Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Уральский федеральный университет

имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»

Кафедра технической физики

Отчет

**ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОВОМ ТРУБОПРОВОДЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Студент: | Астафьев Е.В. |
| Группа: | ФтМ – 100206 |
| Преподаватель: | Александров О.Е. |

Екатеринбург

2010

### 1. Условия задачи

Дано: участок газопровода между двумя вентилями, по которому течет газ. Длина участка очень велика (~100-1000км). Участок находится в cтационарном режиме с массовым расходом G и давлениями P1 и P2 на концах участка; P1 > P2. В момент времени t = T оба вентиля перекрываются. Рассчитать распределение давления по участку как функцию времени.

### 2. Построение схемы модели

1. В начальном приближении не будем учитывать неидеальность газа. Т.е. .

2. Поскольку длина трубопровода много больше его поперечных размеров можно ограничиться гидравлическим приближением, т.е. считать поток газа одномерным и не рассчитывать распределение параметров по сечению трубы.

3. Движение газа в трубе определяется двумя силами: перепадом давления ΔP и трением о стенку трубы (сопротивлением течению). В силу предыдущего предположения (см. п.2) будем считать силу сопротивления пропорциональной перепаду давления, как это принято в гидравлических расчетах. Т.е. , , , S – площадь сечения трубы, d – диаметр трубы, μ – молярная масса.

Однако тут есть свои проблемы – коэффициент сопротивления λ зависит от режима течения, т.е. от числа Рейнольдса, . В самом начальном уровне модели можно попытаться предположить постоянство λ. Однако более реалистичная модель должна учитывать рис. 1.



Рис. 1. График зависимости  от числа Re.

4. Таким образом газ в каждой точке x характеризуется тремя параметрами G(x), P(x), T(x), т.е. нужно три уравнения для замыкания системы.

5. Для T(x) существуют два предела: изотермическое течение и адиабатическое течение. В первом пределе связь P и T будет:  или . Во втором – PVγ=const, приводя к n, получим P=nγ⋅const.

Мы будем строить изотермическую модель.

6. Предположим, что равновесие в объеме газа ~d3 наступает много быстрее, чем за время d/v, где v – скорость движения газа, т.е. движения достаточно медленные.

7. Рассмотрим дифференциально малый объем *d*x трубопровода в точке x, см. рис. 2.

x

0

x + dx

Рис. 2. Дифференциально малый отрезок трубы

Должно выполняться уравнение непрерывности:

 в одномерном варианте это эквивалентно , где S – площадь сечения трубы.

И должно выполняться условия механического равновесия, т.е. произведение массы выбранного элемента на ускорение должно удовлетворять закону Ньютона, т.е. равняться равнодействующей сил F: . На элемент действуют две силы: вязкое сопротивление движению Fсопр и градиент давления FdP. В условиях стационарного течения Fсопр=-FdP и F = 0.

Можно вспомнить уравнение Навье-Стокса – это уравнение сохранения импульса, оно же уравнение Ньютона



Можно записать так



Т.е. ускорение дифференциально малого объема среды есть разность двух членов:  и . Если первый очевидным образом и есть FdP, то второй — сила сопротивления Fсопр. Решать уравнение Навье-Стокса слишком сложно, поэтому обойдемся без этого. Из гидравлики известно для стационарного течения в трубе:

Раскладывая разность квадратов и расписывая *ξ* получаем:

Устремляя длину трубы к нулю получаем:

или

Второй член уравнения есть *–grad(P)* => первый это сопротивление течению. Вместо 0 слева надо поставить. Окончательно получаем уравнение:

Полная система уравнений получается такой:

– закон сохранения импульса;

 – закон сохранения массы;

P = n⋅const.

С учетом связи ρ = m⋅n и G = Sρv, имеем ТРИ неизвестных – G, ρ, P – и три уравнения. C учетом последнего уравнения системы, связывающего ρ и P, число уравнений и число неизвестных можно сократить до двух G и P.

После тождественных математических преобразований получили следующую систему уравнений:





С начальными условиями:

*,*

где , *P1* – давление на начальном конце трубы (от которого движется газ), *G0* – начальный поток (до закрытия вентилей).

Поскольку решить это уравнение аналитически не получается, решим численно. При помощи пакета математического моделирования Mathcad построим конечно-разностную схему:

Сперва надо весь интервал значений координаты и времени разбить на конечные отрезки. Интервалом по координате назовем *h*, а по времени – *τ*. Значение производной в определенной точке определяется выражением (конечной разностью):

Проведя преобразования с уравнениями получим (первая переменная – координата, 2-я – время):





отсюда





В программе матрицы значений силы и потока наз-ся ***MatrixForce*** и ***MatrixGush*** соответственно. Они имеют размер , где T – время моделирования, а – кол-во шагов по координате. Т.е. .

Функция ***CalcZeroCond*** выполняет подсчет начальных условий (1-й столбец матриц). Т.к. изменить глобальные переменные внутри функции невозможно, необходимо выполнить присвоение:





Функция ***CalcNextStep(MatrixForce, MatrixGush, NumStep)*** вычисляет соответствующие распределение силы и потока по координате на следующем шаге [заполняет (NumStep+1)-й столбец].

Функция ***CalcAll(MatrixForce, MatrixGush, NumofSteps)*** выполняет функцию ***CalcNextStep*** для ***NumofSteps*** шагов. Правильный вызов функции выглядит следующим образом:





**3. Результаты расчета**

Для проведения расчетов необходимо задать начальные условия. Несмотря на то, что Mathcad предусматривает расчеты с размерными величинами, для удобства сведем все к системе СИ и будем считать безразмерные величины.

Данные для проверочных расчетов:

сопротивление трубы: 

молярная масса газа:  (воздух);

температура: ;

длина трубы: 

диаметр трубы: 

универсальная газовая постоянная: ;

давления в начале трубы в стационаре: ;

расход: ;

число делений трубы: .

время вычисления: *Time:=1000*;

шаг по времени: .

Значение констант уравнения при таких условиях:

*A0=0.873, C1=83.145*

Результаты вычислений отображены на Рис. 1. Здесь по оси z (вверх) отложена величина потока, по оси x (вправо) – координата, по оси y (влево) – время.

**

Рис. 3. График распределения потока по времени и координате

Поток на протяжении всего участка постепенно уменьшается, а у края с меньшим давлением появляется область с большим потоком – это можно объяснить инерцией движения воздуха в трубе.

К концу времени вычисления максимальный поток у края получается равным 10,44 кг/с в то время как на среднем участке трубы он составляет 9,496.

Стоит отметить, что при уменьшении шага в 10 раз получаются практически такие же результаты (до 3-4 знака).

При увеличении времени моделирования идет резкий рост давления и потока у «правого» конца трубы (куда движется газ).

****Рис. 4. Распределение давления в трубе

При уменьшении шага по координате значения давления и потока в середине и начале трубы не изменяются, а расхождение у «правого» конца трубы усиливается.

В конце концов, пики превышают вычислительные возможности программы (довольны широкие, надо сказать) и делают невозможным дальнейшее моделирование.

**Заключение**

В процессе построения модели были сделаны следующие допущения: газ идеален, давление постоянно по сечению, течение изотермическое, гидравлическое сопротивление трубы λ постоянно, и самое главное – локальное равновесие.

Вероятно, странное поведение системы можно объяснить тем, что у проблемного края неверно предположение о локальном равновесии.