,11 \\ 2,47x_1 + 8,20x_2 + 2,31x_3 = 7,76 \\ 5,45x_1 - 6,27x_2 + 9x_3 = -9,37 \end{cases}$
11 $\begin{cases} 0,66x_1 + 0,44x_2 + 0,22x_3 = -0,58 \\ 1,54x_1 + 0,74x_2 + 1,54x_3 = -0,32 \\ 1,42x_1 + 1,42x_2 + 0,86x_3 = 0,83 \end{cases}$	19 $\begin{cases} -3,3x_1 + 2,1x_2 - 4,3x_3 = -0,21 \\ 4x_1 - 3,2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 2x_1 + 1,23x_2 + 3,5x_3 = -1,2 \end{cases}$
12 $\begin{cases} 0,78x_1 - 0,02x_2 - 0,12x_3 = 0,56 \\ 0,02x_1 - 0,86x_2 + 0,04x_3 = 0,77 \\ 0,12x_1 + 0,44x_2 - 0,72x_3 = 1,01 \end{cases}$	20 $\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,01 \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7 \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,89x_3 = 7,37 \end{cases}$

Таблица 2.3.1 (продолжение)

№ Задание	№ Задание
21 $\begin{cases} 14,38x_1 - 2,41x_2 + 1,39x_3 = 5,86 \\ 1,84x_1 + 25,36x_2 - 3,31x_3 = -2,28 \\ 2,46x_1 - 3,49x_2 + 16,37x_3 = 4,47 \end{cases}$	29 $\begin{cases} 0,21x_1 - 0,94x_2 - 0,94x_3 = -0,25 \\ 0,98x_1 - 0,19x_2 + 0,93x_3 = 0,23 \\ 0,87x_1 + 0,56x_2 - 0,14x_3 = 0,33 \end{cases}$
22 $\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41 \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44 \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56 \end{cases}$	30 $\begin{cases} 3,43x_1 + 4,07x_2 - 1,06x_3 = 46,08 \\ 74,4x_1 + 1,84x_2 - 1,85x_3 = -26,5 \\ 3,34x_1 + 94,3x_2 + 1,02x_3 = 92,3 \end{cases}$
23 $\begin{cases} 1,02x_1 - 0,73x_2 - 9,11x_3 = -1,25 \\ 6,25x_1 + 2,32x_2 + 7,62x_3 = 2,33 \\ 1,13x_1 - 8,88x_2 + 4,64x_3 = -3,75 \end{cases}$	31 $\begin{cases} 0,72x_1 + 3,54x_2 + 7,28x_3 = 0,33 \\ -0,28x_1 - 0,72x_2 + 3,04x_3 = 0,22 \\ 1,00x_1 + 0,35x_2 - 0,78x_3 = 1,12 \end{cases}$
24 $\begin{cases} 0,62x_1 + 0,92x_2 + 0,03x_3 = -0,82 \\ 0,99x_1 + 0,01x_2 + 0,07x_3 = 0,66 \\ 1,01x_1 - 0,02x_2 + 0,99x_3 = -0,98 \end{cases}$	32 $\begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08 \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,17x_3 = 0,18 \\ 1,18x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28 \end{cases}$
25 $\begin{cases} 0,10x_1 - 0,07x_2 - 0,96x_3 = -2,04 \\ 0,04x_1 - 0,99x_2 - 0,85x_3 = -3,73 \\ 0,91x_1 + 1,04x_2 + 0,19x_3 = -1,67 \end{cases}$	33 $\begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11 \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,01 \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13 \end{cases}$
26 $\begin{cases} 0,62x_1 + 0,84x_2 + 0,77x_3 = -8,18 \\ 0,03x_1 - 1,11x_2 - 1,08x_3 = 0,08 \\ 0,97x_1 + 0,02x_2 - 1,08x_3 = 0,06 \end{cases}$	34 $\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75 \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11 \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05 \end{cases}$
27 $\begin{cases} 0,63x_1 - 0,37x_2 + 1,76x_3 = -9,29 \\ 0,90x_1 + 0,99x_2 + 0,05x_3 = 0,12 \\ 0,13x_1 - 0,95x_2 + 0,69x_3 = 0,69 \end{cases}$	35 $\begin{cases} 3,14x_1 - 2,12x_2 + 1,17x_3 = 1,27 \\ -2,12x_1 + 1,32x_2 - 2,45x_3 = 2,13 \\ 1,17x_1 - 2,45x_2 + 1,18x_3 = 3,14 \end{cases}$
28 $\begin{cases} 0,98x_1 + 0,88x_2 - 0,24x_3 = 1,36 \\ 0,16x_1 - 0,44x_2 - 0,88x_3 = -1,27 \\ 9,74x_1 - 10x_2 + 1,74x_3 = -5,31 \end{cases}$	36 $\begin{cases} 1,65x_1 - 2,27x_2 + 0,18x_3 = 2,25 \\ -2,27x_1 + 1,73x_2 - 0,46x_3 = 0,93 \\ 0,18x_1 - 0,46x_2 + 2,16x_3 = 1,33 \end{cases}$

Таблица 2.3.1 (окончание)

№ Задание	№ Задание
37 $\begin{cases} 2,45x_1 + 1,75x_2 - 3,24x_3 = 1,23 \\ 1,75x_1 - 1,16x_2 + 2,18x_3 = 3,43 \\ -3,24x_1 + 2,18x_2 - 1,85x_3 = -0,16 \end{cases}$	39 $\begin{cases} 5,4x_1 - 2,46x_2 + 3,9x_3 = 5,51 \\ 2,57x_1 + 6,28x_2 - 1,3x_3 = 4,45 \\ 2,71x_1 - 0,76x_2 + 1,59x_3 = -3,57 \end{cases}$
38 $\begin{cases} 3,23x_1 + 1,62x_2 + 0,65x_3 = 1,28 \\ 1,62x_1 - 2,33x_2 - 1,43x_3 = 0,87 \\ 0,65x_1 - 1,43x_2 + 2,18x_3 = -2,87 \end{cases}$	40 $\begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,9x_3 = 2,41 \\ 2,51x_1 + 5,86x_2 - 0,5x_3 = 3,96 \\ 4,45x_1 - 2,57x_2 + 3,9x_3 = -1,28 \end{cases}$



Лабораторная работа № 4

Численные методы решения систем нелинейных уравнений

Цель работы: сформировать у студентов представления о методах решения систем нелинейных уравнений, привить умения составлять и применять алгоритмы для решения таких систем уравнений, выработать навыки в использовании программных средств для решения систем уравнений.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 324—352.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — С. 212—243.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 450—496.

2.4.1. Метод Ньютона

Пример 2.4.1.

Решить систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x + 3\lg(x) - y^2 = 0 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{cases}$$

методом Ньютона.

Решение.

1. Зададим координатную сетку и вычислим значения координат x и y в узлах сетки (рис. 2.4.1).
2. Построим график функции и карты линий уровня (рис. 2.4.2) (на которых наглядно видно, что данная система имеет решение, и причем единственное) с использованием панели **Graph** (рис. 2.4.3).


```

n := 100
xmin := 1      xmax := 5   ymax := 5      ymin := 1
i := 0..n      j := 0..n

 $x_i := xmin + \frac{xmax - xmin}{n} \cdot i$     $y_j := ymin + \frac{ymax - ymin}{n} \cdot j$ 

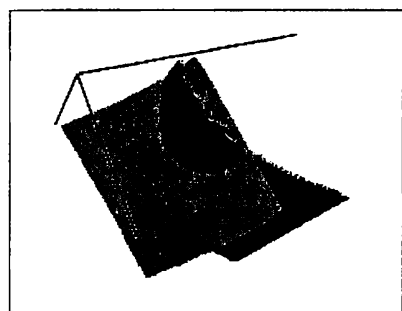
 $g(x, y) := x + 3 \cdot \log(x) - y^2$ 

 $q(x, y) := 2 \cdot x^2 - x \cdot y - 5 \cdot x + 1$ 

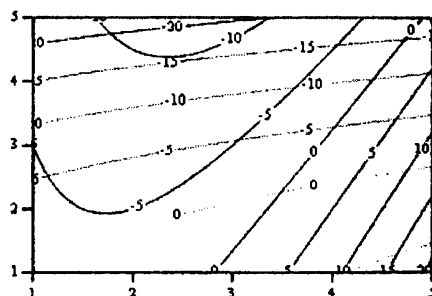
 $M_{i,j} := g(x_i, y_j)$        $N_{i,j} := q(x_i, y_j)$ 

```

Рис. 2.4.1. Задание координатной сетки



M, N



M, N

Рис. 2.4.2. График функции и карта линий уровня



Рис. 2.4.3. Панель Graph

Точки пересечения линий одинакового уровня дают решение данной системы уравнений.

4. Зададим начальное приближение переменных:

$$x := 3.4 \quad y := 2.2$$

5. Зададим функцию, содержащую решение системы уравнений (рис. 2.4.4).

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x + 3 \cdot \ln(x) - y^2 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.4.4. Вектор-функция, задающая систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3 \lg(x) - y^2 = 0 \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \end{cases}$$

6. Зададим функцию (рис. 2.4.5), реализующую метод Ньютона (функция F возвращает таблицу, содержащую значения координат x , y на каждом шаге итерации и соответствующие значения координат вектор-функции).

```

F :=
  x1 ← x0
  y1 ← y0
  for i ∈ 0..n-1
    D ←
      (
        ( d f(x1, y1) / dx1 )_0  ( d f(x1, y1) / dy1 )_0
        ( d f(x1, y1) / dx1 )_1  ( d f(x1, y1) / dy1 )_1
      )
    N ←
      (
        x1
        y1
      )
    L ← N - geninv(D) · f(x1, y1)
    x1 ← L_0
    y1 ← L_1
    Lf^{(i)} ←
      (
        x1
        y1
        f(x1, y1)_0
        f(x1, y1)_1
      )
  Lf

```

Рис. 2.4.5. Функция, возвращающая решение системы методом Ньютона

Запустив программу, получим итерационную последовательность (рис. 2.4.6), которая показывает, как находятся приближения. Здесь две первые строки — это значения x и y соответственно, а последние две строки — значения данных функций при найденных значениях x и y . В ноль функции обращаются на седьмом шаге. Значит, решением будет являться пара чисел $x = 3,487$ и $y = 2,262$.

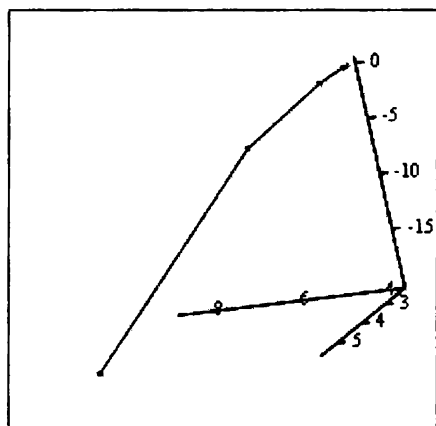
$$F =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	8.502	5.365	3.986	3.545	3.488	3.487	3.487	3.487
1	5.573	3.475	2.578	2.298	2.262	2.262	2.262	2.262
2	-19.771	-4.522	-0.857	-0.087	$1.452 \cdot 10^{-3}$	$4.367 \cdot 10^{-7}$	$9.97 \cdot 10^{-14}$	0
3	55.679	13.1	2.568	0.265	$4.435 \cdot 10^{-3}$	$1.333 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-13}$	0

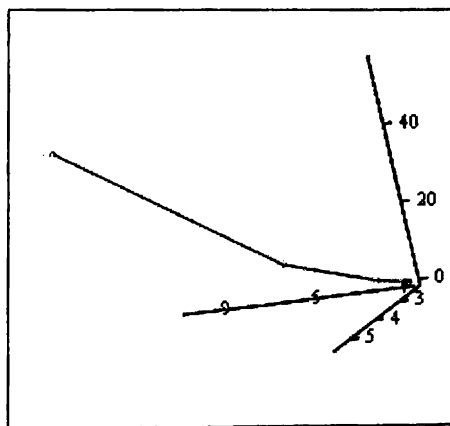
Рис. 2.4.6. Итерационная последовательность, полученная для решения системы нелинейных уравнений по методу Ньютона

7. Визуализируем итерационный процесс (рис. 2.4.7), транспонируя для этого полученную матрицу F :

$$F1 := F^T$$



$$\{F1^{(0)}, F1^{(1)}, F1^{(2)}\}$$



$$\{F1^{(0)}, F1^{(1)}, F1^{(3)}\}$$

Рис. 2.4.7. Визуализация итерационного процесса (для первого и второго уравнения соответственно)

8. Проверяем решение системы нелинейных уравнений с помощью блока Given...Minerr (рис. 2.4.8).

$$x := 3.4 \quad y := 2.2$$

Given

$$x + 3 \cdot \log(x) - y^2 = 0$$

$$2 \cdot x^2 - x \cdot y - 5 \cdot x + 1 = 0$$

$$Z := \text{Minerr}(x, y)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 3.487 \\ 2.262 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.4.8. Проверка численного решения с помощью встроенных функций пакета Mathcad

Ответ: $x = 3,487$, $y = 2,262$.

2.4.2. Задание к лабораторной работе № 4

Задание 2.4.1.

Решить систему двух нелинейных уравнений (табл. 2.4.1) методом Ньютона.

Таблица 2.4.1. Варианты заданий для самостоятельной работы

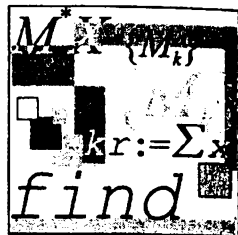
№	Задание	№	Задание
1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1,3 \\ y + \sin(x+1) = 0,8 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5 \\ x + \cos y = 3 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0,4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos(y+0,5) + x = 0,8 \\ \sin x - 2y = 1,6 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \cos(y+0,5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$

Таблица 2.4.1 (продолжение)

№	Задание	№	Задание
7	$\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1 \\ x + \cos(y-2) = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \cos x + y = 1,2 \\ 2x - \sin(y-0,5) = 2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1,5 \\ y + \cos(x-2) = 0,5 \end{cases}$	17	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1,5 \\ x + \cos(y-2) = 0,5 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 0,8 \\ \sin y - 2x = 1,6 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \cos(x-1) + 2y = 2,5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5 \\ x + \sin y \cdot \cos y = 0,4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1,3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0,8 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \cos(2x-1) + 4y = 0,5 \\ xy + \cos y = 3 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$	21	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0,7 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0,4 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \cos x + y = 1,5 \\ 2x - \sin(y-0,5) = 1 \end{cases}$
14	$\begin{cases} \sin x + 2y = 1,6 \\ x + \cos(y-1) = 1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1,2 \\ x + \cos(y-2) = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \cos(x+0,5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1,2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$

Таблица 2.4.1 (окончание)

№	Задание	№	Задание
25	$\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 1 \\ \sin y - 2x = 2 \end{cases}$	33	$\begin{cases} \sin(x+0,6) - y = 0,5 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$
26	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,5 \\ y + \cos x = 3 \end{cases}$	34	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1 \\ 2x + \sin y = 1,6 \end{cases}$
27	$\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1,5 \\ x - \sin(y+1) = 1 \end{cases}$	35	$\begin{cases} \cos(x-1) + \ln y = 0,5 \\ 3x - \cos y = 3 \end{cases}$
28	$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ y + \cos(x-1) = 0,7 \end{cases}$	36	$\begin{cases} \cos(x+1,8) + 2y = 0,5 \\ \ln x + \cos y = 0,3 \end{cases}$
29	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$	37	$\begin{cases} \operatorname{tg}(x-1) + 3y = 0,5 \\ 4x - \cos y = 0,6 \end{cases}$
30	$\begin{cases} \cos y + x = 1,5 \\ 2y + \sin(x-0,5) = 1 \end{cases}$	38	$\begin{cases} \cos x + \log_3 y = 1,5 \\ xy + \cos y = 3 \end{cases}$
31	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,8 \\ y - \cos x = 2 \end{cases}$	39	$\begin{cases} 2\cos(x-1) - y = 0,5 \\ -5x + \cos y = 0,7 \end{cases}$
32	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0,9 \\ y - \cos x = 2 \end{cases}$	40	$\begin{cases} \cos(x+5) - xy = 2,5 \\ \ln x + y^2 = 3 \end{cases}$



Лабораторная работа № 5

Приближение значения таблично заданной функции в точке с помощью интерполяционных многочленов

Цель работы: сформировать у студентов представления о применении интерполирования функций для решения жизненных задач, привить умения составлять и применять интерполяционные формулы Лагранжа заданной степени, многочлены Ньютона, сплайны и оценивать их погрешности, дать навыки в использовании программных средств для проверки полученных результатов.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 35—75.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2001. — С. 8—50.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 497—546.
4. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 77—97.
5. Пулькин С. П. Вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1974. — С. 140—159.

2.5.1. Интерполяционный полином Лагранжа

Пример 2.5.1.

Пусть функция задана табл. 2.5.1.

Таблица 2.5.1. Исходные данные для задачи интерполяции

X	0,41	1,55	2,67	3,84
Y	2,63	3,75	4,87	5,03

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично, найти значение этой функции в точке $x = 1,191$, построить графики полученного многочлена Лагранжа функции, заданной таблично, и многочлена n -ой степени и оценить точность приближения.

Решение.

1. Вводим исходные данные задачи (рис. 2.5.1).

$$\text{Вводим матрицы исходных данных: } vx := \begin{pmatrix} 0.41 \\ 1.55 \\ 2.67 \\ 3.84 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 2.63 \\ 3.75 \\ 4.87 \\ 5.03 \end{pmatrix}$$

Находим величину n - показатель степени многочлена:

$$n := \text{length}(vx) - 1 \quad n = 3$$

Задаем переменные:

$$i := 0..n \quad j := 0..n$$

Записываем формулу многочлена Лагранжа в символьном виде:

$$f(x) := \sum_i vy_i \prod_j \text{if} \left(i = j, 1, \frac{x - vx_j}{vx_i - vx_j} \right)$$

Проверяем правильность написанной формулы:

$$f(2.67) = 4.87$$

Находим значение функции в искомой точке $x=1.91$

$$f(1.91) = 4.15391$$

Рис. 2.5.1. Задание данных из табл. 2.5.1

2. Находим коэффициенты интерполяционного многочлена (рис. 2.5.2).

Находим матрицу определенного вида:

$$\begin{aligned} \text{XI}_{j,i} &:= |v x_j|^i \\ \text{XI}_{j,0} &:= 1 \end{aligned} \quad \text{XI} = \begin{pmatrix} 1 & 0.41 & 0.1681 & 0.06892 \\ 1 & 1.55 & 2.4025 & 3.72388 \\ 1 & 2.67 & 7.1289 & 19.03416 \\ 1 & 3.84 & 14.7456 & 56.6231 \end{pmatrix}$$

Вычислим коэффициенты полинома

$$a := \text{XI}^{-1} \cdot v y$$

$$a = \begin{pmatrix} 2.42245 \\ 0.30898 \\ 0.52709 \\ -0.11217 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.5.2. Нахождение корней интерполяционного многочлена

Получили многочлен третьей степени:

$$P(x) = -0.112x^3 + 0.527x^2 + 0.309x + 2.422.$$

3. Правильность найденных коэффициентов проверим, подставив значение x из числа заданных, и найдем значение функции при $x=1.91$ (рис. 2.5.3).

$$k := n..0$$

$$P(x) := \sum_k a_k \cdot x^k$$

$$P(0.41) = 2.63$$

$$P(1.91) = 4.15391$$

Рис. 2.5.3. Проверка правильности найденных коэффициентов

Значение функции полностью совпадает со значением, найденным выше.

4. Строим графики значений $v y_i$ и полученных многочленов $f(x)$ и $P(x)$ (рис. 2.5.4).

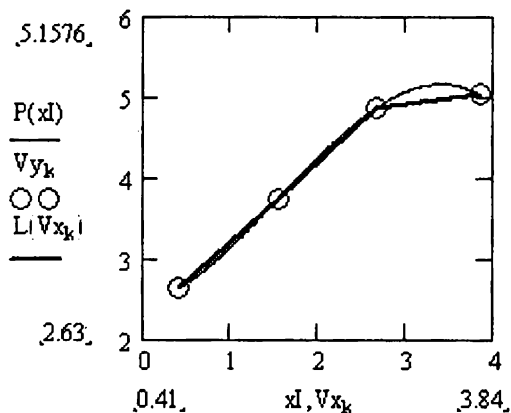


Рис. 2.5.4. Визуализация исходных данных и интерполяционных полиномов

Из рис. 2.5.4 видно, что, во-первых, графики построенного многочлена Лагранжа $f(x)$ и функции $P(x)$ проходят через узлы интерполяции, во-вторых, взяв любое значение аргумента из интервала $[0,41; 3,84]$, можно найти соответствующее значение функции.

5. Продемонстрируем отличие многочлена Лагранжа $f(x)$ от полинома третьей степени $P(x)$, построив разность между значениями данных многочленов (рис. 2.5.5).

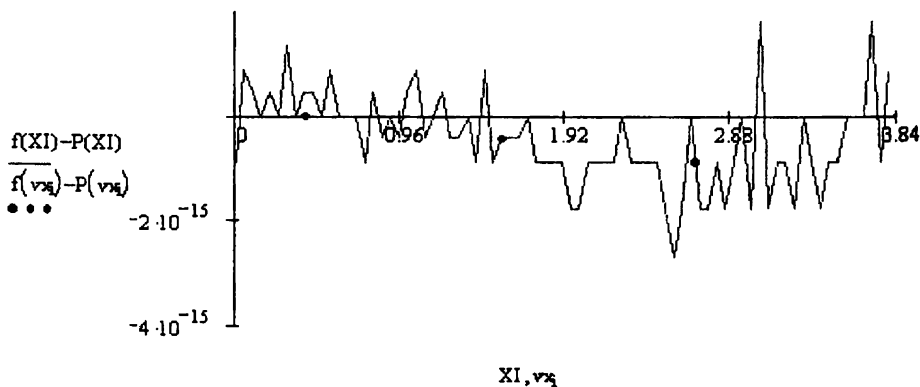


Рис. 2.5.5. Визуализация разности между полиномом Лагранжа и полиномом третьей степени

6. Проверяем полученное значение с помощью встроенной функции `interp(x, y, x1)`.

$$\text{interp}(vx, vy, 1.91) = 4.11$$

7. Составляем функцию, реализующую интерполирование функций многочленом Лагранжа (рис. 2.5.6).

```

lagrang(vx,vy,zn) := | ORIGIN ← 1
                     | n ← length(vx) - 1
                     | f ← 0
                     | for i ∈ 1..n
                     |   | p ← 1
                     |   | for j ∈ 1..n
                     |   |   | p ← p ·  $\frac{|zn - vx_j|}{|vx_i - vx_j|}$  if j ≠ i
                     |   | f ← f + vyi · p
                     | f

```

Рис. 2.5.6. Вычисление интерполированного значения с помощью полинома Лагранжа

2.5.2. Интерполяционные полиномы Ньютона

Пример 2.5.2.

Имеется таблица функции (табл. 2.5.2).

Таблица 2.5.2. Исходные данные для задачи интерполяции

X	1,34	1,345	1,35	1,355	1,36
Y	4,25562	4,3525	4,45422	4,56184	4,67344
X	1,365	1,37	1,375	1,38	1,385
Y	4,79038	4,91306	5,04192	5,17744	5,32016

Найти значение этой функции в точке $x_1 = 1,34592$ и $x_2 = 1,3720$ и оценить точность приближения с помощью многочленов Ньютона.

Решение.

1. Находим шаг интерполирования h (рис. 2.5.7)

$$h := 1.345 - 1.34 = 0.005.$$

$$t := 0..9 \quad d := 0.005$$

$$Mx_t := 1.34 + d \cdot t$$

Mx =		0	My :=	4.25562
	0	1.34		4.3525
	1	1.345		4.45422
	2	1.35		4.56184
	3	1.355		4.67344
	4	1.36		4.79038
	5	1.365		4.91306
	6	1.37		5.04192
	7	1.375		5.17744
	8	1.38		5.32016
	9	1.385		

Рис. 2.5.7. Ввод данных

2. Составляем таблицу конечных разностей (сделать самостоятельно). Полученные значения таблицы (рис. 2.5.8) используем для нахождения значения функции в заданной точке.

dy(My) =		0	1	2	3	4	5	6
	0	4.25562	0.09688	$4.84 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$-2.98 \cdot 10^{-3}$	$6.26 \cdot 10^{-3}$	-0.0105
	1	4.3525	0.10172	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$-1.92 \cdot 10^{-3}$	$3.28 \cdot 10^{-3}$	$-4.24 \cdot 10^{-3}$	$5.24 \cdot 10^{-3}$
	2	4.45422	0.10762	$3.98 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$-9.6 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-4}$	$-10 \cdot 10^{-4}$
	3	4.56184	0.1116	$5.34 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	0	$2 \cdot 10^{-5}$
	4	4.67344	0.11694	$5.74 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0
	5	4.79038	0.12268	$6.18 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$	0	0
	6	4.91306	0.12886	$6.66 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	0	0	0
	7	5.04192	0.13552	$7.2 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0
	8	5.17744	0.14272	0	0	0	0	0
	9	5.32016	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.5.8. Таблица конечных разностей

3. Записываем первую интерполяционную формулу Ньютона (1.5.18), задав первоначально функцию, вычисляющую конечные разности (рис. 2.5.9).

$$n := \text{length}(Mx) - 1 \quad i := 0..n \quad k := n..0$$

$$k\_Difference(y, k, i) := \sum_{ik=0}^k \left[\prod_{j=0}^{ik} \text{if}[ik = j, 1, (k - j)] \right] \cdot (-1)^{ik} \cdot \frac{y_{i+k-ik}}{ik!}$$

$$\text{Newton}(y, x, in, h) := \sum_{i=0}^{\text{length}(x)-1} \left(\prod_{j=0}^i \text{if} \left(j = i, 1, \frac{in - x_0}{h} - j \right) \cdot \frac{k\_Difference(y, i, 0)}{i!} \right)$$

$$\text{Newton}(My, Mx, x1, d) = 4.3706575$$

$$\text{Newton}(My, Mx, x2, d) = 4.9637974$$

Рис. 2.5.9. Вычисление значения функции в точке $x1$ с помощью первой интерполяционной формулы Ньютона

Значения функции получились следующие:

- в первой точке $P(x1) = 4,3706575$;
- во второй — $P(x2) = 4,3714246$.

Оценим погрешность полученных значений, для этого построим графики полученных значений интерполяционного многочлена $\text{Newton}(My, Mx, Mx, d)$ и данных значений функции My , (рис. 2.5.10). Проанализируем его.

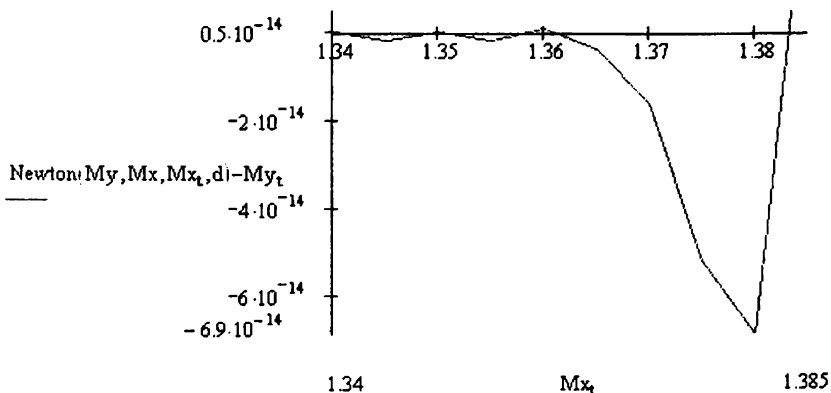


Рис. 2.5.10. График разностей данных значений функции и значений, полученных по первой формуле Ньютона

В начале отрезка интерполирования значения полученного первого многочлена Ньютона мало отличаются от заданных значений M_{y_i} , но ближе к концу разность становится существенной. Поэтому для точек, лежащих ближе к концу отрезка интерполирования, пользуются второй интерполяционной формулой Ньютона.

Вычисления по второй формуле Ньютона реализуются аналогично.

2.5.3. Интерполирование сплайнами

Пример 2.5.3.

Интерполируемая функция задана табл. 2.5.3, состоящей из четырех узлов ($n = 3$):

Таблица 2.5.3. Исходные данные к задаче интерполяции

x	0,02	0,08	0,12	0,17
$F(x)$	1,02316	1,0959	1,14725	1,21483

Найти значения коэффициентов b_i , c_i , d_i , определяющих кубический сплайн на трех частичных отрезках. Проанализировать, что будет в случае увеличения количества заданных значений x_i .

Решение.

1. Составляем систему, состоящую из девяти уравнений (рис. 2.5.11, 2.5.12) которую можно решить одним из методов, описанных в лекции № 3.

ORIGIN := 1

$$x := \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.17 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 1.02316 \\ 1.0959 \\ 1.14725 \\ 1.21483 \end{pmatrix}$$

$i := 1..3$

$$h_i := x_{i+1} - x_i \quad h = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.04 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.5.11. Задание системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов сплайна (начало)

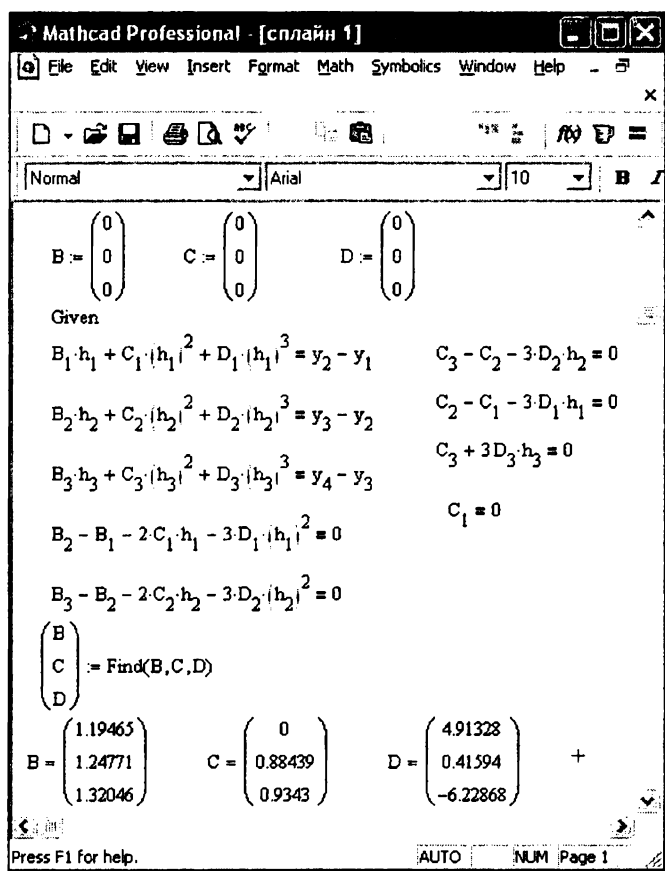


Рис. 2.5.12. Задание системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов сплайна (окончание)

Получим значения коэффициентов b_i , c_i , d_i , которые определяют иско-
мый сплайн.

- Убедимся, что найденный сплайн (рис. 2.5.13) удовлетворяет заданным
свойствам. Значения сплайна и его первых производных в соответствующих
узловых точках приведены на рис. 2.5.13.

Значения, найденные с помощью построенного сплайна и с помощью
встроенной функции интерполирования, совпадают до третьего знака по-
сле запятой.

- Совпадение значений, найденных с помощью построенного сплайна и
встроенной функции интерполирования, можно проверить и с помощью
функции сплайн-интерполяции (рис. 2.5.14).

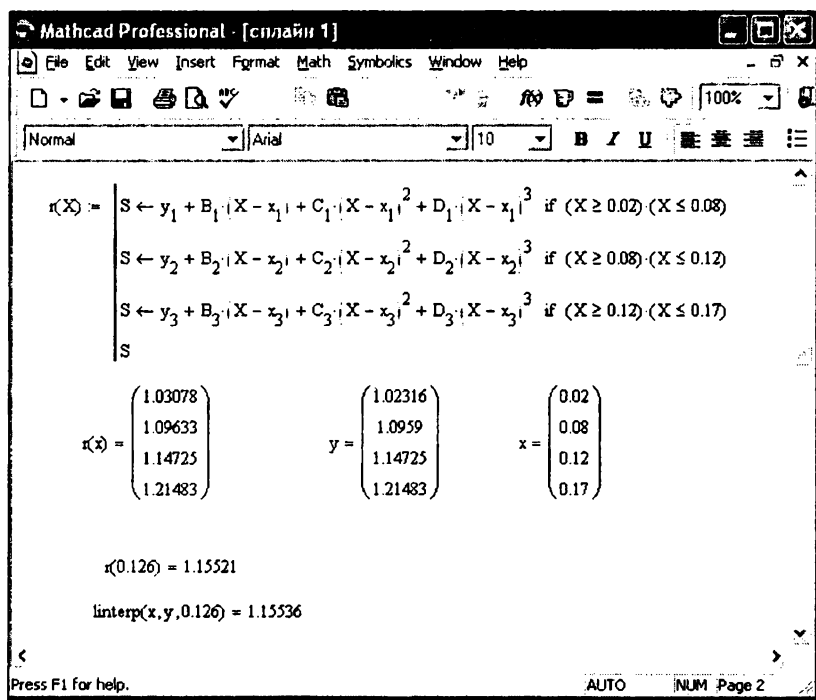


Рис. 2.5.13. Проверка соответствия сплайна заданным условиям

$$vs := \text{cspline}(x, y)$$

$$vs = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1.34359 \\ 1.43893 \\ 1.50248 \\ 1.58193 \end{pmatrix}$$

$$\text{interp}(vs, x, y, 0.126) = 1.15516$$

Рис. 2.5.14. Функция cspline возвращает значения коэффициентов кубического сплайна vs , который используется функцией interp для построения кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах vx и vy

Отметим практическое совпадение значений "соседних" выражений сплайна в узловых точках, а также совпадение этих значений с табличными значениями функции $f(x)$ (рис. 2.5.15). Это обеспечивает гладкость совокупного кубического сплайна.

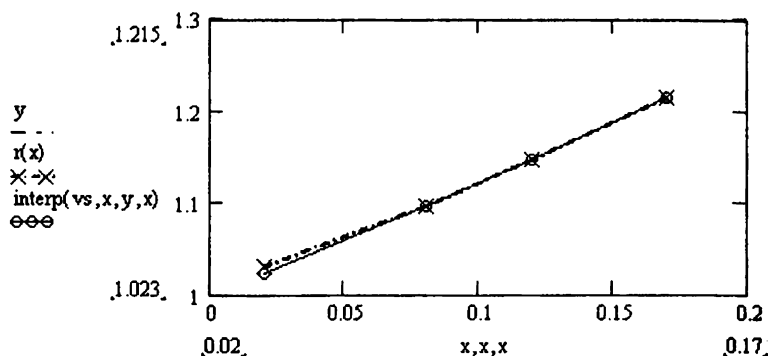


Рис. 2.5.15. Графическая иллюстрация сплайн-функции, функции $r(x)$ и заданных значений y

Рассмотренный пример показывает, что интерполяция сплайнами сопряжена с немалым объемом вычислительной работы. Весьма необычна и форма окончательного результата, т. к. кубический сплайн имеет различные представления на различных частичных отрезках интерполяции. Это осложняет доступ к значениям сплайна в каждой конкретной точке, т. к. предполагает прежде поиск параметров, определяющих соответствующую форму сплайна.

В случае увеличения числа точек получим новый сплайн (рис. 2.5.16).

$$\begin{array}{c}
 x = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.08 \\ 0.12 \\ 0.17 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1.02316 \\ 1.0959 \\ 1.14725 \\ 1.21483 \end{pmatrix} \quad r(x) = \begin{pmatrix} 1.031 \\ 1.096 \\ 1.147 \\ 1.215 \end{pmatrix} \quad x1 := \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.056 \\ 0.08 \\ 0.115 \\ 0.12 \\ 0.17 \end{pmatrix} \quad r(x1) = \begin{pmatrix} 1.03078 \\ 1.0682 \\ 1.09633 \\ 1.14067 \\ 1.14725 \\ 1.21483 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

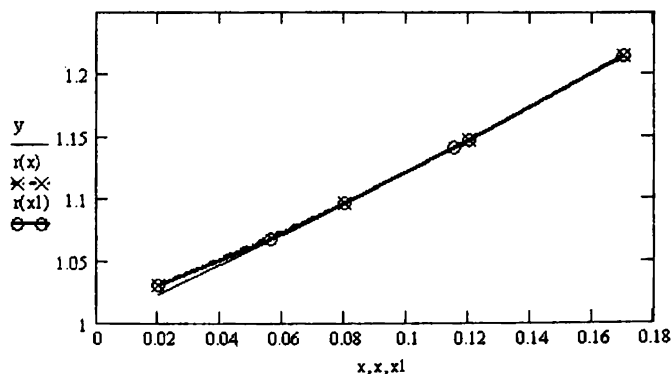


Рис. 2.5.16. Графическая иллюстрация сплайн-функции при большем количестве исходных данных

2.5.4. Вопросы по теме

1. Что такое интерполяция?
2. Что такое параболическая интерполяция?
3. Что такое узлы интерполяции?
4. В чем заключается задача отыскания интерполирующего многочлена?
5. Как построить интерполяционный многочлен Лагранжа?
6. Как определяется погрешность метода интерполяции с помощью формулы Лагранжа?
7. Какова схема Эйткена?
8. Как образуются разделенные разности?
9. Как связаны разделенные разности и производная?
10. Что такое обратное интерполирование?
11. Как строятся многочлены Чебышева?
12. Что такое сплайн? Как происходит процесс интерполирования сплайнами?
13. Что такое конечная разность первого порядка? Как она находится?
14. Что такое конечная разность второго порядка? Как она находится?
15. Что такое конечная разность N -го порядка? Как она находится?
16. Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
17. Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
18. Как находится погрешность метода интерполирования с помощью формул Ньютона?
19. Что значит "интерполирование вперед", "интерполирование назад"?

2.5.5. Задание к лабораторной работе № 5

Задание 2.5.1.

Построить по имеющимся данным (табл. 2.5.4) интерполяционный многочлен Лагранжа. Найти значение функции в точке x , используя интерполяционный многочлен Лагранжа и сплайны, построить графическую иллюстрацию интерполирования.

Таблица 2.5.4. Варианты заданий для самостоятельной работы

1		2		3	
x	y	x	y	x	y
0,43	1,63597	0,43	1,63597	0,43	1,63597
0,48	1,73234	0,48	1,73234	0,48	1,73234
0,55	1,87686	0,55	1,87686	0,55	1,87686
0,62	2,03045	0,62	2,03045	0,62	2,03045
0,70	2,22846	0,70	2,22846	0,70	2,22846
0,75	2,35973	0,75	2,35973	0,75	2,35973
в точке $x = 0,702$		в точке $x = 0,512$		в точке $x = 0,645$	
4		5		6	
x	y	x	y	x	y
0,43	1,63597	0,02	1,02316	0,35	2,73951
0,48	1,73234	0,08	1,09590	0,41	2,30080
0,55	1,87686	0,12	1,14725	0,47	1,96864
0,62	2,03045	0,17	1,21483	0,51	1,78776
0,70	2,22846	0,23	1,30120	0,56	1,59502
0,75	2,35973	0,30	1,40976	0,64	1,34310
в точке $x = 0,608$		в точке $x = 0,203$		в точке $x = 0,482$	
7		8		9	
x	y	x	y	x	y
0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418
0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513
0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336
0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203
0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926
0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098
в точке 0,102		в точке 0,436		в точке $x = 0,616$	

Таблица 2.5.4 (продолжение)

10		11		12	
x	y	x	y	x	y
0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418
0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513
0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336
0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203
0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926
0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098
в точке $x = 0,114$		в точке $x = 0,552$		в точке $x = 0,487$	
13		14		15	
x	y	x	y	x	y
0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418
0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513
0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336
0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203
0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926
0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098
в точке $x = 0,285$		в точке $x = 0,526$		в точке $x = 0,665$	
16		17		18	
x	y	x	y	x	y
0,41	2,57418	0,68	0,80866	0,11	9,05421
0,46	2,32513	0,73	0,89492	0,15	6,61659
0,52	2,09336	0,80	1,02964	0,21	4,69170
0,60	1,86203	0,88	1,20966	0,29	3,351069
0,65	1,74926	0,93	1,34087	0,35	2,73951
0,72	1,62098	0,99	1,52368	0,40	2,36522
в точке $x = 0,537$		в точке $x = 0,774$		в точке $x = 0,275$	

Таблица 2.5.4 (продолжение)

19		20		21	
x	y	x	y	x	y
0,68	0,80866	0,11	9,05421	0,05	0,050042
0,73	0,89492	0,15	6,61659	0,10	0,100335
0,80	1,02964	0,21	4,69170	0,17	0,171657
0,88	1,20966	0,29	3,351069	0,25	0,255342
0,93	1,34087	0,35	2,73951	0,30	0,309336
0,99	1,52368	0,40	2,36522	0,36	0,376403
в точке $x = 0,896$		в точке $x = 0,314$		в точке $x = 0,263$	
22		23		24	
x	y	x	y	x	y
0,68	0,80866	0,11	9,05421	0,68	0,80866
0,73	0,89492	0,15	6,61659	0,73	0,89492
0,80	1,02964	0,21	4,69170	0,80	1,02964
0,88	1,20966	0,29	3,351069	0,88	1,20966
0,93	1,34087	0,35	2,73951	0,93	1,34087
0,99	1,52368	0,40	2,36522	0,99	1,52368
в точке $x = 0,715$		в точке $x = 0,235$		в точке $x = 0,955$	
25		26		27	
x	y	x	y	x	y
0,11	9,05421	0,51	9,05421	0,115	5,05421
0,15	6,61659	0,55	6,61659	0,159	4,61659
0,21	4,69170	0,61	4,69170	0,218	3,69170
0,29	3,351069	0,69	3,35106	0,294	2,35106
0,35	2,73951	0,75	2,73951	0,353	1,73951
0,40	2,36522	0,80	2,36522	0,408	0,36522
в точке $x = 0,332$		в точке $x = 0,7491$		в точке $x = 0,256$	

Таблица 2.5.4 (окончание)

28		29		30	
x	y	x	y	x	y
0,41	2,57418	0,68	0,80866	0,11	9,05421
0,46	2,32513	0,73	0,89492	0,15	6,61659
0,52	2,09336	0,80	1,02964	0,21	4,69170
0,60	1,86203	0,88	1,20966	0,29	3,351069
0,65	1,74926	0,93	1,34087	0,35	2,73951
0,72	1,62098	0,99	1,52368	0,40	2,36522
в точке $x = 0,437$		в точке $x = 0,9475$		в точке $x = 0,3535$	

Задание 2.5.2.

Функция задана таблично (табл. 2.5.5). Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции в точках x_1 и x_2 , оценить погрешность.

Таблица 2.5.5. Варианты заданий для самостоятельной работы

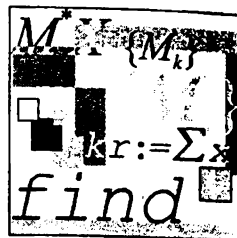
1		2	
x	y	x	y
1,215	0,106044	1,415	0,888551
1,220	0,113276	1,420	0,889599
1,225	0,119671	1,425	0,890637
1,230	0,125324	1,430	0,891667
1,235	0,130328	1,435	0,892687
1,240	0,134776	1,440	0,893698
1,245	0,138759	1,445	0,894700
1,250	0,142367	1,450	0,895693
1,255	0,145688	1,455	0,896677
1,260	0,148809	1,460	0,897653
в точках $x_1 = 1,2273$, $x_2 = 1,253$		в точках $x_1 = 1,4156$, $x_2 = 1,4527$	
в точках $x_1 = 1,223$, $x_2 = 1,257$		в точках $x_1 = 1,4256$, $x_2 = 1,4452$	
в точках $x_1 = 1,2208$, $x_2 = 1,2435$		в точках $x_1 = 1,4263$, $x_2 = 1,4575$	

Таблица 2.5.5 (продолжение)

3		4	
x	y	x	y
1,340	4,25562	0,101	1,26183
1,345	4,35325	0,106	1,27644
1,350	4,45422	0,111	1,29122
1,355	4,56184	0,116	1,30617
1,360	4,67344	0,121	1,32130
1,365	4,79038	0,126	1,33660
1,370	4,91306	0,131	1,35207
1,375	5,04192	0,136	1,36773
1,380	5,17744	0,141	1,38357
1,385	5,32016	0,146	1,39959
в точках $x_1 = 1,3473, x_2 = 1,3763$		в точках $x_1 = 0,1156, x_2 = 0,1457$	
в точках $x_1 = 1,3583, x_2 = 1,3812$		в точках $x_1 = 0,1142, x_2 = 0,1452$	
в точках $x_1 = 1,3787, x_2 = 1,3455$		в точках $x_1 = 0,1063, x_2 = 0,1369$	
5		6	
x	y	x	y
0,15	0,860708	1,115	8,65729
0,20	0,818731	1,120	8,29329
0,25	0,778801	1,125	7,95829
0,30	0,740818	1,130	7,64893
0,35	0,704688	1,135	7,39235
0,40	0,670320	1,140	7,30962
0,45	0,637628	1,145	6,84813
0,50	0,606531	1,150	6,61658
0,55	0,576950	1,155	6,39954
0,60	0,548812	1,160	6,19548
в точках $x_1 = 0,2073, x_2 = 0,53$		в точках $x_1 = 1,116, x_2 = 1,1527$	
в точках $x_1 = 0,223, x_2 = 0,557$		в точках $x_1 = 1,156, x_2 = 1,4452$	
в точках $x_1 = 0,2208, x_2 = 0,5435$		в точках $x_1 = 1,1383, x_2 = 1,1575$	

Таблица 2.5.5 (окончание)

7		8	
x	y	x	y
0,340	5,61543	0,01	0,26183
0,345	5,46547	0,06	0,27644
0,350	5,32159	0,11	0,29122
0,355	5,15326	0,16	0,30617
0,360	5,06478	0,21	0,32130
0,365	4,94856	0,26	0,33660
0,370	4,83170	0,31	0,35207
0,375	4,72545	0,36	0,36773
0,380	4,61855	0,41	0,38357
0,385	4,5182	0,46	0,39959
в точках $x_1 = 0,3573, x_2 = 0,3843$ в точках $x_1 = 0,349, x_2 = 0,3781$ в точках $x_1 = 0,3489, x_2 = 0,3759$		в точках $x_1 = 0,156, x_2 = 0,4527$ в точках $x_1 = 0,026, x_2 = 0,4052$ в точках $x_1 = 0,1163, x_2 = 0,3776$	
9		10	
x	y	x	y
0,180	5,61543	0,01	0,26183
0,185	5,46547	0,06	0,27644
0,190	5,32159	0,11	0,29122
0,195	5,15326	0,16	0,30617
0,200	5,06478	0,21	0,32130
0,205	4,94856	0,26	0,33660
0,210	4,83170	0,31	0,35207
0,215	4,72545	0,36	0,36773
0,220	4,61855	0,41	0,38357
0,225	4,5182	0,46	0,39959
в точках $x_1 = 0,1857, x_2 = 0,2165$ в точках $x_1 = 0,198, x_2 = 0,2209$ в точках $x_1 = 0,1908, x_2 = 0,2189$		в точках $x_1 = 0,156, x_2 = 0,3627$ в точках $x_1 = 0,026, x_2 = 0,4058$ в точках $x_1 = 0,1563, x_2 = 0,377$	



Лабораторная работа № 6

Обратное интерполирование

Цель работы: сформировать у студентов знания об обратном интерполировании таблично заданной функции, развить умения применять метод итерации, формулы Ньютона и интерполяционную формулу Лагранжа для обратного интерполирования, получить навыки использования программных средств для реализации указанных методов и проверки полученных результатов.

Литература

1. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 547—560.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2001. — С. 51—82.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 74—75.

2.6.1. Обратное интерполирование с использованием формул Ньютона

Пример 2.6.1.

Используя значения функции $y = \sin(x)$, заданные в табл. 2.6.1, найти значения x , такие что $y_1 = 0,796$ и $y_2 = 0,302$ с помощью метода итерации.

Таблица 2.6.1. Исходные данные для задачи обратного интерполирования

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y	0,909	0,863	0,808	0,746	0,675	0,598	0,517	0,427	0,335	0,239	0,141

Решение.

1. Вводим исходные данные задачи (рис. 2.6.1).

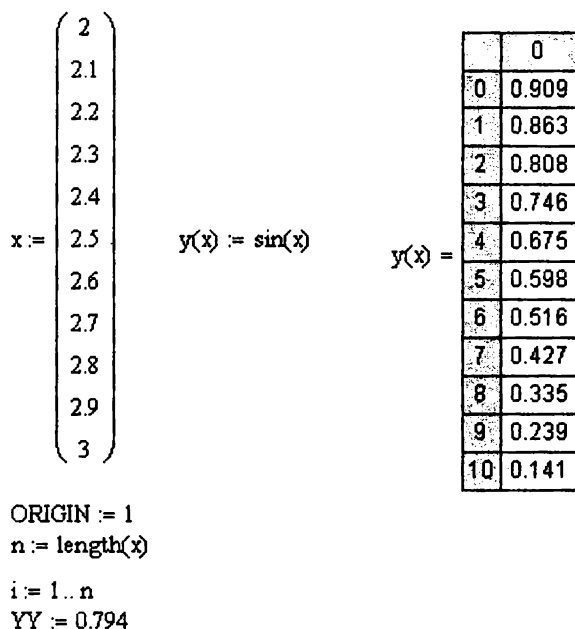


Рис. 2.6.1. Ввод данных задачи

2. Строим график зависимости значений $y(x)$ (рис. 2.6.2).

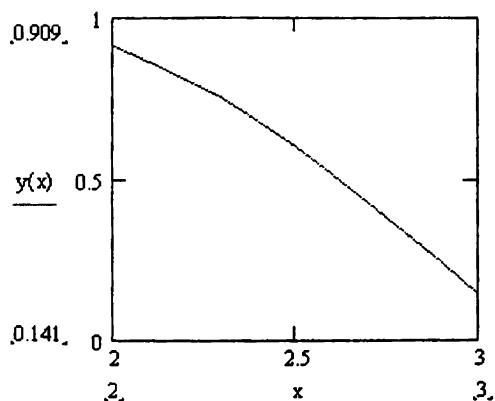


Рис. 2.6.2. Визуализация исходных данных, представленных в табл. 2.6.1

3. Составляем таблицу конечных разностей, используя первую формулу Ньютона (1.5.17) (рис. 2.6.3).

	1	2	3	4	5	6
1	0.909	-0.046	$-8.625 \cdot 10^{-3}$	$5.467 \cdot 10^{-4}$	$8.071 \cdot 10^{-5}$	$-6.269 \cdot 10^{-6}$
2	0.863	-0.055	$-8.078 \cdot 10^{-3}$	$6.274 \cdot 10^{-4}$	$7.445 \cdot 10^{-5}$	$-7.013 \cdot 10^{-6}$
3	0.808	-0.063	$-7.451 \cdot 10^{-3}$	$7.018 \cdot 10^{-4}$	$6.743 \cdot 10^{-5}$	$-7.686 \cdot 10^{-6}$
4	0.746	-0.07	$-6.749 \cdot 10^{-3}$	$7.693 \cdot 10^{-4}$	$5.975 \cdot 10^{-5}$	$-8.283 \cdot 10^{-6}$
5	0.675	-0.077	$-5.98 \cdot 10^{-3}$	$8.29 \cdot 10^{-4}$	$5.146 \cdot 10^{-5}$	$-8.797 \cdot 10^{-6}$
6	0.598	-0.083	$-5.151 \cdot 10^{-3}$	$8.805 \cdot 10^{-4}$	$4.267 \cdot 10^{-5}$	$-9.224 \cdot 10^{-6}$
7	0.516	-0.088	$-4.27 \cdot 10^{-3}$	$9.231 \cdot 10^{-4}$	$3.344 \cdot 10^{-5}$	0
8	0.427	-0.092	$-3.347 \cdot 10^{-3}$	$9.566 \cdot 10^{-4}$	0	0
9	0.335	-0.096	$-2.391 \cdot 10^{-3}$	0	0	0
10	0.239	-0.098	0	0	0	0
11	0.141	0	0	0	0	0

Рис. 2.6.3. Таблица конечных разностей

4. Находим значение T_1 (рис. 2.6.4).

$$T_1 := \frac{YY - Y_1}{dy(Y)_{1,2}}$$

Рис. 2.6.4. Вычисление постоянного члена интерполирующего полинома

5. Применяем метод итерации (рис. 2.6.5).

$$p := 20$$

$$i := 1..p$$

$$T_{i+1} := T_1 - \sum_{j=1}^{\text{length}(Y)-2} \left(\frac{dy(Y)_{1,j+2}}{(j+1)! \cdot dy(Y)_{1,2}} \cdot \prod_{k=1}^{j+1} \text{if}(k=1, T_i, T_i - k + 1) \right)$$

Рис. 2.6.5. Вычисление итерационной последовательности

Процесс продолжаем до тех пор, пока не установятся значения t , соответствующие требуемой точности, причем полагают $t = t_s$, где t_s —

последнее приближение. На восьмом шаге итерации (рис. 2.6.6) значения начинают повторяться, значит, $t = 2,209$.

	1
1	2.458
2	2.126
3	2.235
4	2.201
5	2.212
6	2.209
7	2.21
8	2.209
9	2.209
10	2.209

Рис. 2.6.6. Отображение членов итерационной последовательности

6. Определяем x из формулы:

$$\frac{x - x_0}{h} = t,$$

отсюда $x = x_0 + th$.

На пятом шаге итерации получили, что значение аргумента $x = 2,221$ для данного значения функции $y = 0,796$ с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ (рис. 2.6.7).

$$i := 1..n + 1$$

$$X_i := x_i + T_i \cdot h$$

	1
1	2.246
2	2.213
3	2.223
4	2.22
5	2.221
6	2.221
7	2.221

Рис. 2.6.7. Отображение значений переменной x , соответствующих членам итерационной последовательности T_i

Примечание

Если значение функции лежит ближе к концу отрезка интерполирования, то для нахождения значения аргумента используется вторая формула Ньютона (1.5.21).

Ответ: значение аргумента $x = 2,221$ для значения функции $y = 0,796$.

2.6.2. Обратное интерполирование с использованием формулы Лагранжа

Пример 2.6.2.

Используя значения функции $y = \sin(x)$ (заданные в табл. 2.6.2), найти значение x такое, что $y = \sin(x) = 0,6897$, используя формулу Лагранжа (1.5.9).

Таблица 2.6.2. Исходные данные для задачи обратного интерполирования

x	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
y	0,9996	0,9918	0,9740	0,9463	0,9093	0,8632	0,8085	0,7457	0,6755	0,5985	0,5155

Решение.

1. Задаем функцию, значения x и определяем степень многочлена Лагранжа (рис. 2.6.8).

$$\begin{aligned}
 y(x) &:= \sin(x) & i &:= 0..10 \\
 x_0 &:= 1.6 & h &:= \frac{2.6 - 1.6}{10} \\
 x_i &:= x_0 + i \cdot h \\
 n &:= \text{length}(x) - 1 & n &= 10
 \end{aligned}$$

Рис. 2.6.8. Фрагмент документа для решения задачи обратного интерполирования методом полиномов Лагранжа

2. Задаем многочлен Лагранжа (рис. 2.6.9).

$$j := 0..n$$

$$L(Y) := \sum_{i=1}^n x_i \prod_{j=1}^n \text{if} \left(i = j, 1, \frac{Y - y\{x_j\}}{y\{x_i\} - y\{x_j\}} \right)$$

Рис. 2.6.9. Задание функции, возвращающей значение полинома Лагранжа

3. Определяем значение аргумента при $y = 0,6897$ (рис. 2.6.10).

$$Y := 0.6897$$

$$L(Y) = 2.37845$$

Рис. 2.6.10. Отображение значения аргумента, при котором $y = 0,6897$

4. Программа, реализующая обратное интерполирование с использованием формулы Лагранжа, пишется аналогично прямому интерполированию с помощью формулы Лагранжа (см. разд. 2.5.1).

Ответ: значение аргумента $x = 2,37845$ для значения функции $y = 0,6897$.

2.6.3. Вопросы по теме

1. В чем заключается задача обратного интерполирования?
2. Как можно использовать метод итерации для обратного интерполирования таблично заданной функции?
3. Как строится итерационная последовательность нахождения значений аргумента?
4. Что такое конечные разности n -го порядка?
5. Как может быть решена задача обратного интерполирования с использованием формулы Лагранжа?

2.6.4. Задание к лабораторной работе № 6

Задание 2.6.1.

Используя значения функции $y = f(x)$, найти значение x при заданном значении y_1 . (Применить метод итерации, интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа).

Таблица 2.6.3. Варианты заданий для самостоятельной работы

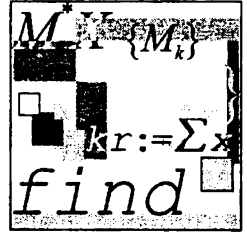
№	$F(x)$	$[a, b]$	y_1
1	$\sin x$	$[1; 2]$	0,9725
2	$\ln x$	$[2; 3]$	0,9425
3	$\cos x$	$[5; 6]$	0,7662
4	$\operatorname{tg} x$	$[-1; 0]$	-0,6666
5	$x - \frac{1}{x^2}$	$[2; 3]$	2,6543
6	$\sin x - 0,56$	$[2; 3]$	-0,0452
7	$\ln x + 0,4$	$[5; 6]$	2,0991
8	$\cos x$	$[0; 1]$	0,9444
9	$\operatorname{tg} x$	$[0,5; 1,5]$	1,4445
10	$\sin x$	$[2; 3]$	0,2725
11	$\ln x - 0,34$	$[2; 3]$	0,6421
12	$\cos x$	$[-1; 0]$	0,8888
13	$\operatorname{tg} x - \frac{1}{x}$	$[-1; 0]$	1,5522
14	x^3	$[2; 3]$	17,7522
15	$\cos x + 1,2$	$[0; 1]$	2,2222
16	$\operatorname{tg} x - \frac{1}{x^2}$	$[2; 3]$	-0,9876
17	$x^3 - 6$	$[-2; -1]$	-11,8901

Таблица 2.6.3 (продолжение)

№	$F(x)$	$[a, b]$	yl
18	$\frac{1}{3x+5}$	$[-2; -1]$	-9,8526
19	$\frac{x^3}{\sin x + 1,3}$	$[0,1; 1,1]$	0,1853
20	$\sin x + \cos x$	$[0; 1]$	1,3871
21	$\lg x$	$[0,1; 1,1]$	-0,3333
22	$\frac{x^2 - 2}{\ln x + 5}$	$[0,1; 1,1]$	-0,2999
23	$5 \sin x$	$[0; 1]$	2,7852
24	$\frac{\lg x}{5x}$	$[0,5; 1,5]$	0,0028
25	$\frac{5}{3x+5}$	$[0; 1]$	0,7543
26	$\lg x + 1,4$	$[0,5; 1,5]$	1,4545
27	$\sin x - \cos x$	$[0; 1]$	-0,0995
28	$\frac{-0,5}{3x+0,2}$	$[0; 1]$	-0,2876
29	$\frac{5}{\ln x}$	$[1,1; 2,1]$	11,1111
30	$5 + \ln x$	$[1,1; 2,1]$	5,4567
31	$\ln x - 2,4$	$[1,1; 2,1]$	-1,8787
32	$x - 2,4x^2$	$[1,1; 2,1]$	-3,9894

Таблица 2.6.3 (окончание)

№	$F(x)$	$[a, b]$	y_l
33	$\frac{5}{\ln x}$	$[1,1;2,1]$	10,8523
34	$\cos x + 2$	$[0;1]$	2,2254
35	$5 \sin x + 1$	$[0;1]$	2,7821
36	$\cos x - 0,2$	$[0;1]$	0,8511
37	$\operatorname{tg} x + 1$	$[0,5;1,5]$	1,4101
38	$\sin x + 1,2$	$[2;3]$	0,1255
39	$x - \frac{1}{x^2}$	$[2;3]$	2,9512
40	$\sin x - 0,56$	$[2;3]$	-0,0552



Лабораторная работа № 7

Дискретный вариант среднеквадратичных приближений. Метод наименьших квадратов

Цель работы: научиться находить аналитическое выражение таблично заданной функции с помощью метода наименьших квадратов.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 164—191.
2. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 134—169.
3. Плис А. И., Сливина Н. А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2002. — С. 130—147.
4. Пулькин С. П. Вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1974. — С. 178—203.

2.7.1. Линейная функция

Пример 2.7.1.

Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в табл. 2.7.1.

Таблица 2.7.1. Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Найти приближенное выражение функции в виде линейной функции $y = ax + b$.

Решение.

1. Вводим исходные данные задачи в виде массивов Mx и My (рис. 2.7.1).

$$Mx := \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.71 \\ 2.42 \\ 3.13 \\ 3.84 \\ 4.55 \\ 5.26 \\ 5.97 \end{pmatrix}, \quad My := \begin{pmatrix} 12.49 \\ 4.76 \\ 2.55 \\ 1.60 \\ 1.11 \\ 0.82 \\ 0.63 \\ 0.50 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.7.1. Ввод данных задачи

2. Сортируем данные, если они даны не в порядке возрастания.
Значения y_i запишем соответственно отсортированным значениям x_i , используя функцию $\text{csort}(M, 0)$ (в массив M внести значения x_i и y_i).
3. Вводим переменные, необходимые для дальнейших вычислений (рис. 2.7.2).

$$N := \text{length}(Mx) - 1$$

$$i := 0.. \text{length}(Mx) - 1$$

Рис. 2.7.2. Задание вспомогательных переменных

4. Находим коэффициенты линейной функции, используя встроенные возможности Mathcad (рис. 2.7.3).

Функция $\text{slope}(x, y)$ позволяет найти угловой коэффициент линии регрессии (наклон линии регрессии), а $\text{intercept}(x, y)$ — смещение по оси ординат линии регрессии (свободный параметр) (рис. 2.7.3).

Их можно найти также, реализовав метод наименьших квадратов, решая для этого систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными (рис. 2.7.4).

В результате получим: значения x_i и y_i , найденные по приближающей линейной функции и полученные решением системы двух уравнений с двумя неизвестными (рис. 2.7.5).

$$a := \text{slope}(Mx, My) \quad a = -1.849$$

$$b := \text{intercept}(Mx, My) \quad b = 9.5$$

Рис. 2.7.3. Использование функций slope, intercept для нахождения коэффициентов линейной функции

```

fnLinear(x, y, n) := for j ← 0..3          yLinear := k·Mx + b
                    kj ← 0
                    for i ← 0..n
                        k0 ← k0 + {xi}2
                        k1 ← k1 + xi·yi
                        k2 ← k2 + xi
                        k3 ← k3 + yi
                    for j ← 0..3
                        kj ←  $\frac{k_j}{n+1}$ 
                    a ←  $\begin{pmatrix} k_0 & k_2 & k_1 \\ k_2 & 1 & k_3 \end{pmatrix}$ 
                    a ← inv(a)
                    a0,2·x + a1,2

```

My
••••
yLinear
fnLinear(Mx, My, N)

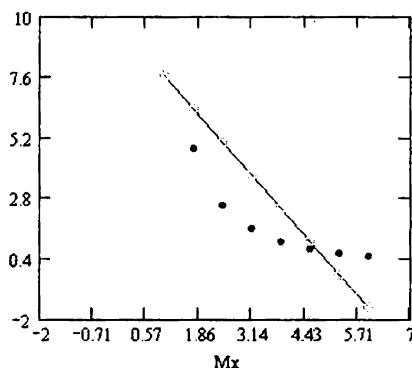


Рис. 2.7.4. Функция, возвращающая значения линейной функции и графики заданных значений функции, полученной по приближающей функции и составленной самостоятельно

$$\begin{array}{c} Mx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.71 \\ 2.42 \\ 3.13 \\ 3.84 \\ 4.55 \\ 5.26 \\ 5.97 \end{pmatrix} \quad My = \begin{pmatrix} 12.49 \\ 4.76 \\ 2.55 \\ 1.6 \\ 1.11 \\ 0.82 \\ 0.63 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad yLinear = \begin{pmatrix} 7.652 \\ 6.339 \\ 5.026 \\ 3.714 \\ 2.401 \\ 1.089 \\ -0.224 \\ -1.537 \end{pmatrix} \quad fnLinear(Mx, My, N) = \begin{pmatrix} 7.652 \\ 6.339 \\ 5.026 \\ 3.714 \\ 2.401 \\ 1.089 \\ -0.224 \\ -1.537 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 2.7.5. Значения функции, заданной таблично, и полученные по приближающей функции (двумя способами)

Таким образом, функция имеет вид $F(x) = -1,849x + 9,5$.

5. Теперь проверим, как точно мы нашли характер исходной функции. Для этого найдем отклонения таблично заданных значений y_i от точек на полученной линейной функции (рис. 2.7.6).

$$\sum_i \{My_i - y_{\text{Linear}_i}\}^2 = 43.12$$

Рис. 2.7.6. Нахождение отклонения таблично заданной функции и найденной по приближающей функции

6. Правильность выбора приближающей функции можно определить и по коэффициенту корреляции, используя функцию corr:

$$\text{corr}(Mx, My) = -0,792$$

или записав формулу вычисления коэффициента корреляции (рис. 2.7.7). Полученное значение коэффициента показывает, что зависимость y нас будет обратная (знак "минус") и связь достаточно тесная (число $|-0,792|$ достаточно близко к 1).

$$r = \frac{\sum_i \left[\left[Mx_i - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_i Mx_i \right) \right] \cdot \left[My_i - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_i My_i \right) \right] \right]}{\sqrt{\sum_i \left[Mx_i - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_i Mx_i \right) \right]^2 \cdot \sum_i \left[My_i - \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_i My_i \right) \right]^2}} \quad r = -0.792$$

Рис. 2.7.7. Вычисление коэффициента корреляции по формуле

2.7.2. Квадратичная функция

Пример 2.7.2.

Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в табл. 2.7.2.

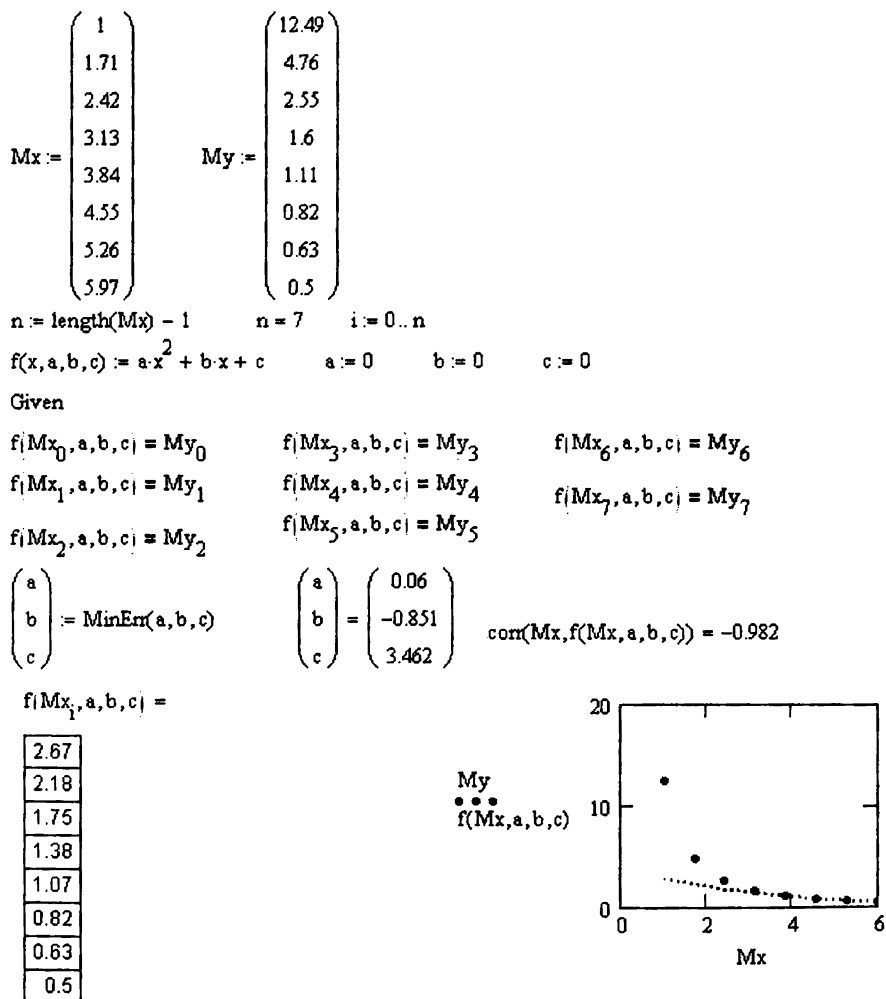
Таблица 2.7.2. Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Найти приближенное выражение функции в виде многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$.

Решение.

Ввод данных и нахождение параметров квадратичной функции представлены на рис. 2.7.8.



$$\sum (My - f(Mx, a, b, c))^2 = 103.779$$

Рис. 2.7.8. Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями и графиком

2.7.3. Степенная функция

Пример 2.7.3.

Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в табл. 2.7.3.

Таблица 2.7.3. Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Найти приближенное выражение функции в виде степенной функции $y = ax^m$.

Решение.

1. Вводим исходные данные задачи (рис. 2.7.9).

$$Mx := \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.71 \\ 2.42 \\ 3.13 \\ 3.84 \\ 4.55 \\ 5.26 \\ 5.97 \end{pmatrix} \quad My := \begin{pmatrix} 12.49 \\ 4.76 \\ 2.55 \\ 1.60 \\ 1.11 \\ 0.82 \\ 0.63 \\ 0.50 \end{pmatrix}$$

$$N := \text{length}(Mx) - 1$$

$$i := 0..N$$

Рис. 2.7.9. Ввод данных

2. Находим параметры степенной функции (рис. 2.7.10).

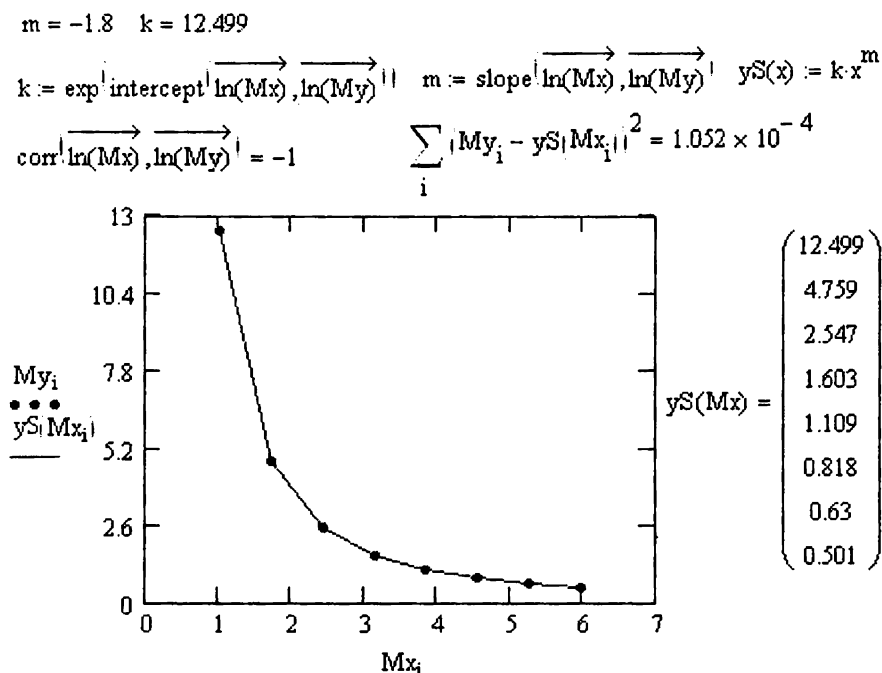


Рис. 2.7.10. Фрагмент рабочего листа Mathcad с вычислениями и графиком для квадратичной функции

2.7.4. Показательная функция

Пример 2.7.4.

Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленные в табл. 2.7.4.

Таблица 2.7.4. Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Найти приближенное выражение функции в виде показательной функции $y = k \cdot e^{mx}$.

Решение.

Ввод данных и нахождение параметров показательной функции представлены на рис. 2.7.11.

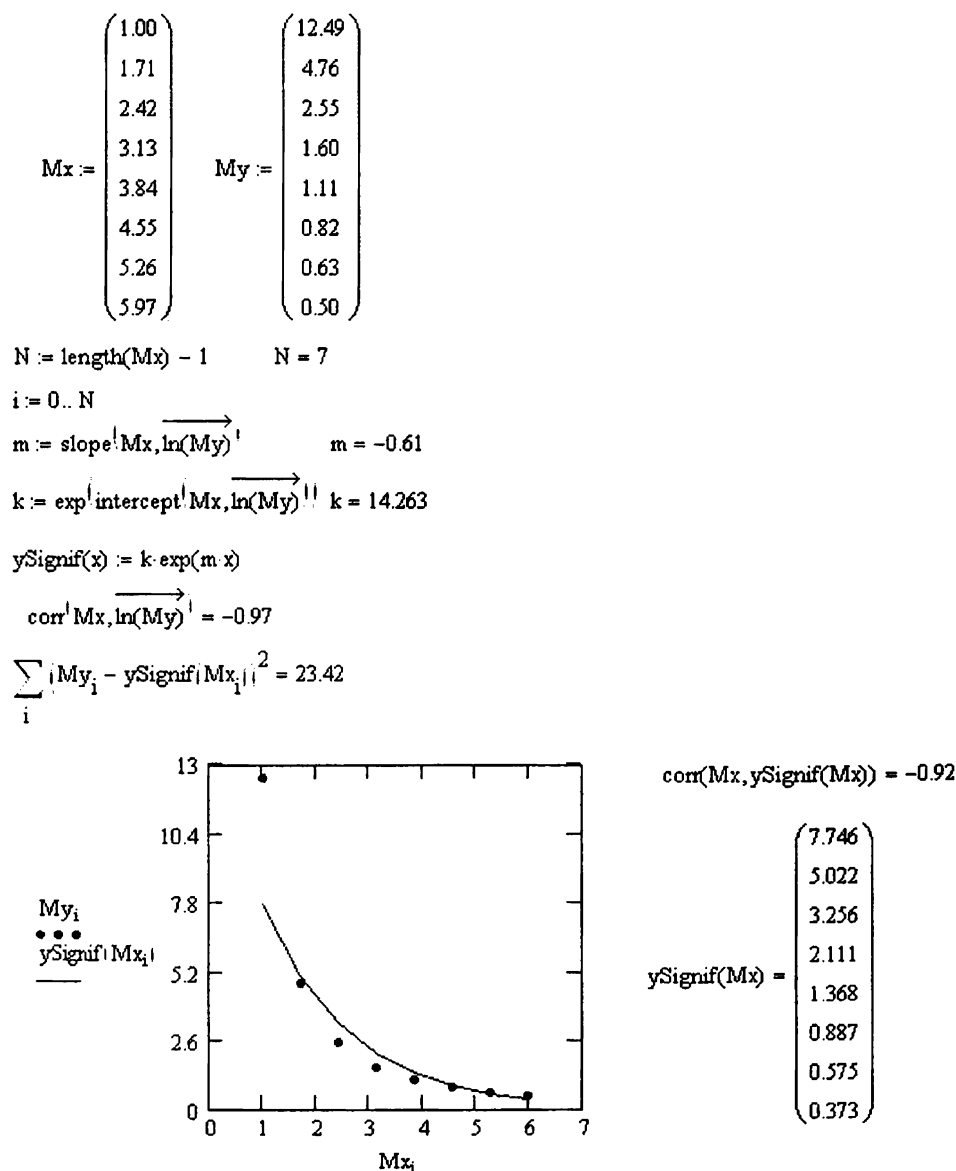


Рис. 2.7.11. Фрагмент рабочего листа Mathcad с вычислениями и графиком для показательной функции

2.7.5. Логарифмическая функция

Пример 2.7.5.

Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в табл. 2.7.5.

Таблица 2.7.5. Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Найти приближенное выражение функции в виде логарифмической функции $y = a \cdot \ln x + b$.

Решение.

1. Вводим данные задачи (рис. 2.7.12).

$$Mx := \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.71 \\ 2.42 \\ 3.13 \\ 3.84 \\ 4.55 \\ 5.26 \\ 5.97 \end{pmatrix} \quad My := \begin{pmatrix} 12.49 \\ 4.76 \\ 2.55 \\ 1.60 \\ 1.11 \\ 0.82 \\ 0.63 \\ 0.50 \end{pmatrix}$$

$$N := \text{length}(Mx) - 1$$

$$i := 0..N$$

Рис. 2.7.12. Ввод данных

2. Находим коэффициенты логарифмической функции (рис. 2.7.13).

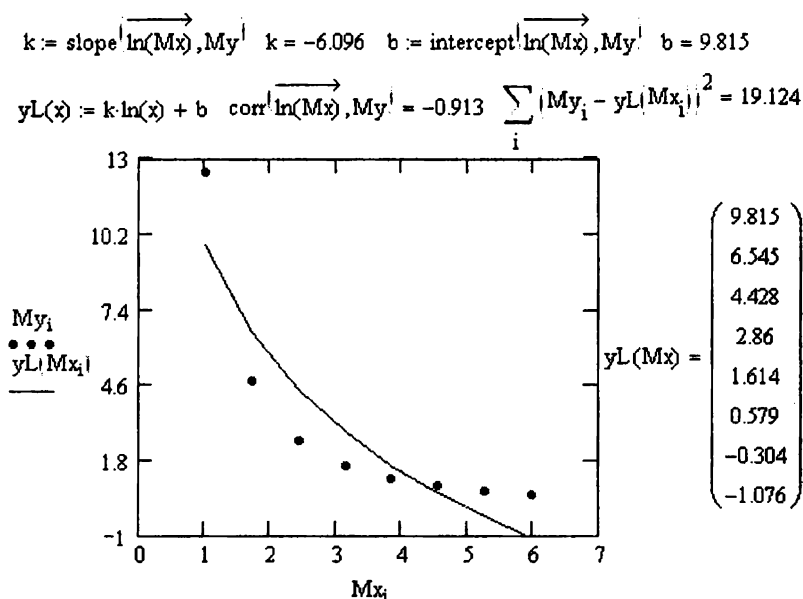


Рис. 2.7.13. Фрагмент рабочего листа Mathcad с вычислениями и графиком для логарифмической функции

2.7.6. Гиперболическая функция

Пример 2.7.6.

Известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках, представленных в табл. 2.7.6.

Таблица 2.7.6. Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов

X	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
Y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,5

Найти приближенное выражение функции в виде гиперболы $y = a \frac{1}{x} + b$.

Решение.

1. Вводим данные (рис. 2.7.14).

$$Mx := \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.71 \\ 2.42 \\ 3.13 \\ 3.84 \\ 4.55 \\ 5.26 \\ 5.97 \end{pmatrix} \quad My := \begin{pmatrix} 12.49 \\ 4.76 \\ 2.55 \\ 1.60 \\ 1.11 \\ 0.82 \\ 0.63 \\ 0.50 \end{pmatrix}$$

$$N := \text{length}(Mx) - 1$$

$$i := 0..N$$

Рис. 2.7.14. Ввод данных

2. Находим параметры гиперболической функции (рис. 2.7.15).

$$k := \text{slope}\left(\frac{1}{Mx}, My\right) \quad k = 14.282$$

$$b := \text{intercept}\left(\frac{1}{Mx}, My\right) \quad b = -2.575 \quad \text{corr}\left(\frac{1}{Mx}, My\right) = 0.99$$

$$yH(x) := \text{if}\left(x = 0, \text{"error"}, k \cdot \frac{1}{x} + b\right) \quad \sum_i |My_i - yH(Mx_i)|^2 = 3.174$$

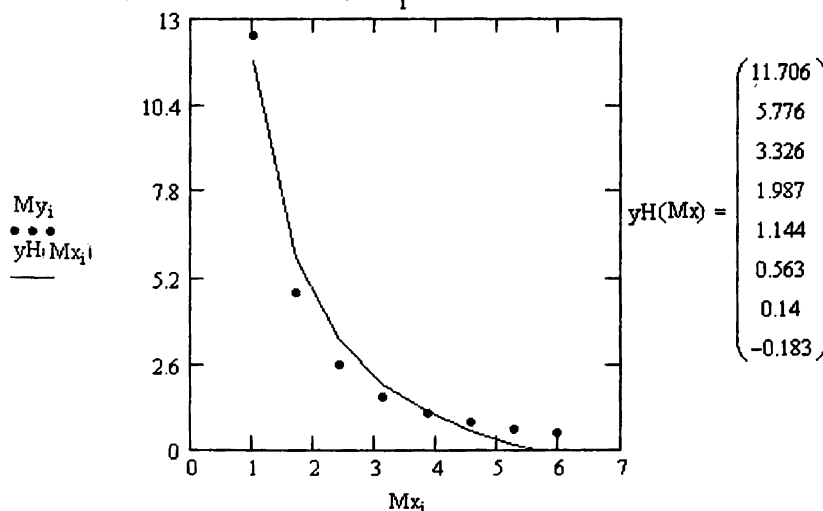


Рис. 2.7.15. Фрагмент рабочего листа Mathcad с вычислениями и графиком для гиперболической функции

2.7.7. Вопросы по теме

1. Общая постановка задачи нахождения приближающей функции.
2. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов?
3. Какие функции могут быть использованы в качестве приближающих?
4. Как находятся отклонения измеренных значений Y от вычисленных по формуле приближающей функции?
5. Как найти приближающую функцию в виде линейной функции $F(x, a, b) = ax + b$?
6. Как найти приближающую функцию в виде квадратичной функции $F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$?
7. Как привести показательную, степенную, логарифмическую функции к линейной?
8. Когда функция трех переменных может принимать наименьшее значение?
9. Что такое коэффициент корреляции и как он находится?
10. Каковы границы значения коэффициента корреляции и что они показывают?
11. Что такое отклонение?
12. Как можно определить правильность вида выбранной функции?

2.7.8. Задание для лабораторной работы № 7

Задание 2.7.1.

Набор экспериментальных данных значений x и y представлен в табл. 2.7.7.

Найти методом наименьших квадратов следующее.

1. Вид приближающих функций, рассмотренных выше.
2. Сравнить качество полученных приближений путем сравнения их отклонений.
3. Построить графики получившихся зависимостей и табличных значений аргументов и функции. Найти вид приближающей функции по графику, построенному по табличным значениям, сравнить его с полученными приближениями и определить, какой вид имеет функция, заданная таблично.

4. Найти коэффициенты корреляции всех приближающих функций. Сделать выводы.
5. Найти многочлен $P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ наилучшего средне-квадратичного приближения оптимальной степени $m = m^*$. За оптимальное значение m^* принять ту степень многочлена, начиная с которой величина отклонения стабилизируется или начинает возрастать.

Таблица 2.7.7. Варианты заданий для самостоятельной работы

№	Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов								
	x								
1	x	1,20	1,57	1,94	2,31	2,68	3,05	3,42	3,79
	y	2,59	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
2	x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,89	6,70	7,53
	y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,30	2,89	3,29	3,87
3	x	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,60
	y	2,25	2,83	3,44	4,31	5,29	6,55	8,01	10,04
4	x	1,00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,19	4,84	5,48
	y	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
5	x	5,84	3,82	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91
	y	79,31	57,43	60,66	92,55	90,12	71,30	70,50	91,25
6	x	2,91	2,94	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96
	y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,17	70,24	63,23	66,48
7	x	5,46	2,73	6,49	4,26	2,39	6,46	0,86	2,05
	y	65,72	58,05	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74
8	x	1,28	1,76	2,24	2,72	3,20	3,68	4,16	4,64
	y	2,10	2,62	3,21	3,96	4,98	6,06	7,47	9,25
9	x	-4,84	-4,30	-3,76	-3,22	-2,68	-2,14	-1,60	-1,06
	y	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,19	-0,26	-0,39	-0,81

Таблица 2.7.7 (продолжение)

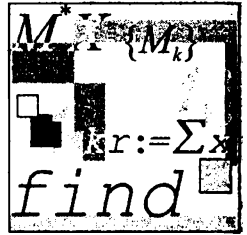
№	Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов								
10	x	3,54	4,29	4,78	3,99	1,13	6,29	1,89	3,27
	y	22,81	28,42	24,95	26,96	8,78	33,55	15,77	22,89
11	x	4,08	4,42	2,52	-0,08	2,14	3,36	7,35	5,00
	y	18,31	21,85	16,93	-8,23	10,90	17,18	36,45	24,11
12	x	1,16	1,88	2,60	-3,32	4,04	4,76	5,48	6,20
	y	0,18	0,26	0,32	0,36	0,40	0,43	0,95	0,85
13	x	1,00	1,71	2,42	-3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
	y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,50
14	x	-0,64	-0,36	-0,08	0,20	0,48	0,76	1,04	1,32
	y	29,51	18,86	12,05	7,70	4,92	3,14	2,01	1,28
15	x	-2,45	-1,94	-1,43	-0,92	-0,41	0,10	0,61	1,12
	y	0,87	1,19	1,68	2,23	3,04	4,15	5,66	7,72
16	x	1,54	1,91	2,28	-2,65	3,02	3,39	3,76	4,13
	y	-2,52	-3,08	-3,54	-3,93	-4,27	-4,57	-4,84	-5,09
17	x	1,20	2,00	2,80	-3,60	4,40	5,20	6,00	6,80
	y	-10,85	-6,15	-4,14	-3,02	-2,30	-1,81	-1,45	-1,17
18	x	-1,04	-0,67	-0,30	0,07	0,44	0,81	1,18	1,55
	y	10,80	8,08	5,97	4,44	3,31	2,46	1,83	1,36
19	x	0,41	0,97	1,53	-2,09	2,65	3,21	3,77	4,33
	y	0,45	1,17	1,56	1,82	2,02	2,18	2,31	2,44
20	x	3,80	0,25	0,48	5,78	4,91	1,56	0,91	5,73
	y	-19,23	-21,41	-9,90	-19,56	-0,30	-12,04	1,14	11,26
21	x	1	2	5	8	9	12	14	16
	y	6	7,45	8,24	12,46	13,09	14,56	25,89	29,91

Таблица 2.7.7 (продолжение)

№	Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов								
	x	0	2	4	5	8	10	12	15
22	y	29,8	22,9	17,1	15,16	10,7	10,2	10,1	25,2
	x	1,65	1,39	1,19	1,02	0,82	0,75	0,66	0,89
23	y	1,034	1,232	1,432	1,752	2,056	2,37	2,76	3,198
	x	0,22	-3,05	-1,76	-1,25	-0,45	-0,80	-0,26	-3,07
24	y	58,46	36,05	31,17	16,17	11,16	69,23	58,08	43,13
	x	7,03	5,98	7,10	6,92	6,69	3,66	7,60	3,61
25	y	18,93	-22,13	-10,07	20,5	7,09	4,04	-20,78	-12,98
	x	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96	3,40	4,55
26	y	44,56	82,52	99,17	70,2	63,23	66,48	48,35	40,24
	x	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96	3,40	4,55
27	y	44,56	82,52	99,17	70,2	63,23	66,48	48,35	40,24
	x	2,95	2,60	2,69	3,01	2,44	2,51	3,37	2,98
28	y	113,8	119,66	106,28	120	107,43	114,8	115,53	117,4
	x	6,06	7,20	5,62	7,01	5,73	6,98	6,06	6,32
29	y	113,8	119,66	106,28	120,6	107,43	114,8	115,53	117,4
	x	5,59	5,66	5,30	5,57	5,48	5,37	5,41	5,61
30	y	113,8	119,56	105,32	119,6	100,5	114,8	115,53	117,9
	x	4,23	1,40	4,07	2,93	3,44	1,09	1,82	2,43
31	y	65,72	58,05	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74
	x	4,07	2,93	3,44	1,09	1,82	2,43	3,85	0,97
32	y	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74	56,81	45,82
	x	4,33	4,59	4,21	3,78	4,23	5,61	4,87	3,87
33	y	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74	56,81	45,82
	x	4,33	4,59	4,21	3,78	4,23	5,61	4,87	3,87

Таблица 2.7.7 (окончание)

№	Исходные данные для задачи аппроксимации методом наименьших квадратов								
34	x	8,90	9,22	8,74	8,98	8,77	9,31	8,81	9,14
	y	105,2	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09	70,44	51,67
35	x	6,63	7,15	2,96	1,73	7,44	3,70	2,00	2,63
	y	105,2	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09	70,44	51,67
36	x	8,70	5,36	1,89	3,01	3,59	2,64	4,77	1,60
	y	105,2	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09	70,44	51,67
37	x	2,51	3,74	8,70	5,36	1,89	3,01	3,59	2,64
	y	55,65	67,68	105,2	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09
38	x	9,11	9,95	8,90	9,22	8,74	8,98	8,77	9,31
	y	55,65	67,68	105,20	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09
39	x	-2,25	1,90	0,19	-0,50	-1,09	0,94	-0,13	-0,50
	y	-19,2	-21,41	-9,90	-19,56	-0,30	-12,04	1,14	11,26
40	x	-4,95	-4,50	-2,29	-5,50	-1,50	-2,98	-0,23	0,57
	y	-19,3	-21,41	-9,90	-19,56	-0,30	-12,04	1,14	11,26



Лабораторная работа № 8

Численное дифференцирование

Цель работы: Научиться использовать формулы интерполирования (многочлена Лагранжа и Ньютона) для нахождения первой и второй производных функции, заданной таблично.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 76—85.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука: 1960. — С. 562—576.
3. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 98—104.

2.8.1. Дифференцирование с помощью интерполяционной формулы Лагранжа

Пример 2.8.1.

Найти первую и вторую производные функции $y = \ln(x)$, заданной таблично на отрезке $[2; 3]$, используя формулы Лагранжа (1.5.9) и первую или вторую формулы Ньютона (1.5.17) или (1.5.21) соответственно.

Решение.

1. Строим таблицу значений на заданном отрезке (рис. 2.8.1).
2. Записываем интерполяционную формулу Лагранжа (1.5.9) при дифференцировании функции с равноотстоящими узлами (рис. 2.8.2).
3. Находим значения первой производной для заданных значений x_i (рис. 2.8.3).

$$a := 2 \quad b := 3 \quad h := 0.1 \quad n := \frac{b-a}{h} \quad n = 10 \quad i := 0..n$$

x :=	2	заданная логарифмическая функция в виде таблицы $y_i := \ln x_i $	y =		0
	2.1			0	0.693
	2.2			1	0.742
	2.3			2	0.788
	2.4			3	0.833
	2.5			4	0.875
	2.6			5	0.916
	2.7			6	0.956
	2.8			7	0.993
	2.9			8	1.03
	3			9	1.065
				10	1.099

Рис. 2.8.1. Ввод данных задачи

$$\text{Diffir\_Logr}(t) := \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{d}{dt} \left[\frac{\prod_{j=0}^n (t - j)}{t - i} \right]$$

Рис. 2.8.2. Интерполяционная формула Лагранжа

$$f_i := \text{Diffir\_Logr} \left(\frac{x_i - x_0}{h} \right)$$

$$f_i =$$

0.5
0.4761905
0.4545455
0.4347826
0.4166667
0.4
0.3846154
0.3703704
0.3571429
0.3448276
0.3333333

Рис. 2.8.3. Вычисление значений производной полинома Лагранжа

4. Полученные значения проверим, используя функцию нахождения первой производной (рис. 2.8.4).

$$\text{Prov}(q) := \frac{d}{dq} \ln(q)$$

$$\text{Prov}(x_i) =$$

0.5
0.476190476
0.454545455
0.434782609
0.416666667
0.4
0.384615385
0.37037037
0.357142857
0.344827586
0.333333333

Рис. 2.8.4. Вычисление точных значений производной

5. Графически изобразим полученные значения первой производной ($\text{Prov}(x_i)$) и значения, полученные по интерполяционной формуле Лагранжа (рис. 2.8.5).

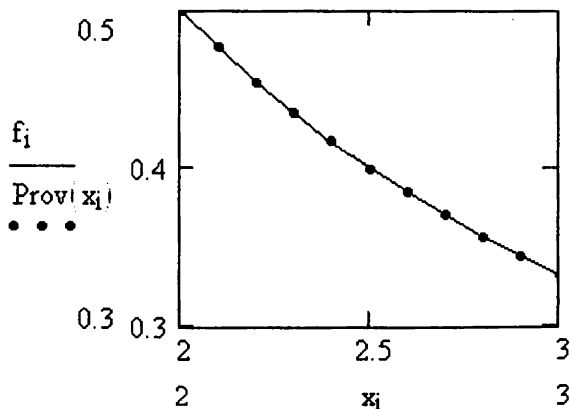


Рис. 2.8.5. Визуализация значений производной, вычисленных по точной формуле и с помощью интерполяционного полинома Лагранжа

6. Для оценки погрешности необходимо воспользоваться аналитическим выражением таблично заданной функции (рис. 2.8.6).

$$\frac{d^{n+1}}{dq^{n+1}} \ln(q) \rightarrow \frac{3628800}{q^{11}}$$

Рис. 2.8.6. Погрешность по формуле Лагранжа

7. Погрешность для интерполяционной формулы Лагранжа вычисляется по формуле, представленной на рис. 2.8.7.

$$\varepsilon_i := \frac{\text{Max\_pro} \cdot h^n \cdot i! \cdot (n-i)!}{(n+1)!}$$

Рис. 2.8.7. Вычисление погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

Здесь *Max_pro* — максимальное значение $(n+1)$ -ой производной заданной функции на отрезке $[2; 3]$. Результат вычисления погрешности представлен на рис. 2.8.8.

$$\text{Max\_pro} = 1.772 \times 10^3$$

	0
0	$1.611 \cdot 10^{-8}$
1	$1.611 \cdot 10^{-9}$
2	$3.58 \cdot 10^{-10}$
3	$1.342 \cdot 10^{-10}$
4	$7.67 \cdot 10^{-11}$
5	$6.392 \cdot 10^{-11}$
6	$7.67 \cdot 10^{-11}$
7	$1.342 \cdot 10^{-10}$
8	$3.58 \cdot 10^{-10}$
9	$1.611 \cdot 10^{-9}$
10	$1.611 \cdot 10^{-8}$

Рис. 2.8.8. Погрешность вычислений

8. Строим график полученных значений погрешностей для характеристики вычислительного процесса (рис. 2.8.9).

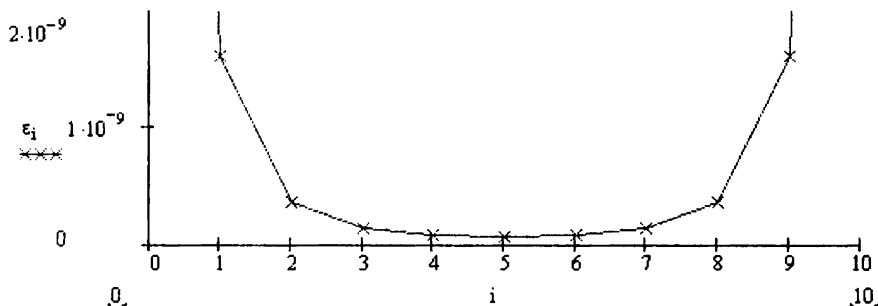


Рис. 2.8.9. Зависимость погрешности от номера шага итерационного процесса

Зависимость шага от полученного значения погрешности показывает, что на концах отрезка значения производной отличаются больше, чем в середине. Значит, в середине отрезка значения получили более точно.

Подобным же способом можно использовать и интерполяционные формулы Ньютона для нахождения производных любого порядка.

2.8.2. Вопросы по теме

1. В каких случаях используют численное дифференцирование?
2. В чем особенность задачи численного дифференцирования?
3. Графическая интерпретация численного дифференцирования.
4. Интерполяционная формула Лагранжа для равноотстоящих узлов.
5. Формула численного дифференцирования на основе интерполяционной формулы Лагранжа.
6. Формула для оценки погрешности численного дифференцирования по формуле Лагранжа.
7. Формула численного дифференцирования на основе интерполяционных формул Ньютона.
8. Формула для оценки погрешности численного дифференцирования по формулам Ньютона.
9. Как влияет на точность численного дифференцирования величина шага h ?

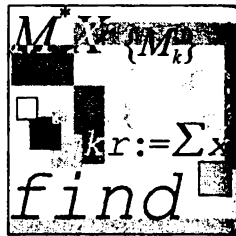
2.8.3. Задание к лабораторной работе № 8

Задание 2.8.1.

Вычислить значение первой производной функции, заданной таблично используя интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, и оценить погрешности методов. Составить функцию, позволяющую находить значение первой производной в данных точках x_i и в любой промежуточной точке.

Примечание

Для выполнения задания использовать данные из табл. 2.6.3 лабораторной работы № 6.



Лабораторная работа № 9

Численное интегрирование

Цель работы: ознакомиться с численными методами вычисления определенных интегралов, научиться решать задачи с использованием формулы Симпсона, трапеций, правых и левых прямоугольников, метода Монте-Карло и оценивать погрешность всех перечисленных формул.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 86—163.
2. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 2000. — С. 33—57.
3. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2001. — С. 145—188.
4. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике. — М.: Высшая школа, 1990. — С. 127—142.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматлит, 1960. — С. 577—650.
6. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 104—129.
7. Ноздрин И. Н., Степаненко И. М., Костюк П. К. Прикладные задачи по высшей математике. — Киев: Вища школа, 1976. — С. 59—72.
8. Пулькин С. П. Вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1974. — С. 203—217.

2.9.1. Метод прямоугольников

Пример 2.9.1.

Вычислить приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx$, используя формулы левых и правых прямоугольников, при $n = 1000$.

Решение.

1. Задаем функцию $f(x)$, отрезок $[a, b]$ и функцию нахождения дифференциалов n -го порядка.
2. Находим значение интеграла заданной функции для использования его в дальнейшем решении для сравнения (рис. 2.9.1).

$$f(x) := \frac{8}{(3x+4)^2}$$

$$a := 0 \quad b := 1 \quad n := 100$$

$$\text{dif\_n}(x, n) := \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = 0.285714286$$

Рис. 2.9.1. Вычисление точного значения интеграла

Составим функцию, входными параметрами которой являются: a, b — левая и правая границы интервала; n — количество разбиений; $char$ — если имеет значение "left", то идет подсчет по формуле левых прямоугольников, любое другое — по формуле правых прямоугольников (рис. 2.9.2).

Погрешность показывает, что полученное значение интеграла верно до третьего знака после запятой.

$$\text{Integr}(a, b, n, \text{char}) := \left[\begin{array}{l} hf \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} xf_i \leftarrow a + hf \cdot i \\ dif_i \leftarrow |dif_n(xf_i, 1)| \end{array} \right| \\ \left[\begin{array}{l} \text{if } \text{char} = \text{"left"}, \left(hf \cdot \sum_{t=0}^{n-1} f(xf_t) \right), \left(hf \cdot \sum_{t=1}^n f(xf_t) \right) \\ \left[\frac{(b-a) \cdot hf}{2} \right] \cdot \max(dif) \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Результаты вычислений по формулам правых и левых прямоугольников:

$$\text{Integr}(a, b, n, \text{"left"}) = \begin{pmatrix} 0.287 \\ 0.004 \end{pmatrix} \quad \text{Integr}(a, b, n, \text{"right"}) = \begin{pmatrix} 0.284 \\ 0.004 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.9.2. Функция, возвращающая значение интеграла, найденного по формулам прямоугольников

Ответ: приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx = 0,287 \pm 0,004$ по формуле левых прямоугольников, и $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx = 0,284 \pm 0,004$ — по формуле правых прямоугольников.

2.9.2. Метод Симпсона

Пример 2.9.2.

Вычислить приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx$, используя общую формулу Симпсона, при $n = 1000$.

Решение.

Составим функцию, входными параметрами которой являются: a, b — левая и правая границы интервала; n — количество разбиений. Индексы $iEven$ и $iUneven$ обозначают четность и нечетность соответственно (рис. 2.9.3).

$$\begin{aligned}
 \text{Simpson}(a, b, n) := & \left[\begin{array}{l} n \leftarrow n + 1 \text{ if } \text{mod}(n, 2) \neq 0 \\ hf \leftarrow \frac{b - a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left[\begin{array}{l} xf_i \leftarrow a + hf \cdot i \\ dif_i \leftarrow |dif\_n(xf_i, 4)| \end{array} \right] \\ \frac{hf}{3} \left(f(xf_0) + f(xf_n) + 4 \cdot \sum_{i \text{Uneven} = 1}^{\frac{n}{2}} f(xf_{2 \cdot i \text{Uneven} - 1}) + 2 \cdot \sum_{i \text{Even} = 2}^{\frac{n}{2}} f(xf_{2i \text{Even} - 2}) \right) \\ \left[\frac{(b - a) \cdot hf^4}{180} \right] \cdot \max(dif) \end{array} \right] \\
 \text{Simpson}(a, b, n) = & \begin{pmatrix} 0.285714286 \\ 0.000000001 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.9.3. Функция, возвращающая значение интеграла функции с помощью метода Симпсона

Следовательно, решением будет число, равное 0,285714286. Погрешность показывает, что полученное значение интеграла верно до девятого знака.

Ответ: значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx = 0,285714286 \pm 0,000000001$.

2.9.3. Метод трапеций

Пример 2.9.3.

Вычислить приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx$, используя формулу трапеций (1.6.16), при $n = 1000$.

Решение.

Функция, реализующая вычисление интеграла методом трапеций, представлена на рис. 2.9.4.

$$\begin{aligned}
 \text{Trapes}(a, b, n) := & \left[\begin{array}{l} hf \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left[\begin{array}{l} xf_i \leftarrow a + hf \cdot i \\ dif_i \leftarrow |dif\_n(xf_i, 2)| \end{array} \right] \\ hf \cdot \left(\frac{f(xf_0) + f(xf_n)}{2} + \sum_{t=1}^{n-1} f(xf_t) \right) \\ \left[\frac{(b-a) \cdot hf^2}{12} \right] \cdot \max(dif) \end{array} \right] \\
 \text{Trapes}(a, b, n) = & \begin{pmatrix} 0.28572 \\ 0.00001 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.9.4. Функция, возвращающая значение интеграла с использованием формулы трапеций

Ответ: значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx = 0,28572 \pm 0,00001$.

2.9.4. Метод Монте-Карло

Пример 2.9.4.

Вычислить приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x+4)^2} dx$, используя метод Монте-Карло, при $n = 1\,000\,000$.

Решение.

Реализация метода Монте-Карло для вычисления интеграла представлена на рис. 2.9.5.

Сравнивая точное и численное значение интегралов находим, что абсолютная погрешность равна $1,6 \cdot 10^{-4}$.

$$a := 0 \quad b := 1 \quad n := 1000000$$

$$h := \frac{b - a}{n} \quad f(x) := \frac{8}{(3x + 4)^2}$$

$$i := 0..n$$

$$x_i := a + (b - a) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$I := h \cdot \sum_i f(x_i)$$

$$I = 0.285550681$$

Рис. 2.9.5. Ход решения задачи на нахождение значения интеграла с помощью метода Монте-Карло

Ответ: значение интеграла $\int_0^1 \frac{8}{(3x + 4)^2} dx = 0,2855 \pm 0,0002$.

2.9.5. Вопросы по теме

1. В каком случае используется численное интегрирование?
2. Постановка задачи численного интегрирования.
3. Какие существуют методы интегрирования функции?
4. Графическая интерпретация метода трапеций.
5. Как оценить погрешность метода трапеций?
6. Графическая интерпретация метода Симпсона.
7. Как оценить погрешность метода Симпсона?
8. Графическая интерпретация метода прямоугольников.
9. Как оценить погрешность метода прямоугольников?
10. Чем отличаются формулы метода трапеций и метода Симпсона?
11. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага h ?
12. Чем отличается вычисление погрешности метода трапеций и Симпсона?

13. Основная идея метода Монте-Карло.
14. Графическая интерпретация метода Монте-Карло.

2.9.6. Задание к лабораторной работе № 9

Задание 2.9.1.

Найти приближенное значение интеграла заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по формулам трапеций, Симпсона, прямоугольников, Монте-Карло при делении отрезка на 1000 равных частей, произвести оценку погрешности методов интегрирования и сравнить точность полученных результатов: составить функцию, возвращающую значение интеграла на основе формулы метода Монте-Карло. Сравнить результаты, полученные разными методами.

Таблица 2.9.1. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sqrt{1 + \cos^2 x}$	$[0; 3]$
2	$\sin(2x^2 + 1)$	$[0; 1]$
3	$(x + 1,9) \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	$[1; 2]$
4	$\frac{1}{x} \cdot \ln(x + 2)$	$[2; 3]$
5	$\sqrt{\operatorname{tg} x}$	$[0; 0,5]$
6	$2,6 \cdot x^2 \cdot \ln x$	$[1,2; 2,2]$
7	$(x^2 + 1) \cdot \sin(x - 0,5)$	$[0,5; 1,5]$
8	$x^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)$	$[2; 3]$
9	$3x + \ln x$	$[1; 2]$

Таблица 2.9.1 (продолжение)

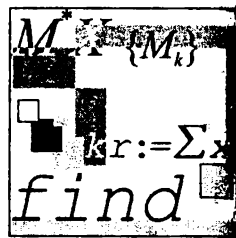
№	$f(x)$	$[a, b]$
10	$3x^2 + \operatorname{tg} x$	$[-0,5; 0,5]$
11	$\sqrt{x} \cdot e^{-x}$	$[0,1; 1,1]$
12	$\frac{-21}{(6-7x)^2}$	$[-2; 0]$
13	$\frac{8}{(3x+4)^2}$	$[0; 1]$
14	$\frac{-15}{(2-x)^3}$	$[3; 5]$
15	$\frac{9}{(5x+7)^2}$	$[2; 3]$
16	$\frac{-3}{(15x-9)^3}$	$[-1; 0]$
17	$\frac{1+e^{2x}}{5}$	$[0; 3]$
18	$e^x \cdot \sin(x^2)$	$[0; 5]$
19	$\frac{17}{(1-3x)^3}$	$[-3; -1]$
20	$\frac{12}{(4x-9)^2}$	$[0; 1]$
21	$\frac{5}{(4x-3)^3}$	$[4; 5]$

Таблица 2.9.1 (продолжение)

№	$f(x)$	$[a, b]$
22	$\frac{-4}{(1+8x)^2}$	$[0; 3]$
23	$\frac{3x + \sin x}{x^2}$	$[0, 1; 1, 1]$
24	$(x+1, 9) \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	$[1; 2]$
25	$x^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$	$[1, 5; 2, 5]$
26	$\frac{e^x}{x}$	$[1; 7]$
27	$\frac{\cos x}{x}$	$\left[\pi; \frac{\pi}{2}\right]$
28	$\frac{1}{1+x^2}$	$[0; 1]$
29	$\frac{1}{1+x}$	$[0; 9]$
30	$\frac{1}{\lg x}$	$[4; 10]$
31	$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$	$[0; 6]$
32	$\sqrt{4+x^3}$	$[0; 3]$
33	$\sqrt{\operatorname{tg} x}$	$\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$
34	$\sqrt[3]{x+5}$	$[0; 8]$

Таблица 2.9.1 (окончание)

№	$f(x)$	$[a, b]$
35	$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1,5x}}$	$[2; 5]$
36	$\sqrt{1 + \cos^2 x}$	$[0; \pi]$
37	$(x - 5)^2 (10 - x)$	$[0; 10]$
38	$\frac{\sqrt{100 + x^4}}{x^2}$	$[2; 4]$
39	$\sqrt{(25 - x^2) \cdot (2 - x^2)}$	$[0; 2]$
40	$\sqrt{1 + 0,6 \cdot \sin x}$	$[0; \pi/2]$



Лабораторная работа № 10

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы: сформировать у студентов представления о применении ДУ различных областях; привить умения решать задачу Коши для ДУ $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y_0 = f(x_0)$ методами Пикара, Эйлера, Рунге—Кутты, Адамса; развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 360—417.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2001. — С. 210—260.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. — М.: Физматлит, 1962. — С. 125—197.
4. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — С. 121—133.
5. Косарев В. И. 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс) Учеб. пособие для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 2000. — С. 88—102.

2.10.1. Метод Пикара

Пример 2.10.1.

Решить задачу Коши для ДУ $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ на отрезке $[1, 7; 2, 7]$ при заданном НУ: $y(1, 7) = 5, 3$ и шаге интегрирования $h = 0, 1$ методом Пикара с шагом h .

В отчете представить: ход работы, программу-функцию, погрешность, графическую иллюстрацию решения.

Решение.

1. Вводим данные (рис. 2.10.1).

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right) \\ a &:= 1.7 & b &:= 2.7 \\ h &:= 0.1 & n &:= \frac{b - a}{h} \\ y_0 &:= 5.3 & i &:= 0..n \end{aligned}$$

Рис. 2.10.1. Задание исходных данных

2. Задаем функцию, возвращающую значения первой производной по переменной y (рис. 2.10.2).

$$f\_deriv(y) := -\sin\left(\frac{y}{\pi}\right) \cdot \frac{1}{\pi}$$

Рис. 2.10.2. Функция, возвращающая значение первой производной функции

$$f(x, y) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$$

3. Составим функцию, возвращающую решение ДУ методом Пикара (рис. 2.10.3). Здесь: f — исходная функция; f_deriv — производная функции по y ; a, b — концы отрезка; h — шаг; y_0 — начальное значение переменной y .
4. Найдем решение ДУ методом Пикара (рис. 2.10.4).

Ответ: нулевое приближение (см. рис. 2.10.4) — погрешность метода — показывает, что одиннадцать знаков после запятой верны в остальных вычисленных значениях таблицы.

```

fnPikar(fn,fn_deriv,a,b,h,y0) :=
  n ← (b - a) / h
  y0 ← y0
  for i ∈ 0..n
    x_i ← a + i·h
  for i ∈ 1..n
    y_i ← y0 + ∫ax_i f(x, y_{i-1}) dx
  M ← max(f_deriv(y))
  N ← max(f(x, y))
  dlt ← min(a, b / N)
  fault ← M^n · N · (dlt)^(n+1) / (n + 1)!
  out0 ← fault
  for i ∈ 0..n
    out_{i+1} ← y_i
  out

```

Рис. 2.10.3. Задание функции, возвращающей решение ДУ методом Пикара (файл fnPikar.mcd)

	0
0	7.78457519486·10 ⁻¹¹
1	5.3
2	5.46340155616
3	5.62650688007
4	5.78947945853
5	5.95251650231
6	6.11584391144
7	6.27971330675
8	6.44440084325
9	6.61020759752
10	6.77746140952
11	6.94652015221

Рис. 2.10.4. Нахождение численного решения ДУ методом Пикара

2.10.2. Метод Эйлера и его модификации

Пример 2.10.2.

Решить задачу Коши для ДУ $\frac{d}{dx}y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ на отрезке $[1,7; 2,7]$ при заданном НУ: $y(1,7) = 5,3$ и шаге интегрирования $h = 0,1$ методом Эйлера и усовершенствованным методом Эйлера с шагами h и $h/2$.

В отчете представить: ход работы, программу-функцию, погрешность, графическую иллюстрацию решения и оценку погрешности приближения.

Решение.

Ход решения задачи по методу Эйлера приведен на рис. 2.10.5—2.10.7.

$$f(x, y) := x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right) \quad a := 1.7 \quad b := 2.7 \quad y_0 := 5.3$$

$$h := 0.1 \quad n := \frac{b - a}{h} \quad n = 10$$

$$i := 0..n$$

$$y_0 := y_0 \quad x_1 := a + i \cdot h$$

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$h2 := 0.05$$

$$n2 := \frac{b - a}{h2}$$

$$n2 = 20$$

$$yy_0 := 5.3$$

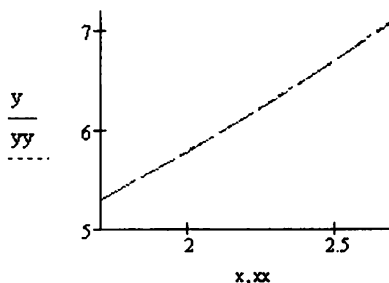
$$i := 0..n2$$

$$yy_0 := yy_0 \quad xx_1 := a + i \cdot h2$$

$$yy_{i+1} := yy_i + h2 \cdot f(xx_i, yy_i)$$

	0
0	5.3
1	5.458
2	5.622
3	5.79
4	5.963
5	6.141
6	6.324
7	6.511
8	6.703
9	6.899
10	7.101
11	7.307

y =



	0
0	5.3
1	5.379
2	5.46
3	5.541
4	5.624
5	5.708
6	5.794
7	5.88
8	5.968
9	6.057
10	6.147
11	6.238
12	6.33
13	6.424
14	6.518
15	6.614

yy =

Рис. 2.10.5. Фрагмент рабочего листа Mathcad с решением уравнения методом Эйлера с шагом h и $h/2$ и графической визуализацией метода Эйлера

1. Составим программу, реализующую метод Эйлера (рис. 2.10.6).

```

eyler(fn, a, b, h, y0) :=
  n ← (b - a) / h
  y0 ← y0
  for i ∈ 0..n - 1
    x1 ← a + i · h
    Δy1 ← h · fn(x1, y1)
    yi+1 ← yi + Δyi
  y

```

Рис. 2.10.6. Листинг программы, реализующей метод Эйлера (файл Euler.mcd)

2. Получим решения ДУ методом Эйлера (рис. 2.10.7).

ES_h := eyler(f, a, b, h, y0)

ES_h2 := eyler(f, a, b, h/2, y0)

ES_h =

	0
0	5.3
1	5.458
2	5.622
3	5.79
4	5.963
5	6.141
6	6.324
7	6.511
8	6.703
9	6.899
10	7.101

ES_h2 =

	0
0	5.3
1	5.379
2	5.46
3	5.541
4	5.624
5	5.708
6	5.794
7	5.88
8	5.968
9	6.057
10	6.147

$$\left| \text{ES\_h2}_{\text{length}(\text{ES\_h2})-1} - \text{ES\_h}_{\text{length}(\text{ES\_h})-1} \right| = 0.011$$

Рис. 2.10.7. Нахождение численного решения ДУ методом Эйлера

Ответ: решением ДУ $\frac{d}{dx}y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ с НУ $y(1,7) = 5,3$ на отрезке $[1,7; 2,7]$ методом Эйлера будет таблица значений ES_h (рис. 2.10.7) с двумя знаками после запятой.

В усовершенствованном методе Эйлера используется следующий порядок вычислений:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \quad x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Примечание

Функцию, возвращающую решение ДУ усовершенствованным методом Эйлера, составить самостоятельно.

$$EA\_h := usov\_eyler(f, a, b, h, y0)$$

$$EA\_h2 := usov\_eyler\left(f, a, b, \frac{h}{2}, y0\right)$$

$$EA\_h =$$

	0
0	5.3
1	5.4609
2	5.62668
3	5.79723
4	5.97248
5	6.15239
6	6.33693
7	6.5261
8	6.71994
9	6.91852
10	7.12194

$$EA\_h2 =$$

	0
0	5.3
1	5.37983
2	5.46088
3	5.54316
4	5.62664
5	5.71132
6	5.79718
7	5.88421
8	5.97242
9	6.06178
10	6.15231

$$\frac{|EA\_h2_{\text{length}(EA\_h2)-1} - EA\_h_{\text{length}(EA\_h)-1}|}{2} = 5.63211 \times 10^{-5}$$

Рис. 2.10.8. Решение ДУ усовершенствованным методом Эйлера с шагами h и $h/2$

Ответ: решением ДУ $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ с НУ $y(1,7) = 5,3$ на отрезке $[1,7; 2,7]$ усовершенствованным методом Эйлера будет таблица значений EA_h (рис. 2.10.8) с пятью знаками после запятой.

2.10.3. Метод Рунге—Кутты

На практике наиболее часто используют метод Рунге—Кутты четвертого порядка.

Пример 2.10.3.

Решить задачу Коши для ДУ $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ на отрезке $[1,7; 2,7]$ при заданном НУ $y(1,7) = 5,3$ и шаге интегрирования $h = 0,1$ методом Рунге—Кутты четвертого порядка с шагом h и $2h$.

В отчете представить: ход работы, программу-функцию, погрешность, графическую иллюстрацию решения и оценку погрешности приближения.

Решение.

1. Вводим данные задачи (рис. 2.10.9).

$$f(x, y) := x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right) \quad a := 1.7 \quad b := 2.7$$

$$h := 0.1 \quad n := \frac{b - a}{h}$$

$$y_0 := 5.3$$

$$i := 0..n$$

Рис. 2.10.9. Задание исходных данных

- Составим функцию, возвращающую решение ДУ первого порядка методом Рунге—Кутты (рис. 2.10.10). Здесь: fn — заданная функция; a, b — концы отрезка; h — шаг; y_0 — начальное значение функции.
- Найдем решения ДУ первого порядка, используя встроенные функции Mathcad (рис. 2.10.11).

Ответ: решением ДУ $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ с НУ $y(1,7) = 5,3$ на отрезке $[1,7; 2,7]$ методом Рунге—Кутты будет таблица значений RK_h (рис. 2.10.10) с восьмью знаками после запятой.


```

fnRungeKutta(fn, a, b, h, y0) :=
  n ← (b - a) / h
  y0 ← y0
  for i ∈ 0..n - 1
    x_i ← a + i · h
    k1_i ← h · fn(x_i, y_i)
    k2_i ← h · fn(x_i + h/2, y_i + k1_i/2)
    k3_i ← h · fn(x_i + h/2, y_i + k2_i/2)
    k4_i ← h · fn(x_i + h, y_i + k3_i)
    Δy_i ← 1/6 · (k1_i + 2k2_i + 2k3_i + k4_i)
    y_{i+1} ← y_i + Δy_i
  y

```

RK_h := fnRungeKutta(f, a, b, h, y0)

RK_2h := fnRungeKutta(f, a, b, 2·h, y0)

RK_h =

	0
0	5.3
1	5.461
2	5.627
3	5.797
4	5.972
5	6.152
6	6.337
7	6.526
8	6.72
9	6.918
10	7.122

RK_2h =

5.3
5.62662949
5.97239634
6.33681138
6.71980687
7.12179221

Рис. 2.10.10. Листинг функции, возвращающей численное решение ДУ методом Рунге—Кутты (файл fnRungeKutta.mcd)

$$rkfixed(y0, a, b, 10, f)^{(1)} =$$

	0
0	5.3
1	5.460877
2	5.626629
3	5.79716
4	5.972396
5	6.152287
6	6.336811
7	6.525973
8	6.719807
9	6.91838
10	7.121792

$$\frac{|RK\_2h_{length(RK\_2h)-1} - RK\_h_{length(RK\_h)-1}|}{15} = 2.15047438 \times 10^{-8}$$

Рис. 2.10.11. Нахождение численного решения ДУ с помощью встроенных функций пакета Mathcad

2.10.4. Метод Адамса

Пример 2.10.4.

Решить задачу Коши для ДУ $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ на отрезке $[1,7;2,7]$ при заданном НУ $y(1,7) = 5,3$ и шаге интегрирования $h = 0,1$ методом Адамса с шагом h .

В отчете представить: ручной счет, программу-функцию, погрешность, графическую иллюстрацию решения и оценку погрешности приближения.

Решение.

1. Найдем первые четыре числа по формуле Рунге—Кутты (см. лекцию № 9, разд. 1.9.4) (рис. 2.10.12).

$$y_i := \text{fnRungeKutta}(f, a, b, h, y0)_i$$

$$y = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 5.46087697 \\ 5.6266294 \\ 5.79716044 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.10.12. Вычисление первых четырех значений численного решения по формуле Рунге—Кутты

2. Составим функцию, реализующую метод Адамса (рис. 2.10.3). Здесь a, b — концы отрезка; y_1 — начальное значение функции; h — шаг.

```

Adams(a,b,y1,h) :=
  x1 ← a
  for i ∈ 1..  $\frac{b-a}{h}$ 
    xi+1 ← xi + h
  y1 ← y1
  for i ∈ 1.. 4 - 1
    k1 ← h·f[xi,yi]
    k2 ← h·f( $x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}$ )
    k3 ← h·f( $x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2}$ )
    k4 ← h·f[xi + h, yi + k3]
    Δy ←  $\frac{1}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot k2 + 2 \cdot k3 + k4)$ 
    yi+1 ← yi + Δy
  m ← 3
  for i ∈ 1..  $\frac{b-a}{h} - 3$ 
    m ← m + 1
    p ← 1
    q ← 0
    for j ∈ i.. m
      q ← q + 1
      zq,p ← h·f[xj,yj]
    for n ∈ 4.. 2
      p ← p + 1
      for k ∈ 1.. n - 1
        zk,p ← zk+1,p-1 - zk,p-1
      Δy ← h·f[x3+i,yi+3] +  $\frac{1}{2} \cdot z_{3,2} + \frac{5}{12} \cdot z_{2,3} + \frac{3}{8} \cdot z_{1,4}$ 
      y4+i ← y3+i + Δy
  y

```

Рис. 2.10.13. Функция, возвращающая численное решение ДУ методом Адамса (файл Adams.mcd)

3. Графическая иллюстрация решения ДУ разными методами представлена на рис. 2.10.14.

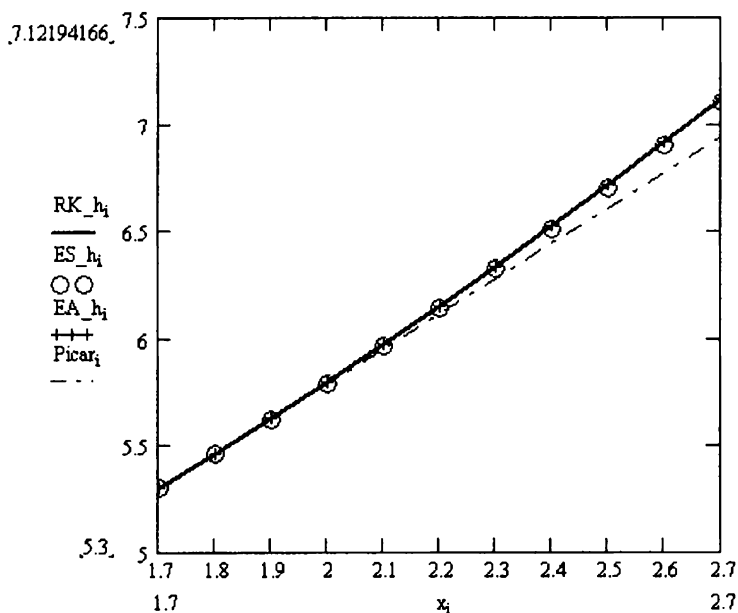


Рис. 2.10.14. Визуализация решения ДУ разными методами

Ответ: решением ДУ $\frac{d}{dx} y(x) = x + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$ с НУ $y(1.7) = 5.3$ на отрезке $[1.7; 2.7]$ методом Адамса будет таблица значений $Adams(1.7, 2.7, 5.3, 0.1)$.

2.10.5. Вопросы по теме

1. Что значит — решить задачу Коши для ДУ первого порядка?
2. Графическая интерпретация численного решения ДУ.
3. Какие существуют методы решения ДУ в зависимости от формы представления решения?
4. В чем заключается суть принципа сжимающих отображений?
5. Рекуррентная формула метода Пикара.
6. В чем заключается суть метода ломаных Эйлера?
7. Применение каких формул позволяет получить значения искомой функции по методу Эйлера?

8. Графическая интерпретация метода Эйлера и усовершенствованного метода Эйлера. В чем их отличие?
9. В чем заключается суть метода Рунге—Кутты?
10. Как определить количество верных цифр в числе, являющемся решением ДУ методом Эйлера, усовершенствованного метода Эйлера, Пикара, Рунге—Кутты?

2.10.6. Задание к лабораторной работе № 10

Задание 2.10.1.

Решить задачу Коши для ДУ $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном НУ $y(a) = c$ и шаге интегрирования h (исходные параметры заданы в табл. 2.10.1):

- 1) методом Эйлера и усовершенствованным методом Эйлера с шагом h и $h/2$;
- 2) методом Рунге—Кутты с шагом h и $2h$;
- 3) методом Адамса;
- 4) методом Пикара.

Решение должно содержать: ход работы, программу метода, графическое решение уравнения и оценка погрешности приближения. В числах оставлять 5 цифр после запятой.

Таблица 2.10.1. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0	h
1	$3x^2 + 0,1xy$	$[0; 1]$	$y(0) = 0,2$	0,1
2	$0; 185(x^2 + \cos(0,7x)) + 1,843y$	$[0, 2; 1, 2]$	$y(0,2) = 0,25$	0,1
3	$x + \cos\left(\frac{y}{3}\right)$	$[1,6; 2,6]$	$y(1,6) = 4,6$	0,1
4	$x + \sin\left(\frac{y+1}{\sqrt{13}}\right)$	$[0, 2; 1, 2]$	$y(0,2) = 1,1$	0,1

Таблица 2.10.1 (продолжение)

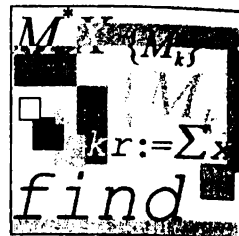
№	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0	h
5	$x + \cos\left(\frac{y}{e}\right)$	$[1, 4; 2, 4]$	$y(1, 4) = 2, 5$	0,1
6	$x^2 + \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	$[1, 7; 2, 7]$	$y(1, 7) = 5, 3$	0,1
7	$-3y + \sqrt{4x^2 + 1}$	$[2, 6; 4, 6]$	$y(2, 6) = 3, 5$	0,2
8	$2 - \sin^2(x + y)$	$[2; 3]$	$y(2) = 2, 3$	0,1
9	$1, 6x + 0, 5y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0, 3$	0,1
10	$x - \cos\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)$	$[1, 8; 2, 8]$	$y(1, 8) = 2, 6$	0,1
11	$x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{11}}\right)$	$[2, 1; 3, 1]$	$y(2, 1) = 2, 5$	0,1
12	$e^{2x} + 0, 25y^2$	$[0; 0, 5]$	$y(0) = 2, 6$	0,05
13	$x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$	$[-2; -1]$	$y(-2) = 3$	0,1
14	$0, 133 \cdot (x^2 + \sin(2x)) + 0, 872y$	$[0, 2; 1, 2]$	$y(0, 2) = 0, 25$	0,1
15	$\sin(x + y) + 1, 5$	$[1, 5; 2, 5]$	$y(1, 5) = 4, 5$	0,1
16	$x + \cos\left(\frac{y}{1, 25}\right)$	$[0, 4; 1, 4]$	$y(0, 4) = 0, 8$	0,1
17	$2, 5x + \cos(y + 0, 6)$	$[1; 3]$	$y(1) = 1, 5$	0,2
18	$\cos(1, 5y + x)^2 + 1, 4$	$[1; 2]$	$y(1) = 1, 5$	0,1

Таблица 2.10.1 (продолжение)

№	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0	h
19	$\frac{1}{1+x^3y} + 2y$	$[1,5; 2]$	$y(1,5) = 2,1$	0,05
20	$\cos y + 3x$	$[0; 2]$	$y(0) = 1,3$	0,1
21	$\cos(1,5x - y^2) - 1,3$	$[-1; 1]$	$y(-1) = 0,2$	0,2
22	$x + \sin\left(\frac{y}{3}\right)$	$[1,6; 2,6]$	$y(1,6) = 4,6$	0,1
23	$e^{-(y-1)} + 2x$	$[0; 0,5]$	$y(0) = 0,3$	0,05
24	$1 + 2y \sin x - y^2$	$[1; 2]$	$y(1) = 0$	0,1
25	$\frac{\cos y}{x+2} - 0,3y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	0,1
26	$0,166(x^2 + \sin(1,1x)) + 0,883y$	$[0,2; 1,2]$	$y(0,2) = 0,25$	0,1
27	$x + \cos\left(\frac{y+x}{\pi}\right)$	$[1,7; 2,7]$	$y(1,7) = 5,6$	0,1
28	$x + \cos\left(\frac{y}{e}\right)$	$[1,4; 2,4]$	$y(1,4) = 2,5$	0,1
29	$x + \sin\left(\frac{y}{\sqrt{10}}\right)$	$[0,6; 1,6]$	$y(0,6) = 0,8$	0,1
30	$y + \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$	$[1; 2]$	$y(1) = 5,9$	0,1
31	$1 + 0,8y \sin x - 2y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	0,1
32	$x + \sin\left(\frac{y}{2,5}\right)$	$[0,5; 1,5]$	$y(0,5) = 1,8$	0,1

Таблица 2.10.1 (окончание)

№	$f(x, y)$	$[a, b]$	y_0	h
33	$x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{1,3}}\right)$	$[1, 2; 2, 2]$	$y(1,2) = 1,8$	0,1
34	$1 + 2,2 \cdot \sin x + 1,5y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	0,1
35	$\frac{\cos y}{x+2} - 0,3y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	0,1
36	$\frac{\cos y}{1,5+x} - 1,2y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	0,1
37	$\cos(x-y) + \frac{1,25y}{1,5+x}$	$[0; 1]$	$y(0) = 0$	0,1
38	$0,2x^2 + y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0,8$	0,1
39	$x^2 + y$	$[0; 1]$	$y(0) = 0,4$	0,1
40	$xy + 0,1y^2$	$[0; 1]$	$y(0) = 0,5$	0,1



Лабораторная работа № 11

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных

Цель работы: дать студентам знания о теории дифференциальных уравнений в частных производных, и их применении в различных областях физики и техники; дать представление о существовании краевых и смешанных задач и их решениях; выработать навыки решения смешанной задачи для уравнения Лапласа, теплопроводности и колебания струны методом сеток.

Литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 495—599.
2. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие для техникумов. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1990. — С. 161—176.
3. Демидович Б. П., Маррон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные уравнения / Под ред. Б. П. Демидовича. — М.: Физматлит, 1962. — С. 268—333.

2.11.1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток

Пример 2.11.1.

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (или уравнения эллиптического типа), удовлетворяющее на эллипсе Γ , заданном уравнением

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, условию $u(x, y)|_{\Gamma} = 0,5 \cdot (|x| + |y|)$ с шагом $h = 1$. Уточнение решения производить до сотых долей с помощью процесса Либмана.

Решение.

1. Используя симметрию заданных НУ, будем искать значение функции $u = u(x, y)$ только в I четверти.

Для того чтобы построить область G , ограниченную контуром Γ , составим таблицу значений y от x (табл. 2.11.1).

Таблица 2.11.1. Координаты выбранных точек, принадлежащих эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

x	0	1	2	3	4
y	3	2,90	2,60	1,98	0

Построим часть этого эллипса в I четверти (рис. 2.11.1).

$$y(x) := 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$$

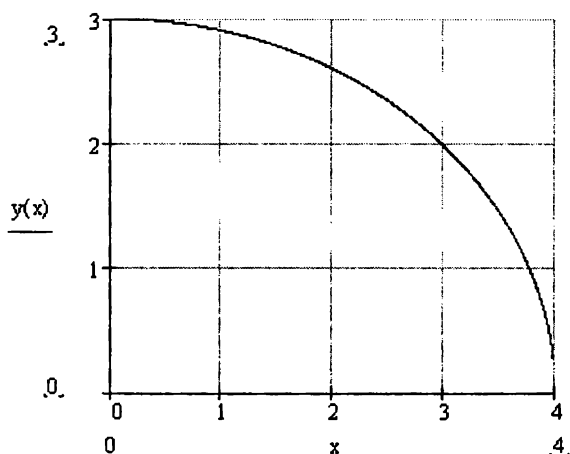


Рис. 2.11.1. Визуализация граничного условия

2. Строим сетку с шагом $h = 1$ (рис. 2.11.1). Точки на оси y : 1, 2, и на оси x : 0, 1, 2, 3, будут внутренними (отмечены белыми кружками на рис. 2.11.2),

т. к. все они лежат внутри контура Γ (не забывая, что мы построили только четверть эллипса). *Граничные* точки I рода на рисунке обозначены черными кружочками и буквами $A_h, B_h, C_h, D_h, E_h, F_h$ — все эти точки (граничные и внутренние) расчетные. Граничных узлов II рода в данном случае нет.

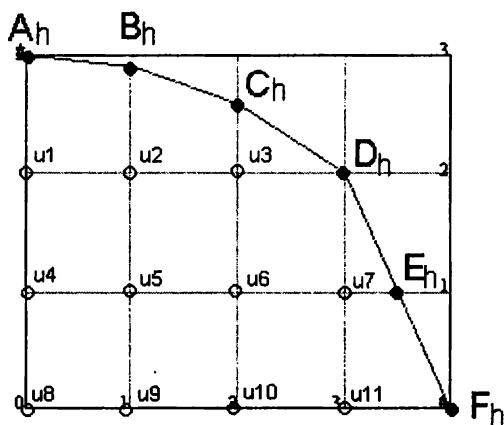


Рис. 2.11.2. Визуализация узлов координатной сетки

3. Ищем значения функции на границе, т. е. в точках $A_h, B_h, C_h, D_h, E_h, F_h$, где граничная функция задана нам в начальных условиях (рис. 2.11.3).

$$\begin{aligned}
 u_{0,0} &:= U_r(0,3) && \text{значение искомой функции в граничной точке } (0,3) && u_{0,0} = 1.5 \\
 u_{0,1} &:= U_r(1,y(1)) && \text{значение искомой функции в граничной точке } (1;2,9) && u_{0,1} = 1.95 \\
 u_{0,2} &:= U_r(2,y(2)) && \text{значение искомой функции в граничной точке } (2;2,6) && u_{0,2} = 2.3 \\
 u_{1,3} &:= U_r(3,y(3)) && \text{значение искомой функции в граничной точке } (3;1,98) && u_{1,3} = 2.49 \\
 u_{2,4} &:= U_r(x(1),1) && \text{значение искомой функции в граничной точке } (3,77;1) && u_{2,4} = 2.39 \\
 u_{3,4} &:= U_r(4,0) && \text{значение искомой функции в граничной точке } (4,0) && u_{3,4} = 2
 \end{aligned}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.95 & 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.11.3. Вычисление значений функции на границе области

4. Теперь определим начальные значения функции $u(x, y)$ во внутренних точках. Для этого заменим уравнение Лапласа в каждой такой точке (см. рис. 2.11.1) конечно-разностными уравнениями; замену проведем согласно формуле (1.10.7):

$$u(x, y) = \frac{1}{4} \cdot (u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h)).$$

Каждое такое уравнение получается приравниванием значения функции во внутренней точке среднему арифметическому четырех значений функции в соседних точках:

$$u_1(0,2) = \frac{1}{4}(u(A) + u_4 + 2u_2) \quad (2u_2 \text{ — в силу симметричности условий}).$$

Итак, $u_1 = \frac{1}{4}(u(0,3) + u_4 + 2u_2) = \frac{1}{4}(1,5 + u_4 + 2u_2)$, т. е. уравнение в конечных разностях во внутренней точке u_1 выглядит так:

$$u_1 = \frac{1}{4}(1,5 + u_4 + 2u_2) \quad (\text{рис. 2.11.4}).$$

$$\begin{array}{lllllll} u1 := 0 & u2 := 0 & u3 := 0 & u4 := 0 & u5 := 0 & u6 := 0 & u7 := 0 \\ u8 := 0 & u9 := 0 & u10 := 0 & u11 := 0 & & & \end{array}$$

Given

$$u1 = \frac{1}{4} \cdot (u_{0,0} + 2 \cdot u2 + u4) \qquad u2 = \frac{1}{4} \cdot (u_{0,1} + u3 + u1 + u5)$$

$$u3 = \frac{1}{4} \cdot (u_{0,2} + u_{1,3} + u2 + u6) \qquad u4 = \frac{1}{4} \cdot (u1 + u8 + 2 \cdot u5)$$

$$u5 = \frac{1}{4} \cdot (u2 + u6 + u4 + u9) \qquad u6 = \frac{1}{4} \cdot (u3 + u5 + u7 + u10)$$

$$u7 = \frac{1}{4} \cdot (u_{1,3} + u_{2,4} + u11 + u6) \qquad u8 = \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot u5)$$

$$u9 = \frac{1}{4} \cdot (u8 + u10 + 2 \cdot u5) \qquad u10 = \frac{1}{4} \cdot (u9 + u11 + 2 \cdot u6)$$

$$u11 = \frac{1}{4} \cdot (u_{3,4} + 2 \cdot u7 + u10)$$

$$t := \text{Find}(u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7, u8, u9, u10, u11)$$

Рис. 2.11.4. Вычисление начальных значений функции во внутренних точках заданной области

5. Из одиннадцати уравнений, представленных на рис. 2.11.4, составим систему и найдем первое приближение к решению. Приближения будем искать до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность (пока разность между координатами последующей точки и предыдущей не станет меньше 0,01) (рис. 2.11.5).

	0	$u_{1,0} := t_0$	$u_{2,3} := t_6$	Заполняем матрицу, используемую далее для сохранения значений, получаемых при усреднении по Либману, и визуализации решения задачи.
0	1.9374	$u_{1,1} := t_1$	$u_{3,0} := t_7$	
1	2.0782	$u_{1,2} := t_2$	$u_{3,1} := t_8$	
2	2.2785	$u_{2,0} := t_3$	$u_{3,2} := t_9$	
3	2.0929	$u_{2,1} := t_4$	$u_{3,3} := t_{10}$	
$t = 4$	2.1448	$u_{2,2} := t_5$		
5	2.2446			
6	2.3363			
7	2.1448			
8	2.1633			
9	2.2188			
10	2.2229			

$$u = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.952 & 2.299 & 0 & 0 \\ 1.937 & 2.078 & 2.279 & 2.492 & 0 \\ 2.093 & 2.145 & 2.245 & 2.336 & 2.386 \\ 2.145 & 2.163 & 2.219 & 2.223 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.11.5. Вычисление приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Найденные значения функции $u(x, y)$ есть грубое приближение решения уравнения Лапласа (шаблон № 1).

6. Уточняем значения решения в граничных точках, используя для этого формулу линейной интерполяции (рис. 2.11.6).

$$\delta_B = 2,90 - 3 = -0,1, \text{ тогда } u(B_h) = 1,95 - \frac{0,1 \cdot (2,05 - 1,95)}{0,9} = 1,94.$$

Таким образом, для всех граничных точек получим:

$$\delta_C = 2,60 - 3 = -0,4; \quad u(C_h) = 2,3 - \frac{0,4 \cdot (2,1 - 2,3)}{0,6} = 2,43;$$

$$\delta_D = 1,98 - 2 = -0,02; \quad u(D_h) = 2,49 - \frac{0,02 \cdot (2,34 - 2,49)}{0,98} = 2,49;$$

$$\delta_E = 3,77 - 4 = -0,23; \quad u(E_h) = 2,49 - \frac{0,23 \cdot (2,34 - 2,39)}{0,77} = 2,40.$$

$$h := 1$$

$$u_{0,0} := 1.5 \quad \text{для точки A}$$

$$\delta := y(1) - 3$$

$$\delta = -9.526 \times 10^{-2}$$

$$u_{0,1} := u_{0,0} + \delta \cdot \left(\frac{u_{1,1} - u_{0,1}}{h + \delta} \right) \quad u_{0,1} = 1.952 \quad \text{для точки B}$$

$$\delta := y(2) - 3$$

$$\delta = -0.402$$

$$u_{0,2} := u_{0,1} + \delta \cdot \left(\frac{u_{1,2} - u_{0,2}}{h + \delta} \right) \quad u_{0,2} = 2.299 \quad \text{для точки C}$$

$$\delta := y(3) - 2$$

$$\delta = -1.569 \times 10^{-2}$$

$$u_{1,3} := u_{1,2} + \delta \cdot \left(\frac{u_{2,3} - u_{1,3}}{h + \delta} \right) \quad u_{1,3} = 2.492 \quad \text{для точки D}$$

$$\delta := x(1) - 4$$

$$\delta = -0.229$$

$$u_{2,4} := u_{2,3} + \delta \cdot \left(\frac{u_{3,4} - u_{2,4}}{h + \delta} \right) \quad u_{2,4} = 2.39 \quad \text{для точки E}$$

$$\delta := y(4) - 0$$

$$\delta = 0$$

$$u_{3,4} := u_{3,3} + \delta \cdot \left(\frac{u_{3,4} - u_{3,4}}{h + \delta} \right) \quad u_{3,4} = 2 \quad \text{для точки F}$$

Рис. 2.11.6. Уточнение значения с помощью линейной интерполяции (получение шаблона № 2)

Так как точки F и F_h совпадают, то $\delta_F = 0$, значит, $u(F_h) = u(F) = 2$ (так же как и в случае с A_h и A).

Заметим, что все граничные точки не принадлежат области G , поэтому согласно теории, во всех случаях $\delta < 0$, кроме частных случаев с точками A и F .

Аналогично строим шаблоны № 3, 4, 5 и т. д., пока последовательные два шаблона не совпадут с заданной точностью (до сотых долей). Функцию, реализующую построение шаблонов составить самостоятельно.

Решая задачу, замечаем, что шаблоны № 10 и № 11 совпадают до сотых долей, поэтому итерационный процесс заканчивается.

Значения в шаблоне № 11 являются численными решениями задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

2.11.2. Решение уравнения теплопроводности методом сеток

Пример 2.11.2.

Используя метод сеток, решить уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа): $\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$ при заданных НУ: $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = \varphi(t)$, $u(0,6;t) = \psi(x)$, где $x \in [0;0,6]$.

Решение найти при $h = 0,1$ для $t \in [0;0,01]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\delta = \frac{1}{6}$, $u(x,0) = 3x(1-x) + 0,12$; $u(0,t) = 2(t + 0,06)$; $u(0,6;t) = 0,84$.

Решение.

Это уравнение решается методом сеток постепенным переходом от значений функции $u(x_i, t_j)$ к значениям $u(x_i, t_{j+1})$; причем $t_{j+1} = t_{j+k}$, где

$$k = h \cdot \frac{h}{6} = \frac{0,01}{6} = 0,0017.$$

1. Строим сетку по оси Ox с шагом h , по оси Ot — с шагом k (рис. 2.11.7).

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$h := 0.1 \quad \delta := \frac{1}{6} \quad k := h^2 \cdot \delta \quad k = 1.667 \times 10^{-3}$$

$$n := \frac{0.6}{h} + 1 \quad m := \frac{0.01}{k} + 1$$

$$n = 7 \quad m = 7$$

$$i := 2..8 \quad j := 2..8$$

$$x_1 := 0 \quad t_1 := 0$$

$$x_i := (i-1) \cdot h \quad t_j := (j-1) \cdot k$$

Рис. 2.11.7. Визуализация пространственно-временной сетки

2. Решение уравнения удобно оформлять в виде матрицы. Сначала заполним ее, исходя из начальных условий — заданными значениями температуры стержня в начальный момент времени по всей его длине (рис. 2.11.8).

$$i := 1..7 \quad j := 1..7$$

$$\phi(x) := [3 \cdot x \cdot (1 - x)] + 0.12$$

$$\text{tab}_{1,i} := \phi(x_i)$$

Рис. 2.11.8. Задание начальных условий

3. Теперь заполним ее, используя краевые условия (рис. 2.11.9).

$$\psi_1(t) := 2 \cdot (t + 0.06) \quad \psi_2(t) := 0.84$$

$$\text{tab}_{j,1} := \psi_1(t_j) \quad \text{tab}_{j,7} := \psi_2(t_j)$$

Рис. 2.11.9. Инициализация матрицы, используемой при нахождении численного решения, и внесение в нее краевых условий

4. Получаем начальную матрицу (рис. 2.11.10).

$$\text{tab} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.39 & 0.6 & 0.75 & 0.84 & 0.87 & 0.84 \\ 0.1233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.84 \\ 0.1267 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.84 \\ 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.84 \\ 0.1333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.84 \\ 0.1367 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.84 \\ 0.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.84 \end{pmatrix}.$$

Рис. 2.11.10. Внесение в матрицу краевых условий

Строка таблицы $j = 0$ заполняется на основе заданных НУ:

$$u(x_i; 0) = 3x_i(1 - x_i) + 0.12; \text{ при } i = 1, 2, \dots;$$

$$u(0; 0) = 3 \cdot 0 \cdot (1 - 0) + 0.12 = 0.12;$$

$$u(0, 1; 0) = 3 \cdot 0.1 \cdot (1 - 0.1) + 0.12 = 0.39;$$

$$u(0, 2; 0) = 3 \cdot 0.2 \cdot (1 - 0.2) + 0.12 = 0.6 \text{ и т. д. до } u(0, 6; 0).$$

В первый ($i = 0$) и последний ($i = 6$) столбцы вписываются данные граничных условий:

$$u(0; t_j) = 2 \cdot (t_j + 0,06), \text{ где } j = 1, 2, \dots, 6;$$

$$u(0; 0) = 2 \cdot (0 + 0,06) = 0,12;$$

$$u(0; 0,0017) = 2 \cdot (0,0017 + 0,06) = 0,1234 \text{ и т. д. до } j = 6.$$

В столбец ($i = 6$) записываем из условия второй границы: $u(0,6; t) = 0,84$, для всех $j = 1, 2, \dots, 6$.

5. Заполняем оставшуюся часть таблицы (рис. 2.11.11).

$$j := 2..7 \quad i := 2..6$$

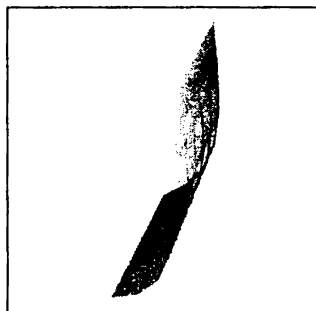
$$tab_{j,i} := \frac{1}{6} \cdot (tab_{j-1,i-1} + 4 \cdot tab_{j-1,i} + tab_{j-1,i+1})$$

$$tab = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.39 & 0.6 & 0.75 & 0.84 & 0.87 & 0.84 \\ 0.1233 & 0.38 & 0.59 & 0.74 & 0.83 & 0.86 & 0.84 \\ 0.1267 & 0.3722 & 0.58 & 0.73 & 0.82 & 0.8517 & 0.84 \\ 0.13 & 0.3659 & 0.5704 & 0.72 & 0.8103 & 0.8444 & 0.84 \\ 0.1333 & 0.3607 & 0.5612 & 0.7101 & 0.8009 & 0.838 & 0.84 \\ 0.1367 & 0.3562 & 0.5526 & 0.7004 & 0.792 & 0.8322 & 0.84 \\ 0.14 & 0.3524 & 0.5445 & 0.6911 & 0.7834 & 0.8268 & 0.84 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.11.11. Заполнение оставшейся части матрицы

Численным решением уравнения теплопроводности с заданными начальными и краевыми условиями являются значения, записанные в матрице tab .

6. Визуализация решения уравнения теплопроводности методом сеток (рис. 2.11.12).



tab

Рис. 2.11.12. Графическое решение уравнения теплопроводности

2.11.3. Решение уравнения колебания струны методом сеток

Пример 2.11.3.

Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для уравнения колебания струны (уравнения гиперболического типа):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{с НУ: } u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = \Phi(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \text{и ГУ: } u(0,t) = \varphi(t), \quad u(1,t) = \psi(t).$$

Решение выполнить с шагом $h=0,1$, определяя значения функции $u(x,t)$ с четырьмя десятичными знаками, причем $0 \leq t \leq 0,5$.

$$f(x) = 2x(1-x^2), \quad \Phi(x) = (x+0,4)\cos(x+0,3), \quad \varphi(t) = 0,5t^2, \quad \psi(t) = 0.$$

Решение.

Воспользуемся соотношением:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}.$$

где $i=1, 2, \dots, j=1, 2, \dots$, при этом $u_{i,0} = f_i$, а для определения $u_{i,1}$ можно использовать один из возможных приемов, например:

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i,$$

причем

$$x_i = 0 + ih \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad n = \frac{1-0}{h} = 10;$$

$$t_j = 0 + jh \quad (j=0, 1, \dots, 5).$$

Кроме того, $u_{0,j} = \varphi(t_j)$; $u_{n,j} = \psi(t_j)$.

Решение по указанным формулам удобно выполнять в матрице, которая и является решением данной задачи.

Порядок заполнения.

1. Вычисляем значения $x_i = 0,1 \cdot i$ и заполняем ими первую строчку (для значения $t_0 = 0$), исходя из НУ (рис. 2.11.13).

```

ORIGIN := 1
h := 0.1
i := 2..11          j := 2..6
x1 := 0             t1 := 0
xi := h·(i - 1)     tj := (j - 1)·h
i := 1..11          j := 1..6

φ(x) := 2x1 - x2
tab1,i := φ(xi)

```

Рис. 2.11.13. Задание начальных условий

2. Вычисляем значения $u_{0,j} = \varphi(t_j) = 0,5t_j^2$ при $t_j = 0,1$ и заполняем ими первый столбец таблицы (он соответствует значению $x_0 = 0$). Последний столбец заполняем значениями $u_{10,j} = \psi(t_j) = 0$ (рис. 2.11.14).

$\psi_1(t) := 0,5 \cdot t^2$ $\psi_2(t) := 0$

$tab_{j,1} := \psi_1(t_j)$ $tab_{j,11} := \psi_2(t_j)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0.198	0.384	0.546	0.672	0.75	0.768	0.714	0.576	0.342	0
2	$5 \cdot 10^{-3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.045	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2.11.14. Задание граничных условий

3. Вычисляем значения $u_{i,1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + h\Phi_i$, где f_{i+1} и f_{i-1} берутся из первой строки таблицы, а $\Phi_i = (x_i + 0,4) \cdot \cos(x_i + 0,3)$; $x_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$); $h = 0,1$. Результаты записываем во вторую строку таблицы.

4. Вычисляем значения $u_{i,j}$ в последующих строках по формуле

$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$, где значения $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j-1}$ берутся из двух предыдущих строк таблицы (рис. 2.11.15).

$i := 2..10$

$\theta(x) := (x + 0.4) \cdot \cos(x + 0.3)$

$\text{tab}_{2,i} := \frac{1}{2} \cdot (\text{tab}_{1,i+1} + \text{tab}_{1,i-1}) + h \cdot \theta(x_i)$

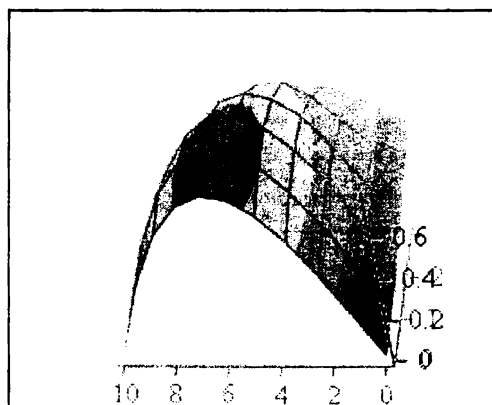
$i := 3..6 \quad j := 2..10$

$\text{tab}_{i,j} := \text{tab}_{i-1,j-1} + \text{tab}_{i-1,j+1} - \text{tab}_{i-2,j}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0.198	0.384	0.546	0.672	0.75	0.768	0.714	0.576	0.342	0
2	$5 \cdot 10^{-3}$	0.238	0.425	0.586	0.709	0.783	0.794	0.731	0.582	0.335	0
3	0.02	0.232	0.44	0.588	0.696	0.753	0.746	0.663	0.491	0.24	0
4	0.045	0.222	0.395	0.551	0.632	0.66	0.622	0.505	0.321	0.155	0
5	0.08	0.208	0.332	0.439	0.514	0.5	0.419	0.28	0.17	0.08	0
6	0.125	0.191	0.252	0.296	0.307	0.273	0.158	0.084	0.039	0.015	0

Рис. 2.11.15. Нахождение решения во внутренних точках области

5. Строим сеточную область решения задачи (интегральную плоскость) (рис. 2.11.16).



tab

Рис. 2.11.16. Графическое решение задачи колебания струны методом сеток

2.11.4. Вопросы по теме

1. Уравнения какого вида называются дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП), и что является решением УЧП?
2. Какое УЧП называется линейным?
3. Назовите основные типы линейных ДУ с постоянными коэффициентами, и условие, в зависимости от которого происходит эта классификация.
4. Назовите и запишите примеры простейших УЧП эллиптического и параболического типов.
5. Что значит решить задачу Коши для УЧП?
6. Что является начальными и краевыми условиями для УЧП?
7. Что значит решить краевую и смешанную задачи для УЧП?
8. Какая задача носит название "Задачи Дирихле" для уравнения Лапласа, и что значит решить эту задачу?
9. Какие функции называются гармоническими в теории УЧП?
10. Какие методы численного решения УЧП?
11. В чем состоит суть метода конечных разностей (сеток)?
12. Какие точки называются внутренними, граничными I и II рода при решении ДУ методом сеток?
13. В чем заключается суть решения задачи Дирихле методом сеток?
14. По какой формуле находятся значения функции во внутренних узлах и внешних (граничных) при решении задачи Дирихле методом сеток?
15. За счет чего происходит грубое приближение искомых значений при решении задачи Дирихле методом сеток?
16. В чем заключается суть процесса усреднения Либмана, и для чего он применяется?
17. Как строится решение задачи Дирихле методом сеток?
18. Что значит решить уравнение теплопроводности методом сеток?
19. По какой формуле рассчитывается значение искомой функции во внутренних узлах сетки, при решении уравнения теплопроводности?
20. Алгоритм решения уравнения теплопроводности методом сеток.

2.11.5. Задание к лабораторной работе № 11

Задание 2.11.1.

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (табл. 2.11.2) эллиптического вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ с заданными НУ и с шагом } h=1 \text{ (исходные параметры за-}$$

даны в табл. 2.11.2). Уточнение решения производить до сотых долей с помощью процесса Либмана.

В отчете представить: ход работы, программу-функцию, графическую иллюстрацию.

Таблица 2.11.2. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№	Γ	$u(x, y) _{\Gamma}$
1	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$ x + y $
2	$x^2 + y^2 = 16$	$ x + y $
3	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$ x \cdot y $
4	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 \cdot x + y $
5	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$2 \cdot (x + y)$
6	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x \cdot y $
7	$x^2 + y^2 = 25$	$ x + y $
8	$x^2 + y^2 = 16$	$0,5 \cdot x + y $
9	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$0,5 \cdot x + y $
10	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	$ x + y $

Таблица 2.11.2 (продолжение)

№	Γ	$u(x, y) _{\Gamma}$
11	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 \cdot x + 0,5 \cdot y $
12	$x^2 + y^2 = 16$	$0,5 \cdot x + 2 \cdot y $
13	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x + 2 \cdot y $
14	$x^2 + y^2 = 16$	$0,5 \cdot (x + 2 \cdot y)$
15	$x^2 + y^2 = 9$	$ x + 3 \cdot y $
16	$(x + 5) \cdot (y + 5) = 45$	$ x + 0,5 \cdot y $
17	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x + 0,5 \cdot y $
18	$x^2 + y^2 = 25$	$2 \cdot x \cdot y $
19	$x^2 + y^2 = 16$	$3 \cdot (x + y)$
20	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 \cdot x + 0,5 \cdot y $
21	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$0,2 \cdot x + y $
22	$x^2 + y^2 = 9$	$ x \cdot y $
23	$(x + 2) \cdot (y + 2) = 12$	$ x \cdot y $
24	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$ x + 0,5 \cdot y $
25	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$2 \cdot x + y $
26	$x^2 + y^2 = 25$	$0,5 \cdot (x + 3 \cdot y)$
27	$x^2 + y^2 = 16$	$0,4 \cdot x \cdot y $

Таблица 2.11.2 (окончание)

№	Γ	$u(x, y) _{\Gamma}$
28	$(x + 2) \cdot (y + 2) = 12$	$2 \cdot x + y $
29	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$3 \cdot x + 2 \cdot y $
30	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$	$2 \cdot x + 0,2 \cdot y $
31	$(x + 2) \cdot (y + 2) = 12$	$2 \cdot x + 0,5 \cdot y $
32	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{ x }{ y }$
33	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$	$0,2 \cdot x \cdot y $
34	$(x + 2) \cdot (y + 3) = 18$	$2 \cdot x + 0,5 \cdot y $
35	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$	$ x \cdot y $
36	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$ x \cdot y $
37	$x^2 + y^2 = 16$	$ x + y $
38	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$0,8 \cdot x \cdot y $
39	$(x + 3) \cdot (y + 3) = 16$	$2 \cdot x + 0,4 \cdot y $
40	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$	$0,5 \cdot x \cdot y $

Задание 2.11.2

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение

смешанной задачи для ДУ параболического типа: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при за-

данных НУ: $u(x,0)=f(x)$, $u(0,t)=\varphi(t)$; $u(0,6;t)=\psi(t)$, где $x \in [0;0,6]$ (исходные параметры заданы в табл. 2.11.3). Решение выполнить при $h=0,1$ для $t \in [0;0,01]$ с тремя десятичными знаками, считая $\delta = \frac{1}{6}$.

Таблица 2.11.3. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
1	$\cos(2x)$	$1-6t$	0,3624
2	$x(x+1)$	$2t+0,96$	0,960
3	$1,3+\ln(x+0,4)$	$0,8+t$	1,2
4	$\sin(2x)$	$2t$	0,932
5	$3x(2-x)$	$t+2,52$	2,52
6	$\sin(0,55x+0,33)$	$t+0,33$	0,354
7	$2x(1-x)+0,2$	$0,2+t$	0,680
8	$\sin x+0,08$	$0,08+2t$	0,6446
9	$\cos(2x+0,19)$	0,932	0,1798
10	$2x(x+0,2)+0,4$	$2t+0,4$	1,36
11	$\ln(x+0,26)+1$	$0,415+t$	0,9345
12	$\sin(x+0,45)$	$0,435-2t$	0,8674
13	$0,3+x(x+0,4)$	$0,3+t$	0,9
14	$(x-0,2)(x+1)+0,2$	$6t$	0,84
15	$x(0,3+2x)$	t	0,9
16	$\sin(x+0,02)$	$3t+0,02$	0,581

Таблица 2.11.3 (продолжение)

№	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
17	$\cos(x + 0,48)$	$6t + 0,887$	0,4713
18	$\ln(263 - x)$	$3(0,14 - t)$	0,3075
19	$1,5 - x(1 - x)$	$3(0,5 - t)$	1,26
20	$\cos(x + 0,845)$	$6(t + 0,11)$	0,1205
21	$0,6 + x(0,8 - x)$	$0,6 + t$	0,72
22	$\cos(x + 0,66)$	$3t + 0,79$	0,3058
23	$0,9 + 2x(1 - x)$	$3(0,3 - 2t)$	1,38
24	$\ln(1,95 + x)$	$0,29 + 6t$	0,4065
25	$x(1 - x) + 0,2$	$0,2t$	0,44
26	$1 - \lg(x + 4)$	$t + 1$	1,4
27	$2\cos(x + 0,55)$	$0,8179 + 3t$	1,705
28	$\sin(0,9 + x)$	$0,02 + 3t$	0,581
29	$\sin(0,48 + x)$	$0,882 + 3t$	0,4618
30	$\sin(3x)$	$3t$	0,932
31	$3x(1 - x) + 0,12$	$2(t + 0,06)$	0,84
32	$\cos(x + 0,45)$	$3t + 0,9$	0,058
33	$2x(x - 0,2) + 0,54$	$2t + 0,4$	5,36
34	$x(x + 3)$	$2t + 0,86$	0,94

Таблица 2.11.3 (окончание)

№	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
35	$\ln(x+0,4)$	$0,6+t$	1,2
36	$\sin(3x)$	$2t-0,2$	0,532
37	$3x(2+x)$	$2t+2,5$	2,78
38	$\cos(x-0,45)$	$0,123-2t$	0,485
39	$x(x+0,4)$	$0,6+2t$	0,49
40	$(x+0,2)(x+1)$	$6t+1,6$	0,41

Задание 2.11.3

Используя метод сеток, составить функцию, реализующую решение смешанной задачи для уравнения колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (табл. 2.11.4) с НУ: $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=\Phi(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) и ГУ: $u(0,t)=\varphi(t)$, $u(1,t)=\psi(t)$ (исходные параметры заданы в табл. 2.11.4). Решение выполнить с шагом $h=0,1$, определяя значения функции $u(x,t)$ с четырьмя десятичными знаками, причем $0 \leq t \leq 0,5$.

Таблица 2.11.4. Варианты заданий для выполнения самостоятельной работы

№	НУ и ГУ	№	НУ и ГУ
1	$f(x) = (x+0,2)\sin\frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1+x^2$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 1,2(t+1)$	3	$f(x) = 0,5(x+1)$ $\Phi(x) = (x+0,5)\cos\pi x$ $\varphi(t) = 0,5$ $\psi(t) = 2-3t$
2	$f(x) = (x+0,5)(x-1)$ $\Phi(x) = \sin(x+0,2)$ $\varphi(t) = t-0,5$ $\psi(t) = 3t$	4	$f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$ $\Phi(x) = x^2+x$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 0,5t$

Таблица 2.11.4 (продолжение)

№	НУ и ГУ	№	НУ и ГУ
5	$f(x) = (x + 0,2) \sin \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 + x^2$ $\varphi(t) = 0,6t$ $\psi(t) = 1,2$	10	$f(x) = (x + 2)(0,5x + 1)$ $\Phi(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$ $\varphi(t) = 2$ $\psi(t) = 4,5 - 3t$
6	$f(x) = (1 - x^2) \cos \pi x$ $\Phi(x) = 2x + 0,6$ $\varphi(t) = 1 + 0,4t$ $\psi(t) = 0$	11	$f(x) = (x + 0,5) \sin \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 + x^2$ $\varphi(t) = 1$ $\psi(t) = 1,2(t + 2)$
7	$f(x) = (x + 0,4) \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 0,3(x^2 + 1)$ $\varphi(t) = 0,4$ $\psi(t) = 1,2t$	12	$f(x) = (2x + 0,5)(x - 1)$ $\Phi(x) = \sin(2x + 0,2)$ $\varphi(t) = t - 0,5$ $\psi(t) = 2t$
8	$f(x) = (x^2 + 0,5) \cos(\pi x)$ $\Phi(x) = (x + 0,7)^2$ $\varphi(t) = 0,5$ $\psi(t) = 2t - 1,5$	13	$f(x) = (x + 2)(0,5x - 2)$ $\Phi(x) = 3 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ $\varphi(t) = 2$ $\psi(t) = 4,5 - 3t$
9	$f(x) = (x^2 + 0,5) \cos(\pi x)$ $\Phi(x) = (x + 0,4)^2$ $\varphi(t) = 0,4$ $\psi(t) = 3t - 2,5$	14	$f(x) = 0,5(x^2 + 1)$ $\Phi(x) = x \sin x$ $\varphi(t) = 0,5 + 3t$ $\psi(t) = 1$

Таблица 2.11.4 (продолжение)

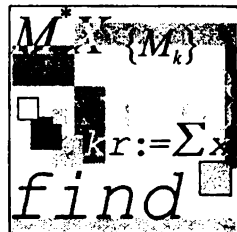
№	НУ и ГУ	№	НУ и ГУ
15	$f(x) = 0,5x(x+1)$ $\Phi(x) = x \cos x$ $\varphi(t) = 2t^2$ $\psi(t) = 1$	20	$f(x) = (x+0,5)^2$ $\Phi(x) = (x+1) \sin x$ $\varphi(t) = 0,5(0,5+t)$ $\psi(t) = 2,25$
16	$f(x) = x(2x-0,5)$ $\Phi(x) = \cos(2x)$ $\varphi(t) = t^2$ $\psi(t) = 1,5$	21	$f(x) = (x+0,4) \sin(\pi x)$ $\Phi(x) = (x+1)^2$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = 0$
17	$f(x) = 3x(1-x)$ $\Phi(x) = \cos(x+0,5)$ $\varphi(t) = 2t$ $\psi(t) = 0$	22	$f(x) = (2-x) \sin(\pi x)$ $\Phi(x) = (x+0,6)^2$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = 0$
18	$f(x) = 1,2x - x^2$ $\Phi(x) = (x+0,6) \sin x$ $\varphi(x) = 0$ $\psi(t) = 0,2 + 0,5t$	23	$f(x) = 0,4(x+0,5)^2$ $\Phi(x) = x \sin(x+0,6)$ $\varphi(t) = 0,1 + 0,5t$ $\psi(t) = 0,9$
19	$f(x) = (1-x) \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 2x+1$ $\varphi(t) = 2t+1$ $\psi(t) = 0$	24	$f(x) = (x^2+1)(1-x)$ $\Phi(x) = 1 - \sin x$ $\varphi(t) = 1$ $\psi(t) = 0,5t$

Таблица 2.11.4 (продолжение)

№	НУ и ГУ	№	НУ и ГУ
25	$f(x) = (x+1)\sin\frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 1 - x^2$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = 2$	30	$f(x) = 2x(x+1)$ $\Phi(x) = 2\sin x$ $\varphi(t) = 0,3$ $\psi(t) = 4,3 + t$
26	$f(x) = (x+0,5)(x+1)$ $\Phi(x) = \cos(x+0,3)$ $\varphi(t) = 0,5$ $\psi(x) = 3 - 2t$	31	$f(x) = x\cos\pi x$ $\Phi(x) = x(2-x)$ $\varphi(t) = 2t$ $\psi(t) = -1$
27	$f(x) = (1-x^2) + x$ $\Phi(x) = 2\sin(x+0,4)$ $\varphi(t) = 1$ $\psi(t) = (t+1)^2$	32	$f(x) = x(x+1)$ $\Phi(x) = \cos x$ $\varphi(t) = 2$ $\psi(t) = 2(t+3)$
28	$f(x) = (2+x)\sin\pi x$ $\Phi(x) = (x+0,3)^2$ $\varphi(t) = 0,4t$ $\psi(t) = 0$	33	$f(x) = x^2\cos(\pi x)$ $\Phi(x) = x^2(x+1)$ $\varphi(t) = 0,5t$ $\psi(t) = t - 1$
29	$f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = x^2$ $\varphi(t) = 1 + 2t$ $\psi(t) = 0$	34	$f(x) = x\sin(\pi x)$ $\Phi(x) = (x+1)^2$ $\varphi(t) = 2t$ $\psi(t) = 0$

Таблица 2.11.4 (окончание)

№	НУ и ГУ	№	НУ и ГУ
35	$f(x) = x \cos(\pi x)$ $\Phi(x) = x(4 - x)$ $\varphi(t) = 3t$ $\psi(t) = 2$	38	$f(x) = x(x + 1)$ $\Phi(x) = \cos x$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = 2(t + 1)$
36	$f(x) = 2x(x + 5)$ $\Phi(x) = 2 \sin x$ $\varphi(t) = 0,6$ $\psi(t) = 4 + t$	39	$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = x^2$ $\varphi(t) = 3 + 2t$ $\psi(t) = 1$
37	$f(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$ $\Phi(x) = 2x^2$ $\varphi(t) = 0$ $\psi(t) = t^2$	40	$f(x) = (x + 0,5)^2$ $\Phi(x) = (x + 1) \sin x$ $\varphi(t) = 0,4(0,6 + t)$ $\psi(t) = 2,5$



Лабораторная работа № 12

Численное решение интегральных уравнений

Цель работы: самостоятельно изучить теоретический материал по теме и научиться применять метод квадратур (механических квадратур) для решения интегральных уравнений (Фредгольма и Вольтерры), а также визуализировать полученные результаты и производить их анализ.

Литература

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Высшая школа, 2001. — С. 333—363.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — С. 599—617.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Самарская Е. А. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — С. 101—118.
4. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994.

2.12.1. Задание к лабораторной работе № 12

Задание 2.12.1.

Для уравнений Фредгольма:

$$x(t) = \int_0^2 K(t, s)x(s)ds + f(t) \quad (2.12.1)$$

и Вольтерры:

$$x(t) = \int_1^t Q(t, s)x(s)ds + F(t) \quad (2.12.2)$$

заданы соответственно ядра $Q(t, s)$ и $K(t, s)$ и свободные члены $f(t)$ и $F(t)$ (табл. 2.12.1).

Таблица 2.12.1. Исходные параметры для уравнений Фредгольма и Вольтерры

№	$Q(t, s)$	$K(t, s)$	$f(t)$	$F(t)$
1	$2\ln \frac{1+s}{1+t^2}$	$t + \sqrt{s}$	$t^2 - t + 1$	$2t\sqrt{t} - t - 1$
2	$t + \ln(1+s)$	$\frac{\sqrt{s}-1}{s}$	$1 - \frac{t^2}{t+1}$	$3t - 2\sqrt{t} - 1$
3	$2\ln \frac{1+s}{1+t^2}$	$t + \sqrt{s}$	$t^2 - t + 1$	$2t\sqrt{t} - t - 1$
4	$\frac{t}{s^2} - 1$	$t + \sqrt{s}$	$t^2 + \frac{t}{6} - \frac{7}{3}$	$2t\sqrt{t} - t - 1$

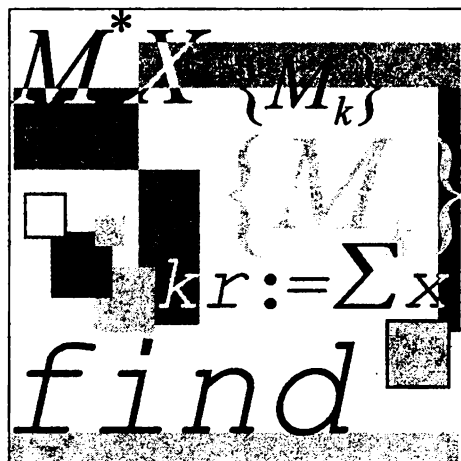
1. На сетке точек t_i отрезка $[a_1; b_1]$ с шагом сетки h_1 построить каркас приближенного решения уравнения (2.12.1) с точностью $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, пользуясь какой-либо квадратурной формулой замкнутого типа и применяя сгущающиеся расчетные сетки для обеспечения заданной точности. На основе полученного каркаса записать приближенное решение в виде непрерывной функции и с ее помощью вычислить приближенные значения $x(c_1)$ и $x(d_1)$. Написать функцию, реализующую метод.
2. Применяя квадратурную формулу прямоугольников на отрезке $[a_2; b_2]$ с шагом h_2 , найти каркас приближенного решения уравнения (2.12.2) с точностью $\varepsilon_2 = 10^{-4}$. Представить полученное дискретное решение интерполяционным многочленом третьей степени, построенным по первым четырем узлам заданной сетки, и вычислить приближенно $x(c_2)$ и $x(d_2)$. Написать функцию, реализующую метод.

3. Графически проиллюстрировать решение уравнений.

Значения параметров приведены в табл. 2.12.2.

Таблица 2.12.2. Исходные параметры для задания 2.12.1

№	$[a_1; b_1]$	h_1	c_1	d_1	$[a_2; b_2]$	h_2	c_2	d_2
1	$[0; 2]$	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	$[1; 2]$	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
2	$[0; 3]$	0,5	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	$[2; 3]$	0,2	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
3	$[2; 4]$	0,4	$\frac{1}{e}$	$\frac{\pi}{2}$	$[1; 3]$	0,4	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{9}$
4	$[1; 2]$	0,5	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{\pi}{2}$	$[1; 3]$	0,4	$\frac{e^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{7}$



Приложения