

Мышкис Анатолий Дмитриевич

Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное.

М.: КомКнига, 2007. — 192 с.

Настоящая книга посвящена вопросам, связанным с выбором уравнений изучаемого явления, их упрощениями и уточнениями. В ней обсуждаются: понятие математической модели, ее приближенный характер, множественность моделей. Дана классификация моделей по различным признакам. Материал широко иллюстрируется примерами из физики и механики.

Книга предназначена для научных работников и инженеров. Может быть использована студентами при изучении курса «Математическое моделирование».

Рецензент:

доктор физико-математических наук, профессор Д. П. Костомаров

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 12. Зак. № 737.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:

ISBN 978–5–484–00953–4

Соотв. 10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:

ISBN 5–484–00953–7

© КомКнига, 2007



4775 ID 50158



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения Издательства.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
§ 1. Понятие математической модели. Основные требования . . .	7
1. Понятие математической модели (7). 2. Общая схема применения математики (8). 3. Множественность и единство моделей (10). 4. Требование адекватности (12). 5. Требование достаточной простоты (14). 6. Некоторые другие требования (15).	
§ 2. Типы математических моделей	17
1. Структурные и функциональные модели (17). 2. Дискретные и непрерывные модели (20). 3. Линейные и нелинейные модели (25). 4. Линеаризация (29). 5. Детерминированные и вероятностные модели. Другие типы моделей (33).	
§ 3. Построение математической модели	35
1. О содержательной модели (35). 2. Формулирование математической задачи. Задачи анализа и синтеза (38). 3. Определяющие соотношения (39). 4. Подбор эмпирической формулы (41). 5. О размерностях величин (44). 6. Подобие объектов (45). 7. Конечные уравнения (48). 8. Уравнения для функций одного аргумента (53). 9. Уравнения для функций нескольких аргументов (58). 10. Задачи на экстремум с конечным числом степеней свободы (62). 11. Задачи на экстремум с искомой функцией (68). 12. О применимости математического анализа (73).	
§ 4. Упрощения и уточнения	78
1. Рабочие гипотезы (78). 2. Упрощение уравнений (79). 3. Метод малого параметра (86). 4. Регулярные и сингулярные возмущения (92). 5. Осреднение быстро колеблющихся исходных зависимостей (96). 6. Анализ влияния упрощений (100).	
§ 5. О решениях	104
1. Методы построения и исследования решений (104). 2. Асимптотические разложения (107). 3. Интегральные представления решений (112). 4. Автомодельные решения (116). 5. Решения типа бегущих и стоячих волн (119). 6. Фазовый портрет (123). 7. Обобщенные решения (127). 8. Выбор степени точности решения (131). 9. Выяснение точности решения (134). 10. Особенности процесса решения содержательных задач (137). 11. О применении ЭВМ (140).	
§ 6. Методы самоконтроля	146
1. Прикидки (146). 2. Контроль размерностей (148). 3. Другие виды контроля (149). 4. Роль примеров (152). 5. О верификации модели (156).	

§ 7. Распространенные ошибки	159
1. Ошибки в выборе модели (159). 2. Влияние интерполяции и экстраполяции (161). 3. Ошибки в выборе метода исследования (163).	
Добавление	164
1. Вывод некоторых уравнений математической физики (164). 2. Дельта-функция (168). 3. Метод Галеркина. Метод конечных элементов (171). 4. Итерационные методы (176). 5. Число степеней свободы и многомерные многообразия (179). 6. Локальные и интегральные характеристики полей (181). 7. Сплаины (184).	
Список литературы	186
Предметный указатель	188

ПРЕДИСЛОВИЕ

Инженер или будущий инженер изучают математику для того, в первую очередь, чтобы уметь ее применять. Однако применение математики основано на понятии математической модели, которому в общем вузовском курсе математики обычно почти не уделяют внимания. Построение и исследование математических моделей важны для почти всех специальных дисциплин и используют знания из них, поэтому ряд конкретных математических моделей подробно рассматривается в соответствующих курсах. Но имеются и общие соображения, которые могут оказаться небесполезными.

В этой небольшой книге мы приведем и проиллюстрируем некоторые общие положения, связанные с понятием математической модели. Соответствующие примеры также имеют общий характер; они элементарны и взяты, в основном, из физики, динамики и т. п. Методологической основой текста является книга [6], к которой мы отсылаем интересующегося читателя за дальнейшими обсуждениями; отсюда же взяты и некоторые конкретные соображения и примеры.

Люди начали пользоваться математическими моделями еще до осознания математики как самостоятельной науки — достаточно вспомнить исчисление площадей в Древнем Египте. И. Кеплер и особенно И. Ньютон, применив математику к задачам естествознания и практики, заложили основы современного представления о математических моделях. В дальнейшем развитии науки и техники область применения математических моделей все более расширялась, модели становились разнообразнее. Значительное усложнение математических моделей, потребность в существенном ускорении решения прикладных математических задач привели к необходимости появления принципиально новых вычислительных средств, и ЭВМ, проникшие сейчас в самые разнообразные области деятельности, были впервые созданы именно для «обслуживания» математических моделей. И сейчас роль ЭВМ при изучении и применении

математики столь велика, что термин *математическое моделирование* часто применяется по отношению к области прикладной математики, включающей в себя как построение и исследование математических моделей, так и создание вычислительных алгоритмов и программ, реализующих эти алгоритмы на ЭВМ.

Попытка сколько-нибудь подробно осветить все вопросы, связанные с понятием математической модели, привела бы к чрезмерному разбуханию книги. Поэтому я решил ограничить себя и рассмотреть только наиболее технически (не методически!) простые, но порой весьма существенные вопросы, связанные с самим написанием уравнений, их упрощением, выбором решения и т. п. Многолетняя практика преподавания во вузах, многочисленные контакты с инженерами показали мне, что эти вопросы, несмотря на их кажущуюся простоту, порой вызывают большие затруднения и нигде систематически не излагаются. Несмотря на указанное ограничение, в книге все время имеются в виду возможность, а зачастую и необходимость обращения к ЭВМ при применении математических моделей и обсуждаются некоторые возникающие при этом проблемы.

Наше изложение имеет характер неформального повествования. Думается, что это неизбежно, так как значительная часть излагаемого материала в принципе не допускает формализации. В связи с этим в книге всюду приводятся, как правило, лишь основные, неформальные соображения и схемы доказательств; более точные формулировки и полные доказательства читатель при необходимости может найти в математической литературе.

Книга предназначена, в основном, для студентов старших курсов и аспирантов вузов, а также для инженеров, сталкивающихся в своей деятельности с применением математики. Поэтому изложение опирается, как правило, на знание обычного вузовского курса математики. Некоторые математические вопросы, сейчас часто встречающиеся при построении математических моделей инженерных систем и порой недостаточно представленные во вузовских курсах математики, освещены в Добавлении к книге.

В заключение отмечу, что различные общие и особенно конкретные вопросы, связанные с понятием математической модели, можно найти во многих книгах, среди которых, не претендуя на полноту, укажу на [1, 8, 9, 11, 13, 15—17, 19, 21, 23, 25, 29, 30, 32, 33, 35—40].

Выражаю благодарность А. М. Ильину, В. Б. Колмановскому и М. А. Красносельскому за полезные замечания.

§ 1. ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

1. Понятие математической модели. Начнем с простейшего примера (рис. 1). Пусть груз массы m колеблется на горизонтальной плоскости под действием пружины нулевой массы с жесткостью k . Предположим, что противодействующие силы (в частности, сила трения) пренебрежимо малы и нас интересуют характер и частота колебаний.

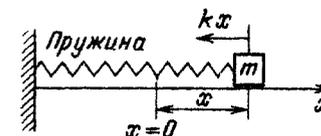


Рис. 1

Для решения направим ось x вдоль линии колебаний и выберем на ней начало отсчета, отвечающее равносному положению груза, при котором пружина находится в нейтральном состоянии, т. е. ни сжата, ни растянута. Тогда, если положению груза соответствует координата x , то на него действует сила $-kx$. Применяя второй закон Ньютона, получаем дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{т. е.} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.1)$$

с общим решением (проверьте!)

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (1.2)$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые, например, из начальных условий. Таким образом, груз совершает гармонические колебания с центром в точке $x = 0$, с произвольной амплитудой и с угловой частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Мы видим, что интересующие нас утверждения получены не из непосредственного рассмотрения механической системы (рис. 1), а из решения дифференциального уравнения (1.1). Это уравнение является математической записью

физических условий и законов, определяющих процесс колебания системы, и потому называется математической моделью рассматриваемой системы (или процесса ее колебаний).

Конечно, уравнение (1.1) описывает не все стороны рассматриваемого процесса. Так, из него нельзя найти амплитуду колебаний: для этого требуются добавочные данные — например, начальные условия. Далее, в реальной системе колебания все-таки затухают, но никаких сведений об этом мы получить из уравнения (1.1) не можем. Для некоторых вопросов могут оказаться существенными форма груза или расположение его центра масс, о чем также уравнение (1.1) не говорит, и т. д.

Перейдем к общему определению. Пусть мы собираемся исследовать некоторую совокупность S свойств реального объекта a с помощью математики (здесь термин *объект* понимается в наиболее широком смысле: объектом может служить не только то, что обычно именуется этим словом, но и любая ситуация, явление, процесс и т. д.). Для этого мы выбираем (как говорят, строим) «математический объект» a' — систему уравнений, или арифметических соотношений, или геометрических фигур, или комбинацию того и другого и т. д., — исследование которого средствами математики и должно ответить на поставленные вопросы о свойствах S . В этих условиях a' называется *математической моделью объекта a относительно совокупности S его свойств*. Так, в разобранным примере объектом a была колебательная механическая система, объектом a' — уравнение (1.1), совокупностью S — характер и частота колебаний.

2. Общая схема применения математики. Как было сказано в п. 1*), математика применяется не непосредственно к реальному объекту, а к его математической модели. В самых общих чертах схема этого применения показана на рис. 2.

Исходя из реального объекта, мы формулируем интересные нас и иные связанные с ними его свойства на языке той или иной науки, другими словами, строим *механическую, либо физическую, либо биологическую, либо социальную* и т. п. *модель* объекта; такую модель мы будем впредь называть *содержательной*. Так, в примере п. 1 *содержатель-*

ная (механическая) модель была описана в первом абзаце пункта и схематически изображена на рис. 1. При построении содержательной модели формулируются и соответствующие *гипотезы* (говорят также — *постулаты модели*); в

примере п. 1 — это гипотезы о линейной зависимости силы упругости пружины от ее растяжения, о равенстве нулю массы пружины, а также об отсутствии противодействующих сил. Кроме того, включение модели в ту или иную науку дает возможность применять законы и иные утверждения, установленные в этой науке

(в примере п. 1 — второй закон Ньютона). Естественно, что при построении содержательной модели мы отвлекаемся от различного рода неидеальностей, неправильностей изучаемого реального объекта (конечно, если эти неидеальности не являются сами предметом исследования), переходим к его упрощенному, схематическому описанию.

На основе содержательной модели мы выписываем соответствующие уравнения или как-то иначе переводим ее на формальный математический язык и тем самым переходим к математической модели; в этом заключается первый этап — построение модели. Он существенно опирается на неформальное обсуждение постановки задачи и необходимую квалификацию исследователя в рассматриваемой области.

Второй этап состоит в изучении математической модели, попросту говоря — решении полученной математической задачи. Мы выбираем метод этого решения и реализуем его; сюда входит и проведение всех необходимых вычислений, в том числе и на ЭВМ. Это изучение проводится в рамках математики, но имеется и одна важная особенность. Все элементы математической модели (в частности, все участвующие величины) являются как бы метками соответствующих реальных элементов. Это дает возможность в процессе решения математической задачи привлекать дополнительные сведения (штриховые стрелки на рис. 2), которые могут упростить этот процесс, либо выделяют из нескольких решений то, которое нужно, и т. д.



Рис. 2

*) Если после номера пункта не идет номер параграфа, то ссылка дается на пункт данного параграфа. — *Примеч. ред.*

Получив решение математической задачи, нам нужно его проанализировать, разобраться в его реальном смысле, сделать выводы. В этом состоит третий этап — этап *интерпретации* (истолкования) результата исследования математической модели. В него может входить и контроль правильности (как говорят, *верификация**) модели на основе сравнения результата с другими известными фактами, в частности с экспериментальными данными, и т. д.

Описанные этапы тесно связаны между собой, и их расчленение является до некоторой степени искусственным. Математическая модель обычно строится с ориентацией на предполагаемый метод решения математической задачи — в частности, с учетом того, будем ли мы привлекать ЭВМ и если будем, то какой мощности. С другой стороны, при проведении математического исследования или интерпретации решения может понадобиться уточнить или даже существенно изменить математическую модель.

В заключение отметим, что в учебных упражнениях, а также во многих научных исследованиях обычно строят математическую модель не конкретного реального, «железного» объекта, а «условно реального», как это сделали и мы в п. 1, т. е., по существу, отправляются от уже готовой содержательной модели. Конечно, это облегчает дело.

3. Множественность и единство моделей. Реальный объект может иметь несколько неравносильных математических моделей. Это прежде всего связано с необходимостью исследования различных систем S_1, S_2, \dots его свойств. Но даже принципиально разные математические модели рассматриваемого реального объекта могут появиться и при изучении одной и той же системы свойств. Так, объект можно описывать с помощью как непрерывной, так и дискретной модели, как детерминированной, так и стохастической (см. § 2) и т. д. Выбор типа модели, весьма существенный для направления исследования, может естественно поддказываться моделируемым объектом или разумными традициями, однако и тогда полезно иметь в виду возможность изменить этот тип. (Впрочем, нередко тип модели выбирается из слепого подражания или определяется пробелами в образовании исследователя.) Для сложного реального объекта сравнение результатов его исследования с помощью моделей разного типа может обогатить познания о нем, а также значительно повысить их достоверность.

*) От латинских слов *verus* «верус» — истинный и *facto* «фацио» — делаю.

Построение различных моделей одного и того же объекта может иметь целью различную точность, детализацию его свойств. Так, в примере п. 1 мы можем пожелать учесть влияние (малых по предположению) противодействующих сил. Приняв гипотезу вязкого трения, согласно которой противодействующая сила пропорциональна скорости, мы вместо (1.1) приходим к уравнению

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.3)$$

с малым коэффициентом трения f , т. е. к другой математической модели — хотя и того же типа, что первая.

Общие черты математической модели вырисовываются уже при формулировании содержательной модели исследуемого объекта. Однако и после этого обычно бывают возможны различные видоизменения математической модели: в уравнениях можно отбрасывать какие-либо члены или дописывать новые, нелинейные зависимости заменять линейными и наоборот, усложнять или упрощать геометрические формы и т. д.

Возможна и обратная картина: различные реальные объекты или различные содержательные модели могут иметь одну и ту же математическую модель — например, описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями. Так, нетрудно показать (проделайте это!), что сила $j = j(t)$ электрического тока, возбужденного в некоторый момент в замкнутом контуре, последовательно содержащем сопротивление R , индуктивность L и емкость C , удовлетворяет уравнению

$$L \frac{d^2 j}{dt^2} + R \frac{dj}{dt} + \left(\frac{1}{C} \right) j = 0.$$

Это уравнение с точки зрения математики совпадает с (1.3), так как обозначение и физический смысл участвующих величин с этой точки зрения несущественны. То же уравнение при другом смысле букв описывает разнообразные *осцилляторы**) (колебательные системы) и иной природы. Поэтому, изучив математическую модель, мы можем часто делать выводы о свойствах разнообразных объектов. Кроме того, если различные объекты имеют одинаковую математическую модель, то становится возможным моделировать один из этих объектов другим. Например, вместо исследования колебаний сложной линейной механической системы можно производить измерения в соответственно подобранной

*) От латинского слова *oscillo* «осцилло» — качаюсь.

электрической цепи, имеющей ту же математическую модель. На этом основано действие электромеханических, оптико-механических и других *аналоговых устройств*. Замечательно, что при применении таких устройств сама математическая модель как бы остается в стороне (значения интересующих нас механических величин непосредственно получаются по результатам электрических измерений), хотя именно на единстве модели основана возможность этого применения.

Умение правильно выбрать математическую модель из уже известных или, тем более, построить таковую заново требует необходимых математических и специальных знаний и соответствующих навыков. Как пишет А. Н. Тихонов, «опыт показывает, что во многих случаях правильно выбрать модель (математическую — А. М.) — значит решить проблему более чем наполовину» [29, с. 14].

4. **Требование адекватности.** Важнейшим требованием к математической модели является требование ее *адекватности**) (правильного соответствия) изучаемому реальному объекту *a* относительно выбранной системы *S* его свойств (см. п. 1). Под этим прежде всего понимается

1) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта: например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, о их взаимосвязи, о характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния или эволюции и т. п.

Кроме того, в требование адекватности обычно входит и

2) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

В соответствии с тем, ставится условие 2) или нет, говорят соответственно о *количественных* или *качественных моделях*. Вместо количественной адекватности говорят также о *точности модели*.

В областях, еще не подготовленных для применения развитых количественных математических методов, либо в тех областях, где количественные закономерности проявляются не вполне четко (например, в некоторых социальных или биологических науках), математические модели являются, как правило, по необходимости лишь качественными. Даже в технике, где применение математики давным-давно апробировано, модель может оказаться лишь качественной из-за сложности изучаемого объекта. Однако и тогда выявление на модели существенных свойств этого объекта помогает правильно ориентироваться.

*) От латинского слова *adaequatus* «адекватус» — приравненный, равный.

Естественно говорить не просто об адекватности модели, но также о большей или меньшей адекватности. Подчеркнем, что эту адекватность следует рассматривать только по определенным признакам — свойствам, принятым в данном исследовании за основные. Если они явно не указаны, то должны подразумеваться либо уточняться по ходу исследования.

Для колебательной системы п. 1 с медленным затуханием модель (1.1) адекватна по отношению к частоте колебаний и в определенной степени к характеру колебаний, так как на небольшом интервале времени затуханием колебаний можно пренебречь. Однако если нас интересует скорость этого затухания (пусть малая, но все же существующая), то модель (1.1) неадекватна, а в качестве адекватной модели можно взять уравнение (1.3).

В качестве другого примера рассмотрим задачу о распространении тепла в твердом теле, материал которого *однороден* (т. е. одинаков во всех точках) и *изотропен* *) (т. е. одинаков во всех направлениях). Стандартные рассуждения, основанные на законе Фурье (с. 165), приводят (см. Добавление, п. 1а) к известному *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right), \quad (1.4)$$

в котором θ — температура, t — время, а a — коэффициент температуропроводности, характеризующий свойства материала и содержащийся в справочниках. Оно с хорошей точностью описывает реальную эволюцию температуры, т. е. является в этом смысле адекватным в количественном отношении. Кроме того, из него можно вывести следствия качественного характера, также правильно описывающие реальный процесс: сохранение количества тепла и выравнивание температуры при $t \rightarrow \infty$ для теплоизолированного тела, невозможность температурных «всплесков» и т. д. **).

*) От греческих слов *isos* «изос» — равный, одинаковый, подобный и *tropos* «тропос» — поворот, направление

** Покажем, например, как из уравнения (1.4) вытекает закон сохранения тепловой энергии для теплоизолированного тела (Ω) с поверхностью (S). Так как количество теплоты $Q = \int_{(\Omega)} c \rho \theta d\Omega$ (см. Добавление, п. 1а), то

$$\frac{dQ}{dt} = c \rho \int_{(\Omega)} \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega = c \rho a \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta d\Omega = c \rho a \int_{(S)} (\operatorname{grad} \theta)_n dS$$

(здесь мы, действуя противоположно тому, как это мы делали в Добавлении, п. 1а, сначала применяем правило Лейбница, а затем формулу Остроградского). Но для теплоизолированного тела имеем $c \rho a (\operatorname{grad} \theta)_n = q_n = 0$ на (S), поэтому $dQ/dt = 0$, т. е. $Q = \text{const}$.

Таким образом, относительно этих свойств процесса уравнение (1.4) адекватно и в качественном отношении. С другой стороны, известно, что из уравнения (1.4) вытекает физически абсурдный вывод о бесконечной скорости распространения тепла. Значит, если в число целей исследования включить скорость распространения тепла (т. е. рассматривать эту скорость как существенную характеристику процесса), то уравнение (1.4) окажется неадекватным как в количественном, так и в качественном отношении и потребует его видоизменить.

Забвение того, что *всякая адекватность математической модели реальному объекту лишь относительна и имеет свои рамки применимости*, может привести (и не раз приводило) к грубым ошибкам, основанным на бесконтрольном приписывании реальному объекту свойств его модели — например, к всерьез высказываемому утверждению, что скорость распространения тепла «на самом деле» бесконечна.

В более сложных случаях неадекватность или низкая адекватность модели бывает не столь ясной, и мы можем говорить об адекватности лишь с некоторой долей уверенности. Эта уверенность повышается, если следствия из принятой модели хорошо согласуются с надежно установленными фактами или физическим экспериментом.

Довольно часто бывает, что модель, построенная для изучения некоторых свойств объекта, адекватность которой установлена по отношению к этим свойствам, оказывается адекватной и по отношению к каким-то другим свойствам. Это не удивительно, особенно если модель выводится из хорошо проверенных физических законов и апробированных в изучаемом круге вопросов способов приложения математики. Поэтому, говоря о математической модели и ее адекватности, часто не упоминают о том, какие именно свойства объекта моделируются. В этом нет беды, если не терять бдительности и не забывать о принципиальной ограниченности области возможного применения любой математической модели.

5. Требование достаточной простоты. Если ориентироваться только на требование адекватности, то сложные модели следует предпочитать простым. В самом деле, усложняя модель, мы можем учесть большее число факторов, которые могут так или иначе повлиять на изучаемые свойства. Так, в примере п. 1 при рассмотрении частоты колебаний модель (1.3) имеет более высокую адекватность, чем (1.1), так как из уравнения (1.3) мы полу-

чаем значение угловой частоты с учетом малого трения (проверьте!):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 - \frac{f^2}{4mk}\right)^{1/2} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 - \frac{f^2}{8mk}\right)$$

(при переходе к приближенному равенству применена формула Тейлора).

В данном примере решение усложненного уравнения не вызвало затруднений. Но в иных, особенно в нестандартных, ситуациях чрезмерное усложнение модели может привести к громоздким системам уравнений, не поддающимся изучению и решению.

Таким образом, мы приходим к требованию *достаточной простоты модели* по отношению к исследуемой системе ее свойств. Именно: модель является достаточно простой, если имеющиеся в нашем распоряжении (в частности, вычислительные) средства исследования дают возможность провести в приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный — в зависимости от постановки задачи — анализ исследуемых свойств и осмыслить результат.

Ясно, что требование простоты модели в каком-то смысле противоположно требованию ее адекватности: как правило, чем модель более адекватна, тем она менее проста и тем труднее ее анализ. (Впрочем, нередки случаи, когда усложнение модели может ухудшить ее адекватность: так бывает, например, если при выписывании добавочных уравнений привлекаются параметры, известные с весьма низкой точностью, или если сами эти уравнения сомнительны.) Поэтому часто бывает, что, выбрав модель, приходится ее упрощать, т. е. переходить к новой модели. При этом можно упрощать либо содержательную модель объекта, либо ее математическую модель. Опытный специалист обычно идет по первому пути, так как при этом остаются выполненными наиболее существенные физические соотношения и более ясны постулаты модели.

6. Некоторые другие требования. Существенным является также свойство *полноты математической модели*, состоящее в том, что эта модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить интересующие нас утверждения. Так, в примере п. 1, если мы в качестве модели ограничиваемся уравнением (1.1), то для определения частоты колебаний эта модель является

полной, а для определения амплитуды — неполной, так как для последнего нужны добавочные данные.

Еще одно важное требование к математической модели можно назвать ее *продуктивностью*. Оно связано с тем, что изучаемый объект может включать различные параметры — такие, как массы, длины и т. п. его компонент, включать функциональные зависимости, которые считаются заданными и описывают связи между рассматриваемыми величинами (например, связь между усилием и перемещением в случае нелинейного закона упругости). Все эти задаваемые параметры и зависимости, называемые *исходными данными* модели, влияют на значения величин, получаемых в результате решения математической задачи. Упомянутое требование состоит в том, чтобы в реальных ситуациях исходные данные можно было бы действительно считать заданными, т. е. чтобы их можно было бы как-то измерить, или подсчитать, или найти в справочниках и т. п. При этом, если речь идет об измерениях, то исходные данные должны легче поддаваться измерению, чем получаемые, так как в противном случае теряет смысл исследование модели. (В п. 3 § 3 будет приведен пример анализа продуктивности формулы для подъемной силы.)

Если реально получить исходные данные затруднительно, то после изучения математической модели мы узнаем только, какими свойствами *могут* обладать объекты из рассматриваемого класса, но порой свойства интересующего нас *конкретного* объекта остаются неясными. Этому вопросу не всегда уделяется достаточное внимание, что существенно снижает прикладную значимость многих исследований.

Отметим, далее, требование *робастности* *) модели, т. е. ее устойчивости относительно погрешностей в исходных данных. Всегда надо иметь в виду, что эти данные могут быть известны лишь с большей или меньшей точностью и такая неопределенность не должна существенно влиять на результаты исследования. Имеется ряд правил, способствующих этой устойчивости. Так, следует избегать вычитания близких друг к другу приближенных значений величины, потому что при таком вычитании относительная погрешность резко возрастает **): образно говоря, не следует вычислять массу шляпы, взвесившись сначала в шляпе, а затем без нее и взяв

*) От английского слова *robust* «робаст» — крепкий.

***) Пусть, например, даны $a = 275,1 \pm 0,1$ и $b = 272,3 \pm 0,1$; тогда $a - b = 2,8 \pm 0,2$. Здесь a и b известны с точностью до 0,04 %, а $a - b$ — до 7 %; точность ухудшилась в 200 раз!

разность результатов. Выражения, содержащие такие разности, следует преобразовывать. (Например, вычислив на микрокалькуляторе значение $l = \sqrt{a^2 + \alpha} - a$ при $a = 15721$, $\alpha = 0,3$, получим, считая значения a и α точными, $l = 9 \cdot 10^{-6}$; если же преобразовать эту формулу к виду $l = \alpha / (\sqrt{a^2 + \alpha} + a)$, то получим существенно более информативное значение $l = 9,5413778 \cdot 10^{-6}$.) Неустойчивость математической модели может получиться из-за включения в нее функций, быстро изменяющихся на участке, где значение аргумента известно лишь с невысокой точностью, и т. д.

Желательным, хотя и не обязательным является свойство *наглядности* математической модели. Под этим обычно понимают более или менее непосредственный, ясный содержательный смысл ее компонент, который дает возможность не только лишней раз проконтролировать модель, но порой и наметить план решения математической задачи, а также ориентировочно предвидеть результат решения, что может существенно ускорить процедуру. Так, в уравнении (1.3) последовательные слагаемые — это (с противоположным знаком) силы инерции, трения и упругости, а само уравнение является записью для рассматриваемой системы известного принципа механики: сумма всех сил, действующих на тело (включая силы инерции), равна нулю. В уравнении (1.4) левая часть — с точностью до общего множителя — равна скорости возрастания тепловой энергии в малом объеме, а правая — суммарному потоку этой энергии через соответствующую поверхность снаружи внутрь, так что само уравнение является записью закона сохранения энергии.

§ 2. ТИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1. Структурные и функциональные модели. Обычно в математической модели отражается структура (устройство) моделируемого объекта, существенные для целей исследования свойства и взаимосвязи компонентов этого объекта; такая модель называется *структурной*. Если же модель отражает только то, как объект функционирует — например, как он реагирует на внешние воздействия, — то она называется *функциональной* или, образно, *черным ящиком*. Возможны и модели комбинированного типа.

Рассмотрим пример. Пусть на платформе массы m_1 упруго закреплен груз массы $m_2 \ll m_1$ (т. е. m_2 значительно меньше m_1 ; рис. 3). Платформа, столкнувшись со стенкой, под действием буфера откатывается назад. Нас интересует

зависимость амплитуды A колебаний груза после взаимодействия платформы со стенкой от скорости v накатывания платформы. Жесткости k_1 буфера и k_2 упругого закрепления считаем заданными; силами трения и учетом вращательного движения колес пренебрегаем.

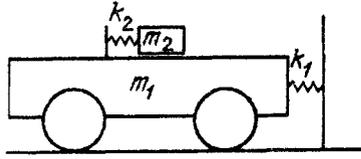


Рис. 3

Будем отсчитывать время t от момента столкновения и обозначим буквой T время взаимодействия платформы со стенкой, а символами $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно координаты платформы и груза относительно платформы, отсчитываемые от их положений при $t = 0$.

С учетом сделанных предположений (в частности, условия $m_2 \ll m_1$) получаем систему дифференциальных уравнений и начальные условия

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 &= 0, & m_2 \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + k_2 x_2 &= 0 \\ (0 \leq t \leq T), & & & \\ x_1 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} &= v, & x_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} &= 0 \quad (t = 0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

которые и составляют математическую модель рассматриваемой задачи. Из уравнения и начальных условий для x_1 находим

$$x_1 = \frac{v}{\omega_1} \sin \omega_1 t \quad \left(\omega_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \right)^*, \quad T = \frac{\pi}{\omega_1}$$

(взаимодействие со стенкой заканчивается при первом значении $t > 0$, для которого $x_1 = 0$). Подставляя x_1 в уравнение для x_2 , получаем (проверьте!)

$$x_2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v \left(\frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right) \quad \left(\omega_2 := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \right).$$

Отсюда при $t = T$ имеем

$$x_2 = (x_2)_T = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{v}{\omega_2} \sin \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{dx_2}{dt} \right)_T = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v \left(1 + \cos \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi \right).$$

Начиная с момента $t = T$ груз совершает гармонические колебания с амплитудой A , определяемой этими начальными условиями. Из сохранения полной (т. е. суммы потенциальной и кинетической) энергии колебательной системы получаем после простых преобразований

$$\frac{k_2}{2} A^2 = \frac{k_2}{2} (x_2)_T^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)_T^2 = 2k_2 \frac{v^2}{\omega_2^2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right)^2 \cos^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\pi}{2},$$

откуда окончательно

$$A = hv, \quad \text{где} \quad h := \frac{2}{\omega_2} \frac{\omega_1^2}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} \left| \cos \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right|. \quad (2.2)$$

Таким образом, с помощью структурной модели мы получили явную формулу для коэффициента пропорциональности между скоростью платформы и амплитудой колебаний груза, возникающих после взаимодействия платформы со стенкой. Для каждой конкретной системы подобного типа мы можем, зная значения параметров m_1, m_2, k_1, k_2 , подсчитать значения этого коэффициента. Так, для

$$m_1 = 10 \text{ т} = 10^4 \text{ кг}, \quad k_1 = 1 \text{ т с/см} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ н/м}, \quad (2.3)$$

$$m_2 = 200 \text{ кг}, \quad k_2 = 200 \text{ кг с/см} = 1,96 \cdot 10^5 \text{ н/м}$$

получаем $h = 1,79 \cdot 10^{-3}$ с, откуда окончательно

$$A \text{ (м)} = 1,79 \cdot 10^{-3} v \text{ (м/с)},$$

т. е.

$$A \text{ (см)} = 4,97 \cdot 10^{-2} v \text{ (км/ч)}. \quad (2.4)$$

Последнюю формулу можно рассматривать как функциональную модель рассматриваемой системы при значениях (2.3) параметров. Эту формулу для конкретных значений параметров можно было бы получить и непосредственно: в самом деле, пропорциональность величин v и A вытекает из линейности задачи или из анализа размерностей (см. п. 4 § 3), а значение коэффициента пропорциональности h можно найти, проведя физический эксперимент для какого-либо одного значения v . Однако явное выражение (2.2) коэффициента h через параметры системы может оказаться полезным при ее проектировании.

*) Символы $:=$ и \equiv обозначают равенство по определению, при этом двоеточие указывает на определяемую величину.— *Примеч. ред.*

Отметим, что описанный только что (второй) способ вывода формулы (2.4) является примером *идентификации* математической модели. Эта процедура возникает, если после выбора схемы модели требуется определить ее параметры, уточнить структуру и т. п. (См., например, [27] по этому поводу.)

2. Дискретные и непрерывные модели. Как известно, величины могут быть двух типов — дискретные, т. е. принимающие «оторванные» друг от друга значения, допускающие естественную нумерацию, и непрерывные, принимающие все значения из некоторого интервала. Возможен также смешанный случай, например, когда величина на каком-то интервале своих значений ведет себя, как дискретная, а на другом — как непрерывная. (Эти определения не являются исчерпывающими, но для нас они достаточны.)

Подобным образом, модели — как содержательные, так и математические — могут быть либо дискретными, либо непрерывными, либо смешанными. Между этими типами нет принципиального барьера и при уточнении или видоизменении модели дискретная картина может стать непрерывной и обратно; то же может произойти в процессе решения математической задачи. Таким образом, во многих задачах при составлении математической модели, а также при выборе метода ее исследования надо учитывать возможность применения как «дискретного», так и «непрерывного» аппаратов (например, для дискретных моделей характерно применение сумм, а для непрерывных — производных и интегралов) независимо от характера исходной картины.

Пусть, например, изучается прогиб балки от груза, расположенного на интервале сравнительно малой длины. Хотя это распределение непрерывно, мы можем без существенной ошибки, переходя к модели, значительно упростить картину, заменив распределенный груз сосредоточенным.

Рассмотрим этот переход более подробно. Будем для простоты считать балку прямолинейной и направим ось x вдоль нее. Тогда, если груз распределен с плотностью $q(x)$ на малом интервале (l), расположенном вблизи точки $x = a$, то после замены мы получаем груз

$$Q = \int q(x) dx,$$

сосредоточенный в этой точке. Как известно, такой сосредоточенный груз можно рассматривать как распределенный с плотностью

$$\bar{q}(x) = Q \delta(x - a),$$

где δ — дельта-функция Дирака (см. Добавление, п. 2). Такой подход как бы перекидывает мост между дискретными и непрерывными моделями и, в частности, дает возможность в случае сосредоточенной нагрузки пользоваться формулами, выведенными для нагрузки распределенной.

Описанный переход особенно целесообразен, если конкретный вид функции $q(x)$ нам неизвестен, но суммарное значение Q мы знаем. Аналогичный переход к дискретной модели нагрузки можно совершить, если имеется несколько грузов, каждый из которых распределен на малом интервале.

Но пусть таких грузов, замененных на сосредоточенные, много (см. рис. 4, где показан участок балки). Тогда может оказаться удобнее перейти к непрерывной модели нагрузки, распределенной с плотностью, показанной на рис. 4 штриховой линией. Эта плотность получается с помощью *осреднения* исходного распределения следующим образом. Для каждого значения x мы подсчитываем нагрузку $Q(x; \Delta x)$, приходящуюся на интервал некоторой длины Δx с центром в точке x , а затем полагаем плотность $q(x)$ равной

$$q(x) (= q(x; \Delta x)) = \frac{1}{\Delta x} Q(x; \Delta x).$$

(Конечно, практически такой подсчет проводится лишь в каком-то числе точек.) Особенно простая картина получается, если грузы расположены периодически со сравнительно малым периодом: тогда осредненная плотность постоянна.

Эпюра плотности нагрузки зависит от выбора *интервала осреднения* Δx . Каким надо взять этот интервал? Нетрудно понять (продумайте это!), что он должен быть велик по сравнению с характерным расстоянием между грузами, но мал по сравнению с общей длиной балки. Например, можно взять среднее геометрическое этих двух величин. (Подумайте, почему не среднее арифметическое.)

Аналогичная процедура происходит, когда мы от среды, состоящей из отдельных частиц, переходим с помощью осреднения к сплошной среде, параметры которой (плотность, температура и т. п.) распределены по пространству; от поезда с дискретными вагонами переходим к его непрерывной модели; от воздействия на систему, имеющего

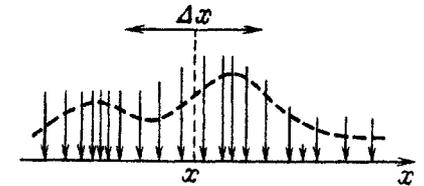


Рис. 4

характер частых подталкиваний, переходим к непрерывно действующей силе и т. д.

Осреднение применяется не только для перехода от дискретной модели к непрерывной, но также и для упрощения быстро колеблющихся зависимостей в непрерывных моделях; см. п. 5 § 4.

Переход от дискретной модели к непрерывной, равно как и обратный переход, может существенно упростить исследование, но порой может внести и неадекватность, за чем необходимо следить. Пусть, например, изучаются продольные свободные упругие колебания (с линейным законом упругости) прямолинейного однородного стержня. Обозначим $u = u(x, t)$ смещение в момент t сечения с координатой x , отсчитываемой вдоль стержня. Тогда (см. Добавление, п. 16) u удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (2.5)$$

здесь $a = \sqrt{E/\rho}$, а смысл букв указан в Добавлении, п. 16.

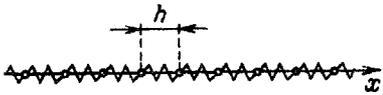


Рис. 5

Заменим стержень на дискретную модель (рис. 5), состоящую из последовательности с некоторым шагом h материальных точек массы m , соединенных пружинами

нулевой массы и жесткости k . В качестве m естественно взять массу соответствующей «порции» стержня, т. е. $m = \rho S h$, где S — площадь поперечного сечения стержня. Жесткость k выберем такой, чтобы в обеих моделях данному относительному удлинению ϵ отвечала одинаковая упругая сила. Это приводит к равенству $(\epsilon h) k = (E \epsilon) S$ (продумайте его!), откуда $k = SE/h$.

Обозначим $u_i(t)$ смещение i -й точки и применим к ней второй закон Ньютона. Мы получим уравнение

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}),$$

которое после простых преобразований приобретает вид

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = a^2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (2.6)$$

(Тот же результат получится, если производную в правой части уравнения (2.5) заменить на симметричную разделен-

ную разность второго порядка, как это делается при численном решении уравнений с частными производными.) Равенство (2.6) имеет место для каждого из использованных значений i , т. е. мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Покажем, как можно обратно от дискретной модели (2.6) перейти к непрерывной модели (2.5). Для этого надо считать x непрерывной переменной и, обозначив x_i исходную (лагранжеву) координату i -й точки, воспользоваться формулой Тейлора:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u(x_i + h, t) = \\ &= u(x_i, t) + \frac{1}{1!} u'_x(x_i, t) h + \frac{1}{2!} u''_{xx}(x_i, t) h^2 + \dots, \end{aligned}$$

$$u_i = u(x_i, t),$$

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= u(x_i - h, t) = \\ &= u(x_i, t) + \frac{1}{1!} u'_x(x_i, t) (-h) + \frac{1}{2!} u''_{xx}(x_i, t) (-h)^2 + \dots \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.6), мы после сокращения на h^2 и перехода к пределу при $h \rightarrow 0$ приходим к уравнению (2.5).

Решение системы (2.6) при малом h в целом хорошо имитирует решения уравнения (2.5) как в количественном, так и в качественном отношении. Проверим, например, выполнение закона сохранения полной энергии для стержня конечной длины l , жестко закрепленного на концах. Тогда $0 \leq x \leq l$ и в непрерывной модели выражение для полной энергии \mathcal{E} имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

(выведите это выражение!). Применяя правило Лейбница о дифференцировании интеграла по параметру, получаем отсюда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx.$$

Пользуясь уравнением (2.5), выводим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \rho \int_0^l \left(a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx = \\ &= E \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=0}^l. \end{aligned}$$

Но из предположения о жестком закреплении концов стержня следует, что $u|_{x=0,l} = 0$ и потому $(\partial u / \partial t)|_{x=0,l} = 0$. Значит, $d\mathcal{E}/dt = 0$, т. е. $\mathcal{E} = \text{const}$.

Проверим теперь аналогичное свойство для дискретной модели (2.6). Пусть точки имеют номера с $i = 0$ до $i = N$, причем $u_0(t) = 0$ и $u_N(t) = 0$ (концы закреплены). Тогда выражение для полной энергии таково:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{k}{2} (u_{i+1} - u_i)^2.$$

После дифференцирования и применения уравнения (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{ma^2}{h^2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{du_i}{dt} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \\ &+ k \sum_{i=0}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) \left(\frac{du_{i+1}}{dt} - \frac{du_i}{dt} \right). \quad (2.7) \end{aligned}$$

Раскрыв во второй сумме вторую скобку, проведем преобразование:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{du_{i+1}}{dt} (u_{i+1} - u_i) &= (i+1=j) = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{du_j}{dt} (u_j - u_{j-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{du_i}{dt} (u_i - u_{i-1}); \end{aligned}$$

при последнем переходе мы учли, что индекс суммирования является *немой переменной*, т. е. может быть обозначен любой буквой и, кроме того, что $u_N = 0$. Отбросив член с $u_0 = 0$, находим отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) \left(\frac{du_{i+1}}{dt} - \frac{du_i}{dt} \right) &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{du_i}{dt} (u_i - u_{i-1}) - \\ - \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1} - u_i) \frac{du_i}{dt} &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{du_i}{dt} (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}). \end{aligned}$$

Подставив это выражение, а также значения m и k в (2.7), получаем, что $d\mathcal{E}/dt = 0$ (проверьте!), т. е. $\mathcal{E} = \text{const}$.

Отметим попутно, что проверка выполнения в модели математических аналогов фундаментальных физических законов, таких, как закон сохранения энергии, подобная только что проведенной, является важным этапом контроля качественной адекватности этой модели. Такой контроль существует, в частности, при переходе от одной математической модели к другой — например, при упрощении уравнений модели, когда исследование в какой-то степени оторвалось от физической реальности.

Но есть и некоторые отличия между решениями уравнения (2.5) и системы (2.6), не только количественные, но и качественные. Так, в п. 5 § 5 будет показано, что решениями уравнения (2.5) служат волны, бегущие по стержню с постоянной скоростью a без изменения своей формы; с той же скоростью распространяются и любые деформации, появившиеся в результате внешних воздействий. Для системы же (2.6) влияние внешних воздействий распространяется с формально бесконечной скоростью. Пусть, например, левый конец $x = 0$ полубесконечного стержня начиная с момента $t = 0$ пришел в движение с постоянной скоростью v , $0 < v < a$. Тогда график смещений в некоторый момент $t > 0$ для модели (2.5) показан на рис. 6 сплошной линией, а для модели (2.6) — штриховой. Таким образом, дискретная модель получилась неадекватной по отношению к скорости распространения воздействий. Адекватность можно восстановить, если, например, пренебречь слишком малыми значениями смещений, считая, что воздействие дошло до какой-то точки, если смещение превысило некоторое разумное значение $\epsilon > 0$.

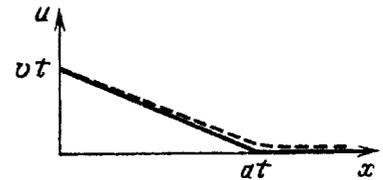


Рис. 6

3. Линейные и нелинейные модели. Линейная зависимость одной величины от другой — это пропорциональность их приращений, т. е. зависимость вида $y = ax + b$, откуда получаем $\Delta y = a\Delta x$ (Δ — обычное обозначение приращения); аналогично, линейная зависимость величины от двух других — это зависимость вида $z = ax + by + c$, откуда $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$, и т. д. Типичные линейные зависимости между физическими величинами — закон Гука (удлинение пропорционально силе растяжения), закон Ома, закон теп-

лового расширения и т. д. В действительности все эти зависимости являются линейными лишь приближенно, но в соответствующих, обычно устанавливаемых эмпирически диапазонах изменения величин предположение о линейности выполняется с хорошей точностью и в то же время существенно упрощает исследование.

Аналогично определяется понятие линейной модели. Оно применяется для моделей объектов, рассматриваемых как *преобразователи*, для которых каждому входу соответствует некоторый выход. Так, если мы изучаем задачу о прогибе прямолинейного стержня под действием поперечной распределенной нагрузки, то входом можно считать ее плотность $q(x)$, а выходом — прогиб $y(x)$. Если изучается задача о вынужденных колебаниях осциллятора, то входом можно считать закон изменения внешней силы $F(t)$, а выходом — закон колебаний $x(t)$ и т. д. В математике такой преобразователь называется *оператором*. (Кстати, и любую функцию можно трактовать как преобразователь, у которого входом служит значение аргумента или набор значений аргументов, если их несколько, а выходом — значение функции.)

Будем считать, что начала отсчета входа и выхода выбраны так, что нулевому входу отвечает нулевой выход. Тогда модель называется *линейной*, если в ней выполнен принцип суперпозиции (наложения), т. е. при сложении входов складываются и выходы, а при умножении входа на любое число выход умножается на то же число. Если этот принцип не выполнен, модель называется *нелинейной*. Линейные модели обычно описываются линейными неоднородными уравнениями — алгебраическими, дифференциальными и т. д., в которых неоднородный член отвечает входу, а решение — выходу. Так, в первом примере предыдущего абзаца при сравнительно малых прогибах модель является линейной и, приняв для определенности, что концы $x = a$ и $x = b$ стержня шарнирно закреплены, получаем в качестве математической модели *краевую задачу* (т. е. задачу о решении дифференциального уравнения при заданных краевых условиях)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

$$y|_{x=a} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=b} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=b} = 0, \quad (2.8)$$

где E — модуль Юнга, а I — геометрический момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси z . Во втором примере, для осциллятора п. 1 § 1 получаем *задачу Коши* (т. е. задачу с начальными условиями)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t) \quad (0 \leq t < \infty);$$

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{при } t = 0).$$
(2.9)

Линейным является решение уравнения (1.4) во всем пространстве относительно начального условия $\theta|_{t=0} = \theta_0(x, y, z)$ и т. д.

Свойство линейности модели существенно упрощает построение и исследование решения математической задачи. Так, если модель включает обыкновенное дифференциальное уравнение, как в примерах (2.8) и (2.9), такому исследованию помогает то, что решение такого уравнения стандартным способом выражается через так называемую фундаментальную систему решений, а если коэффициенты уравнения постоянные — то и непосредственно через экспоненты.

Целый ряд методов решения дифференциальных и иных уравнений был впервые разработан и наиболее эффективно применяется для случая, когда эти уравнения линейны. Напомним, например, как применяется классический метод разделения переменных (метод Фурье) к решению уравнения теплопроводности (1.4) в ограниченной области (D) при заданном начальном условии $\theta|_{t=0} = \theta_0(x, y, z)$ и однородных граничных условиях I, II или III рода (см. п. 9 § 3). Вначале строится соответствующая последовательность так называемых *собственных функций* $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, удовлетворяющих в (D) уравнению

$$-\left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} \right) = \lambda_k \varphi_k, \quad (2.10)$$

а на границе (D) — тому же условию, что и θ . Эти функции для наиболее простых областей (D) явно выписываются и приведены в справочниках, а в других случаях могут быть построены численно, причем основную роль играют первые из них, порой даже лишь функция φ_1 , отвечающая наименьшему *собственному значению* λ_1 . Функции $\{\varphi_k\}$ образуют в

(D) так называемую ортогональную полную систему*), откуда следует, что θ_0 допускает по ней разложение:

$$\theta_0(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x, y, z),$$

коэффициенты которого можно подсчитать по формулам

$$A_k = \int_{(D)} \theta_0 \varphi_k dD \Big/ \int_{(D)} \varphi_k^2 dD, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как каждой функции φ_k , взятой в качестве начальной, отвечает решение $\varphi_k e^{-\lambda_k a t}$, то, в силу принципа суперпозиции, начальной функции θ_0 отвечает решение

$$\theta(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(x, y, z) e^{-\lambda_k a t}, \quad (2.14)$$

которое и является искомым.

Проведенное рассуждение имеет область применимости, значительно выходящую за рамки уравнения (1.4), и существенно опирается на линейность задачи уже при отделении переменной t , т. е. при переходе от уравнения (1.4) к уравнению (2.10). Аналогичным образом в случае неограниченной области (D) применяется интегральное пред-

*) Напомним, что последовательность непрерывных или кусочно-непрерывных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, заданных на конечном интервале (a, b) , образует на нем ортогональную систему, если все они ненулевые и

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad \text{для любых } i, j \quad (i \neq j). \quad (2.11)$$

Эта система называется *полной*, если любую непрерывную или кусочно-непрерывную функцию $f(x)$, заданную на (a, b) , можно разложить в ряд

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \quad a < x < b. \quad (2.12)$$

Коэффициенты этого ряда легко найти с помощью свойства (2.11):

$$a_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx \Big/ \int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

(докажите!). Например, хорошо известна полная ортогональная система функций $1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots$ на интервале $(-l, l)$. Для нее ряд (2.12) — это ряд Фурье.

Аналогично рассматриваются полные ортогональные системы функций нескольких аргументов.

ставление решения, которое строится с помощью того или иного интегрального преобразования по пространственным переменным, чаще всего — так называемого преобразования Фурье. Широко известно также преобразование Лапласа по времени, приводящее к операционному исчислению; это исчисление также применяется почти исключительно к линейным задачам.

Весьма благоприятна линейность задачи и для таких распространенных методов приближенного решения дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), как метод Галеркина в его различных вариантах и метод конечных элементов (см. Добавление, п. 3). Хотя в принципе эти методы применимы и к нелинейным задачам, но естественно, что системы из большого числа конечных уравнений, к которым они приводят, гораздо легче решаются в линейном, чем в нелинейном случае. Это относится и ко многим другим приближенным методам.

Необходимо иметь в виду, что существуют принципиально нелинейные объекты (в том числе явления), для которых применение линейных моделей приводят к грубым искажениям картины. Это прежде всего системы, для которых изменение масштаба воздействия приводит к качественному изменению результата. Типичным примером могут служить механические системы с сухим трением, для которых малая сила не порождает движения, а большая — порождает; вообще, наличие любых барьеров подобного рода — это типичный нелинейный эффект. Существенно нелинейной является также задача об изучении околоритического состояния объекта, зависящего от параметров, когда при их изменении устойчивость сменяется неустойчивостью или один тип движения — другим и т. п. Во всех таких случаях надо применять методы нелинейного анализа, которые можно найти в специальной литературе.

4. **Линеаризация.** Выгоды линейности бывают столь велики, что приближенная замена нелинейных соотношений на линейные, нелинейных моделей на линейные, т. е. *линеаризация* соотношений, моделей и т. д. весьма распространена. Такая линеаризация обычно проводится в двух случаях: либо если эксперимент показывает (как, например, для закона Гука), что отклонение от линейности в рассматриваемых диапазонах изменения переменных невелико и несущественно, либо же, если эти диапазоны малы и мы заменяем приращения переменных на их дифференциалы, отбрасывая члены высшего порядка малости. (Во втором случае применяется также линейное интерполирование.)

Покажем последнюю процедуру на формальном примере. Пусть величины x, y, z связаны уравнением

$$\frac{x^3 + xy}{y^3 - xz} + e^{2z} + 5 = 0. \quad (2.15)$$

Это уравнение при $x = 2, y = -1, z = 0$ удовлетворяется. Пусть теперь эти величины мало изменились, т. е. стало $x = 2 + \xi, y = -1 + \eta, z = \zeta$, где $|\xi|, |\eta|, |\zeta|$ малы. Требуется найти линейное соотношение между ξ, η, ζ , справедливое с точностью до членов высшего порядка малости; другими словами, требуется провести линейризацию уравнения (2.15) вблизи указанных значений x, y, z (говорят также — «при этих значениях»). Для этого продифференцируем обе части уравнения (2.15):

$$\frac{(3x^2 dx + (dx)y + xdy)(y^3 - xz)}{(y^3 - xz)^2} - \frac{(x^3 + xy)(3y^2 dy - (dx)z - xdz)}{(y^3 - xz)^2} + e^{2z}(2dz) = 0.$$

Подставив сюда вместо x, y, z их исходные значения, а вместо дифференциалов — приращения соответствующих переменных (при этом мы пренебрегаем величинами высшего порядка малости — в этом и состоит линейризация), получим

$$(11\xi + 2\eta)(-1) - 6(3\eta - 2\zeta) + 2\zeta = 0,$$

т. е.

$$11\xi + 20\eta - 14\zeta = 0.$$

Линейризованное уравнение несравненно проще исходного. Его можно записать и в переменных x, y, z :

$$11(x - 2) + 20(y + 1) - 14z = 0,$$

т. е.

$$11x + 20y - 14z = 2.$$

Геометрический смысл проведенной линейризации таков: мы получили уравнение касательной плоскости к поверхности (2.15) в пространстве x, y, z в заданной точке $(2, -1, 0)$.

В качестве другого примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + (1 + y^2) \sin y' + y = 1, \quad (2.16)$$

имеющее очевидное частное решение $y_0(x) \equiv 1$. Пусть близкое решение имеет вид $y(x) = 1 + \eta(x)$. Чтобы получить

линейризованное уравнение для η , варьируем уравнение (2.16)*:

$$(\delta y)'' + 2y(\delta y) \sin y' + (1 + y^2)(\cos y')(\delta y)' + \delta y = 0.$$

Подставив сюда $y = y_0(x) (\equiv 1)$, $\delta y = \eta$, получаем искомое уравнение

$$\eta'' + 2\eta' + \eta = 0,$$

которое легко решается.

На последовательной линейризации основан один из самых эффективных методов приближенного решения нелинейных уравнений различных типов — *метод Ньютона*. Опишем его сначала на примере решения конечного уравнения общего вида

$$f(x) = 0. \quad (2.17)$$

Метод имеет итерационный характер (см. Добавление, п. 4). Пусть мы отправляемся от некоторого нулевого приближения решения: $x = x_0$. Проведем линейризацию функции f при $x = x_0$, для чего разложим ее в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ и отбросим в разложении все нелинейные члены. Тогда взамен (2.17) мы получим линейризованное уравнение

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

* Вариация функции появляется при рассмотрении операторов (преобразователей функций в функции, см. п. 3) и функционалов (преобразователей функций в числа). Так, если задан оператор $z = F\{y\}$, где $y = y(x)$ — вход, а $z = z(x)$ — выход, то *вариация* $\delta y = \delta y(x)$ функции при переходе от y к некоторой другой, близкой функции \bar{y} , т. е. $\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x)$ (см. рис. 7; сравните: $dy(x)$ получается при сохранении функции $y(x)$, но изменении значения x). *Вариация оператора* $\delta F\{y\}$ получается, если в его приращении $F\{y + \delta y\} - F\{y\}$ оставить только линейные члены относительно δy и отбросить члены высшего порядка малости. *Варьирование* (вычисление вариации) оператора производится по тем же правилам, что и дифференцирование функции, причем надо полагать $\delta(y') \equiv (\delta y)'$, $\delta(y'') \equiv (\delta y)''$ и т. д., подобно тому, как это делается при вычислении смешанной производной функции нескольких переменных. Пример вычисления вариации оператора — левой части уравнения (2.16) — приведен в тексте. Аналогично определяется и вычисляется *вариация функционала*.

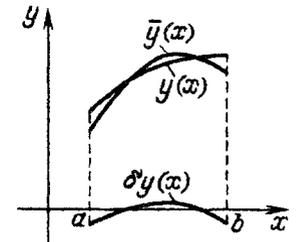


Рис 7

Его решение назовем приближением x_1 решения уравнения (2.17), т. е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Затем то же сделаем с x_1 и т. д. Общая формула для построения последовательных приближений по методу Ньютона такова:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.18)$$

Сравнение с уравнением (Д.28) показывает, что метод Ньютона состоит в применении метода итераций к уравнению (2.17), переписанному в равносильной форме:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Почему полезна именно такая форма? Для ответа, обозначив правую часть $\varphi(x)$, вычислим производную:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Таким образом, для точного решения \bar{x} уравнения (2.17) получаем при $f'(\bar{x}) \neq 0$, что $\varphi'(\bar{x}) = 0$. А это, в силу п. 4 Добавления, означает, что если только x_0 не слишком далеко от \bar{x} , то метод Ньютона сходится со сверхгеометрической скоростью. (Если $f'(\bar{x}) = 0$, что бывает весьма редко, то метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.)

В качестве примера рассмотрим то же уравнение (Д. 29), что и в п. 4 Добавления. Здесь формула (2.18) приобретает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 0,3}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 - 0,3}{3x_n^2 - 1}.$$

Начав с $x_0 = 0$, при вычислениях с точностью до 10^{-6} получаем $x_5 = x_4 = 0,3389362$ (проверьте!). Таким образом, сходимость получилась существенно более быстрая, чем в п. 4 Добавления. Расхождение в последней значащей цифре с п. 4 Добавления объясняется округлениями при вычислениях.

Покажем еще, как применяется метод Ньютона к системе конечных уравнений на примере системы двух уравнений общего вида

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0. \quad (2.19)$$

Пусть мы уже имеем некоторое приближение $x = x_n, y = y_n$. Чтобы перейти к следующему приближению, разложим функции f и g около значений $x = x_n, y = y_n$ в ряды Тейлора и отбросим в разложениях все нелинейные члены. Тогда взамен (2.19) мы получим систему уравнений первой степени

$$(f)_n + (f'_x)_n(x - x_n) + (f'_y)_n(y - y_n) = 0,$$

$$(g)_n + (g'_x)_n(x - x_n) + (g'_y)_n(y - y_n) = 0,$$

где обозначено $(f)_n = f(x_n, y_n)$, $(f'_x)_n = f'_x(x_n, y_n)$ и т. д. Решение этой системы и принимается за (x_{n+1}, y_{n+1}) , т. е. последующее приближение определяется из простой системы уравнений

$$(f'_x)_n x_{n+1} + (f'_y)_n y_{n+1} = (f'_x)_n x_n + (f'_y)_n y_n - (f)_n,$$

$$(g'_x)_n x_{n+1} + (g'_y)_n y_{n+1} = (g'_x)_n x_n + (g'_y)_n y_n - (g)_n.$$

Таким образом, исходя из нулевого приближения $x = x_0, y = y_0$, мы можем, положив $n = 0$, найти первое приближение $x = x_1, y = y_1$ и т. д. Из последней системы сразу видно также, что если последовательные приближения сходятся при $n \rightarrow \infty$, то в пределе получается одно из решений системы (2.19). На практике обычно факт сходимости или расходимости распознается легко, так как сходимость в методе Ньютона, если она имеет место, происходит с весьма высокой скоростью.

Метод Ньютона распространяется и на нелинейные уравнения других типов, в частности на краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, путем сведения их к последовательному решению линейных задач.

Имеются и другие способы линеаризации уравнений и моделей.

5. Детерминированные и вероятностные модели. Другие типы моделей. Математическая модель может включать случайные компоненты — случайные скалярные или векторные величины, случайные последовательности или функции, случайные структуры и т. п., удовлетворяющие статистическим законам. Такие модели называются *вероятностными* или *стохастическими* (*), в отличие от *детерминированных* (**), которые таких компонентов не содержат. Так, если какой-либо элемент изучаемого объекта

*) От греческого слова «стохастикос» — умеющий угадывать.

**) От латинского слова «детермино» — определяю.

является изделием массового производства и на интересующие нас свойства могут заметно повлиять отклонения параметров от их номинальных значений, то эти параметры часто считают случайными величинами. Случайные функции появляются, например, при рассмотрении воздействия ветра на какие-либо сооружения, сигналов на фоне шума, шероховатых поверхностей, турбулентных движений жидкости и т. д.

Вероятностные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей. К сожалению, довольно часто бывает, что вероятностные характеристики случайных компонентов (математические ожидания и дисперсии случайных величин, тем более законы распределения последних, а также аналогичные характеристики случайных функций) оказываются известными с весьма невысокой точностью или даже вовсе неизвестными, т. е. модель не удовлетворяет требованию продуктивности (см. п. 5 § 1). Методы математической статистики направлены на определение таких характеристик, но и эти методы не всегда удается эффективно применить. Поэтому при построении вероятностных моделей надо уделять существенное внимание источнику таких характеристик. Если они не поддаются определению с необходимой точностью, то можно попытаться поискать другую модель, быть может более грубую, но и более устойчивую относительно пробелов в знании исходных данных. Например, иногда удается провести исследование и вычисления по максимальным отклонениям рассматриваемых параметров.

Приведем пример. Пусть x — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + a(t; \omega)x = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad x(0) = 1,$$

где a — случайная функция (переменная ω , как это принято в теории вероятностей, имеет смысл элементарного исхода). Тогда и $x = x(t; \omega)$ — случайная функция, характеристики которой существенно зависят от характеристик функции a . Но пусть не представляется возможным детально узнать характеристики функции a , известно только, что всегда $1 \leq a \leq 2$. Тогда, подставляя крайние возможные значения, мы получаем гарантированную оценку решения: $e^{-2t} \leq x \leq e^{-t}$; из нее, например, следует, что $x(t; \omega) \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow \infty$.

Применяется классификация моделей и по другим признакам. Так, различают *статические* и *динамические* (эво-

люционные) модели; для второго типа моделей предметом изучения является изменение рассматриваемого объекта во времени. Промежуточное место занимают *квазистатические*, *стационарные* и *квазистационарные* модели. В квазистатической модели принимается, что изменение объекта происходит столь медленно, что при рассмотрении ситуации в каждый момент можно в первом приближении объект считать статическим (грубо говоря, пренебречь инерционными силами), а время считать добавочным параметром. В стационарной модели считается, что процессы происходят, но изучаемый объект во времени не меняется; простейший пример — электрическая цепь с постоянным током. Естественно определяется и квазистационарная модель.

В связи с перечисленными сейчас типами моделей упомянем еще о применяемых здесь терминах: *установившимся* процессом обычно называют стационарный или периодический процесс; *переходным* процессом называют процесс перехода от одного статического состояния или установившегося процесса к другому.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. О содержательной модели. Очевидный, но важнейший начальный этап построения или выбора математической модели — это получение по возможности более четкого представления о моделируемом объекте и уточнение его содержательной модели, основанное на неформальных суждениях. Нельзя жалеть времени и усилий на этот этап, от него в значительной мере зависит успех всего исследования. Не раз бывало, что значительный труд, затраченный на решение математической задачи, оказывался малоэффективным или даже потраченным впустую из-за недостаточного внимания к этой стороне дела.

В задачах тех типов, которые мы здесь рассматриваем, этот этап обычно заключается в уточнении структуры изучаемого объекта, существенных для проводимого исследования свойств его компонентов и характера их взаимодействия. Пусть, например, мы изучаем действие некоторого механического устройства. Тогда мы начинаем с выяснения того, из каких частей оно состоит, каковы их свойства, как эти части взаимодействуют, какие силы при этом возникают, а также не могут ли какие-либо немеханические процессы

(тепловые, электрические и т. д.) заметно повлиять на изучаемую ситуацию.

Содержательную модель, особенно при первоначальном исследовании, желательнее по возможности упростить (но, конечно, так, чтобы при этом не исказить качественную картину явления): грубую модель можно в дальнейшем уточнить. Так, мы выясняем, нельзя ли принять тот или иной элемент устройства за материальную точку или за абсолютно жесткое тело; если форма этого элемента существенна, то нельзя ли ее считать простой и т. п. При таком упрощении надо использовать аналогии с другими успешно решенными задачами, с другим собственным и чужим опытом. Но, конечно, нельзя бездумно идти на поводу готовых схем, так как решение каждой новой задачи требует новых, порой принципиально новых, соображений.

Если твердый элемент устройства обладает податливостью, то необходимо выяснить ее характер, т. е. следует ли считать деформации упругими или пластическими и т. д., можно ли считать материал однородным и изотропным. Если в рассматриваемую систему входят сыпучие тела, грунт или другие «неклассические» среды, то надо уточнить, какие из нужных нам свойств этих сред известны. Аналогично уточняются свойства жидких и газообразных компонент: наличие вязкости, сжимаемости, характер движения (ламинарное, турбулентное) и т. п.

При упрощении сложных структур широко применяется осреднение. Так, многокомпонентные среды (композиты, взвеси и т. п.) заменяются на однокомпонентные с соответственно подобранными свойствами; повторяющиеся дискретные нагрузки, соединения (типа заклепочных швов), другие конструктивные элементы — на непрерывные, если это упрощает исследование (п. 2 § 2); осредняются также быстро колеблющиеся внешние воздействия (п. 5 § 4).

Важную роль играет выяснение сил, действующих в системе, как внешних, так и внутренних. И здесь стараются произвести упрощения: малосущественные силы игнорируются (их можно учесть при уточнении исследования); при возможности производится группировка сил с заменой их на равнодействующие и т. п. Приведем простой пример.

Пусть в примере п. 1 § 1 массой m_n пружины пренебрегать нельзя; как учесть это обстоятельство? Отметим, прежде всего, что если один конец однородной пружины массы m_n закреплен, а другой движется вдоль линии ее действия со

скоростью v , то, приняв растяжение равномерным *) и обозначив l_n ее длину в ненагруженном состоянии, получаем выражение для кинетической энергии пружины:

$$T_n = \int_0^{l_n} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l_n} v \right)^2 \left(\frac{m_n}{l_n} dx \right) = \frac{1}{6} m_n v^2.$$

Поэтому закон сохранения энергии в применении к рассматриваемой системе имеет вид

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{6} m_n \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{const.}$$

После дифференцирования и сокращения на dx/dt получаем

$$\left(m + \frac{1}{3} m_n \right) \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Сравнивая с уравнением (1.1), мы видим, что в приведенных предположениях можно считать массу пружины равной нулю — это, конечно, упростит модель, — но к массе груза добавить $m_n/3$. Это поправочное слагаемое называется *присоединенной массой* пружины в рассматриваемой задаче.

Отметим, что при анализе содержательной модели надо уточнить, какие именно данные мы можем считать известными, — в частности, не проще ли непосредственно измерить величину, которую в принципе можно и вычислить.

*) При каком условии это допущение приемлемо? Естественно считать, что это можно сделать, если характерное время T_n , связанное с собственными продольными колебаниями пружины, существенно меньше характерного времени T_r , связанного с колебаниями груза, так как тогда неравномерность растяжения пружины будет за время T_r успевать выравниваться. Рассуждая, как в п. 1а Даваления, можно вывести (попробуйте!) уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kl_n^2}{m_n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

продольных колебаний пружины. Отсюда, в силу п. 5 § 5, получаем скорость $\sqrt{kl_n^2/m_n}$ распространения возмущений вдоль по пружине. За T_n можно принять время прохождения возмущения вперед и назад вдоль пружины, т. е. $T_n = 2l_n/\sqrt{kl_n^2/m_n} = 2\sqrt{m_n/k}$. За T_r можно принять период колебаний груза, т. е., в силу п. 1 § 1, $T_r = 2\pi\sqrt{m/k}$. Таким образом, допущение о равномерном растяжении пружины можно считать приемлемым, если $2\sqrt{m_n/k} \ll 2\pi\sqrt{m/k}$, т. е. $\sqrt{m_n} \ll \pi\sqrt{m}$. Допустив, как обычно, что «значительно меньше» означает «меньше по крайней мере в 10 раз», получаем условие приемлемости допущения: $m_n < 0,1m$. Заменив 10 на 5, что также представляется допустимым, получаем более свободное ограничение: $m_n < 0,4m$.

2. **Формулирование математической задачи.** Задачи анализа и синтеза. Далеко не всегда вопрос о том, какого типа математическую задачу мы будем решать, даже какие величины мы будем искать, бывает ясен с самого начала. Задача может быть поставлена не в конкретной форме («Найти частоту колебаний такой-то системы»), а в форме не столь определенной («Исследовать поведение такой-то системы», «Оптимизировать такое-то устройство путем подбора его параметров» и т. п.). Тогда требуется хотя бы предварительное уточнение плана действий: какие величины было бы желательно найти, какие зависимости исследовать и откуда их можно было бы получить, по какому критерию проводить оптимизацию и т. д. Такой план, который впоследствии может видоизменяться и дополняться, желательно обдумать на возможно более ранней стадии исследования, поскольку он может существенно повлиять на формулировку математической модели: что мы будем считать исходными данными, какие величины искать, какого типа уравнения нам понадобятся для этого и т. д. При уточнении математической модели мы уточняем и план действий, в итоге четко формулируя математическую задачу. (Впрочем, бывает, что даже четко сформулированная задача видоизменяется в процессе дальнейшего исследования.)

Прикладные математические задачи можно условно подразделить на два класса. В задачах одного класса речь идет об исследовании свойств заданного объекта — это *задачи анализа*. Задачи другого класса имеют целью выбор объекта из некоторой совокупности на основании каких-то требований — это *задачи синтеза*. (Термин «задачи синтеза» применяется и в более специальном смысле; в частности, в теории систем управления он означает задачу о построении такой системы, имеющей предписанное функционирование на основе применения обратной связи.) Конечно, это подразделение условно, так как многие задачи можно в равной мере отнести как к одному, так и к другому классу. Однако из содержательной постановки задачи чаще всего бывает ясно, о задаче какого класса идет речь.

Для задач анализа, которые мы будем в дальнейшем в основном рассматривать, математическая модель обычно сводится к уравнениям того или иного вида. О различных типах уравнений, которые встречаются в приложениях математики, мы поговорим в пп. 5 — 7. Математическая модель задачи синтеза тоже может свестись к решению уравнений, если условия, на основании которых требуется выбрать объект, имеют вид некоторых равенств. Но часто

условие выбора имеет другой характер: для выбираемого объекта некоторая заданная скалярная функция его параметров (*целевая функция*) должна принять наименьшее или наибольшее возможное значение. Тогда математическая модель сведется к задаче на экстремум. О типах таких задач будет сказано в пп. 8, 9.

3. **Определяющие соотношения.** Основными «конструктивными элементами» математической модели для рассматриваемого нами класса задач являются те или иные постоянные и переменные величины, входящие в состав модели, и функциональные зависимости одних величин от других. Некоторые из постоянных величин могут быть заданы (это *параметры задачи*), другие — искомыми; то же относится к функциям. Модель составляется с таким расчетом, чтобы, найдя искомые величины и функции, мы могли дать ответ на поставленные вопросы. Так, в примере п. 1 § 1 ответ на вопрос о характере колебаний дала функция $x(t)$, а о частоте — постоянная ω_0 .

Заданные и искомые величины и функции в математической модели обычно связываются уравнениями и неравенствами. Более того, во многих случаях, особенно в задачах анализа, сама модель имеет вид уравнения или системы уравнений. Но и в том случае, если модель содержит еще что-то, уравнения обычно составляют ее весьма существенную часть.

Уравнения, включаемые в математическую модель изучаемого объекта, выписываются на основе *определяющих соотношений* между величинами, вытекающих из постулатов содержательной модели (п. 2 § 1), как это в простом примере мы сделали в п. 1 § 1. Эти постулаты могут иметь различное происхождение и различную степень адекватности.

Некоторые постулаты непосредственно вытекают из *универсальных физических законов*, таких, как закон сохранения энергии, второй закон Ньютона (в частности, примененный в п. 1 § 1) и т. п. Аналогичную роль играют физические законы с ограниченной областью действия, для которых возможность применения в изучаемой задаче следует из универсальных законов, например, если идет речь о применении закона сохранения масс в задачах инженерной механики. (В этих задачах изменения масс, вытекающие из теории относительности, явно пренебрежимо малы.) Полная адекватность таких постулатов несомненна.

Однако универсальных и родственных им законов в подавляющем большинстве исследований недостаточно и

поэтому приходится также пользоваться законами, имеющими иной характер. Широко применяются, в частности, феноменологические *) законы — такие, как закон Гука или упомянутый в п. 4 § 1 закон Фурье, — т. е. достаточно хорошо эмпирически (и отчасти теоретически) обоснованные законы с ограниченной областью действия, также установленной эмпирически. При применении феноменологического закона для построения математической модели весьма важными являются вопросы о самой возможности этого применения (т. е. о попадании изучаемой ситуации в сферу действия закона) и о последствиях возможных отклонений от этого закона. Бывает, как в п. 1 § 1, что возможность этого применения оговорена в условии задачи, но эти вопросы все равно возникнут при применении полученных результатов к реальному объекту.

Еще менее универсальный характер имеют полуэмпирические соотношения, получающиеся в результате сочетания качественных соображений (в частности, соображений размерности) и обработки результатов эксперимента или иной статистики либо выведенные из других соотношений такого же характера. Так, в прикладной аэродинамике хорошо известна формула для подъемной силы P при плоском дозвуковом обтекании крыла:

$$P = c_y \frac{\rho v^2}{2} b, \quad (3.1)$$

где ρ и v — соответственно плотность и скорость набегающего потока, b — хорда профиля крыла, а c_y — безразмерный коэффициент, зависящий от формы профиля и направления набегающего потока. То, что формула должна иметь такой вид, легко вытекает из соображений размерности (см. п. 4), но для конкретных расчетов очень важно знать, чему равно c_y для различных реальных профилей и «углов атаки» α , характеризующих направление набегающего потока. Это теоретически сделать в принципе можно, но не просто; проще это сделать эмпирически путем продувки модели в аэродинамической трубе. В результате были получены графики зависимости $c_y(\alpha)$ для многих наиболее интересных профилей.

Интересно сравнить формулу (3.1) с формулой Жуковского для той же задачи: $P = \rho v \Gamma$, где Γ — циркуляция вектора скорости воздуха по контуру, охватывающему профиль крыла. Последняя формула в теоретическом отно-

шении более совершенна, так как не содержит эмпирического коэффициента c_y . Но как в реальной ситуации найти значение Γ ? Теоретически это удастся лишь в редких случаях, а получить Γ с помощью измерения еще сложнее, чем c_y . Таким образом, формула (3.1) обладает существенным преимуществом в продуктивности, о которой мы говорили в п. 6 § 1.

Применяются также и чисто эмпирические соотношения, получаемые с помощью прямой обработки данных наблюдения или эксперимента и зачастую даже привязанные к определенным единицам измерения.

К сожалению, и этих соотношений порой оказывается мало, и приходится идти на определенный риск, применяя известные формулы вне рамок, где они были установлены, в надежде на то, что это не даст существенной ошибки либо что ошибку можно будет компенсировать путем каких-то поправок. Порой приходится также выводить новые формулы на основании недостаточных данных. В таких случаях надо отчетливо видеть — и не скрывать от других — слабые места в рассуждениях, так как здесь особенно велика опасность грубых ошибок и, в частности, подгонки решения под желаемый результат, который к тому же, особенно после применения ЭВМ, получает видимость математического обоснования. В таких случаях математика может принести не пользу, а вред!

Выводы из недостаточно обоснованной модели надо стараться перепроверять, меняя модель либо сравнивая какие-либо из этих выводов с эмпирическими данными или теоретическими результатами, полученными независимо от проводимого исследования.

4. Подбор эмпирической формулы. Остановимся особо на вопросе о подборе эмпирической формулы для функциональной зависимости между величинами.

Пусть мы знаем, что некоторая величина y является функцией другой величины x , т. е. $y = y(x)$, но аналитическое выражение этой функции нам неизвестно и мы хотим подобрать для нее формулу $y = f(x)$, с достаточной для нас точностью описывающую зависимость. Пусть, далее, в результате эксперимента или наблюдения мы получили ряд значений x и соответствующих значений y :

$$x = x_1, x_2, \dots, x_N;$$

$$y = y_1, y_2, \dots, y_N.$$

Тогда, если N не слишком велико, обычно начинают с нанесения этих данных на координатную ось в виде

*) От греческого слова «файноменон» — являющееся.

отдельных точек. При этом становятся видны точки, выпадающие из общего хода зависимости. Они могут свидетельствовать о каких-то важных эффектах, требующих специального исследования, но чаще получаются из-за существенных ошибок при эксперименте или вычислениях — тогда эти точки просто игнорируются.

Затем надо выбрать вид формулы, которой мы будем пользоваться. Если этот вид не вытекает из каких-либо общих соображений, то обычно выбирают одну из простейших элементарных функций или их простую комбинацию (сумму степенных или показательных функций и т. п.); конечно, для этого надо хорошо представлять себе возможные графики таких функций. При этом следят за тем, чтобы подбираемая функция $f(x)$ имела те же характерные особенности, что и изучаемая функция $y(x)$. Так, если по своему содержательному смыслу функция $y(x)$ четная, то и функция $f(x)$ должна быть четной и т. п.; очень важно правильно передать поведение функции при больших и малых значениях x , возможную смену ее знака и другие ее существенные черты. На малом интервале изменения x часто применяют наиболее простую — линейную функцию, а вблизи точки экстремума — квадратичную функцию. Иногда не удается подобрать единую формулу на всем интервале изменения x и приходится разбивать этот интервал на части и на каждой подбирать свою формулу.

После выбора вида формулы нужно определить значения входящих в нее параметров. Рассмотрим сначала случай, когда экспериментальные точки подсказывают линейную зависимость y от x , т. е. мы полагаем $f(x) = ax + b$ и нам надо найти значения параметров a и b . Если высокой точности не требуется (тем более, что формула все равно приближенная), то это можно сделать непосредственно с помощью графика, проведя прямую — лучше всего применив прозрачную линейку, — к которой экспериментальные точки лежат ближе всего, а затем определить ее параметры.

Если требуется большая точность или если мы хотим обойтись без геометрических построений, ограничившись линейными приближениями, то наиболее часто для подбора параметров a и b применяется метод наименьших квадратов. Он состоит в минимизации суммы квадратов разностей между эмпирическими значениями функции и соответствующими ее значениями, полученными из

приближенной формулы,

$$\sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min.$$

Применение необходимого условия экстремума (равенство нулю производных первого порядка по каждому аргументу) к этой сумме, рассматриваемой как функция величин a, b , приводит к простой системе уравнений для определения a и b :

$$\left(\sum_i x_i^2\right) a + \left(\sum_i x_i\right) b = \sum_i x_i y_i, \quad \left(\sum_i x_i\right) a + Nb = \sum_i y_i.$$

Этот метод можно применить и к формулам другого вида, даже содержащим более одной независимой переменной и (или) любое число параметров, если эти параметры входят линейно в искомую формулу. Если это не так, то иногда оказывается возможным ввести новые переменные так, чтобы это условие было выполнено.

Приведем пример. Пусть эксперимент привел к значениям:

$x = 0,00; 0,10; 0,20; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,70; 0,80; 0,90; 1,00;$

$y = 0,00; 0,01; 0,03; 0,08; 0,17; 0,29; 0,45; 0,66; 0,91; 1,22; 1,57.$

Изображение экспериментальных точек на миллиметровке, которое мы предоставляем сделать читателю, напоминает о степенной функции вида $y = ax^b$, в которую параметр b входит нелинейно. Поэтому прологарифмируем это равенство и обозначим $\ln y = Y, \ln x = X, \ln a = A$. Мы приходим к формуле $Y = bX + A$, в которую параметры A и b входят линейно. В новых переменных таблица имеет вид

$X = -1,0000; \quad -0,6990; \quad -0,5229; \quad -0,3979;$
 $-0,3010; \quad -0,2218; \quad -0,1549; \quad -0,0969; \quad -0,0458;$
 $0,0000;$

$Y = -2,0000; \quad -1,5229; \quad -1,0969; \quad -0,7696;$
 $-0,5376; \quad -0,3468; \quad -0,1805; \quad -0,0410; \quad 0,0864; \quad 0,1959.$

Применение метода наименьших квадратов дает значения $b = 2,2734, A = 0,16079$, откуда $a = 1,4481$, и с учетом точности исходных данных мы получаем приближенную формулу $y = 1,45x^{2,27}$. Отметим, что на полученные значения параметров могут существенно повлиять погрешности при измерении малых значений y . Для повышения

достоверности результата следует либо повысить точность этого измерения, либо игнорировать эти значения при применении метода.

5. О размерностях величин. В приложениях математики — в отличие от курса самой математики — рассматриваемые величины, как правило, размерны. Этому важному вопросу не всегда уделяется необходимое внимание, что может послужить источником ошибок.

Напомним, что по определению две величины имеют одинаковую *размерность*, если их можно выразить в одних и тех же единицах измерения. Так, величины $v_1 = 5 \text{ км/с}$ и $v_2 = 3 \text{ фут/ч}$ имеют одинаковую размерность; это записывают так: $[v_1] = [v_2]$. Обычно размерности некоторых величин принимаются за основные, а размерности других величин выражаются через основные. Так, в задачах, связанных с механикой, за основные берутся размерности длины (эта размерность обозначается буквой L), времени (T) и массы (M), так что, например,

$$[v_1] = [v_2] = L/T = LT^{-1}.$$

При решении задач в буквенной форме обычно все формулы без особой оговорки считаются *размерно однородными*, т. е. не связанными с определенными единицами измерения участвующих величин. Но в числовых ответах эти единицы обычно присутствуют, т. е. размерная однородность нарушается. Например, широко известная формула для пути при свободном падении $s = at^2/2$ размерно однородна, тогда как та же формула, записанная в виде $s = 4,90t^2$, уже не обладает этим свойством, она требует, чтобы s было выражено в метрах, а t — в секундах.

Как перейти в размерно неоднородной формуле к другим единицам измерения? Пусть, например, мы хотим в последней формуле перейти к километрам и минутам. Для этого представим

$$s \text{ (м)} = \frac{s}{1 \text{ м}} = \frac{s}{10^{-3} \cdot 1 \text{ км}}, \quad t \text{ (с)} = \frac{t}{1 \text{ с}} = \frac{t}{60^{-1} \cdot 1 \text{ мин}},$$

где s и t — размерные путь и время. Отсюда получаем подробно

$$\begin{aligned} s \text{ (км)} &= \frac{s}{1 \text{ км}} = 10^{-3} s \text{ (м)} = 10^{-3} \cdot 4,90 [t \text{ (с)}]^2 = \\ &= 10^{-3} \cdot 4,90 \cdot \left[\frac{t}{60^{-1} \cdot 1 \text{ мин}} \right]^2 = \frac{10^{-3} \cdot 4,90}{60^{-2}} [t \text{ (мин)}]^2 \end{aligned}$$

или окончательно в новых единицах $s = 17,65t^2$.

Если размерность какой-либо величины не сразу видна из ее определения, то ее легко получить из любой размерно однородной формулы, содержащей эту величину и другие величины, размерность которых известна. Выясним, например, размерность коэффициента температуропроводности из формулы (1.4). Так как дифференциал любой величины имеет ту же размерность, что и сама величина, то, приравнявая размерности левой и правой частей формулы, получаем

$$\frac{[\theta]}{[t]} = [a] \frac{[\theta]}{[x]^2}, \quad \text{откуда} \quad [a] = \frac{[x]^2}{[t]} = L^2 T^{-1}.$$

Особую роль играют безразмерные величины. Их числовые значения не зависят от выбора системы единиц.

6. Подобие объектов. Как известно, две геометрические фигуры подобны, если они имеют одинаковую форму, но, вообще говоря, различные размеры. Более точно это означает, что длины любых линий на одной из фигур должны быть пропорциональными длинам соответствующих линий на другой фигуре; при этом коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом подобия*. Например, у подобных треугольников пропорциональны не только соответствующие стороны, но и соответствующие высоты, медианы и т. д., все с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. Поэтому пересчет длин при переходе от какой-либо фигуры к подобной фигуре равносильен тому, что мы оставляем без изменения численные значения всех длин, но меняем единицу длины в k раз, где k — коэффициент подобия. При этом все площади меняются в k^2 раз, объемы (если фигура пространственная) — в k^3 раз; безразмерные характеристики — углы, отношения сторон или каких-либо других длин и т. п. — у подобных фигур одинаковы.

Аналогично вводится понятие подобия в других дисциплинах. Два объекта (в том числе состояния, процессы) называются *подобными*, если они отличаются только масштабами основных размерных величин (в частности, для объектов механики — масштабами длины, времени и массы). Более подробно это означает, что пересчет всех характеристик объекта при переходе от него к подобному объекту равносильен сохранению всех численных значений величин и замене единиц измерения основных размерных величин; при этом коэффициенты подобия по каждой из этих основных величин, вообще говоря, различны. Отметим, что точнее было бы говорить о подобии моделей объектов, так как сами

объекты могут обладать какими-либо добавочными характеристиками, не включаемыми в модель; но мы не станем менять установившуюся терминологию.

Любая безразмерная комбинация величин, характеризующих объект, должна быть равна такой же комбинации для любого подобного объекта. Подобие двух объектов обеспечивается совпадением для них основных безразмерных комбинаций из заданных параметров объекта; эти комбинации, называемые *критериями подобия*, выбираются так, чтобы они были независимыми (не выражались друг через друга), но чтобы через них выражались все остальные безразмерные комбинации параметров объекта. Если имеется всего N независимых существенных параметров объекта, а основных размерностей n , то критериев подобия должно быть $N - n$.

Приведем примеры. Сначала рассмотрим подобие треугольников. Для треугольника имеется три независимых существенных параметра, которые его полностью определяют — это его стороны a, b, c . Так как они имеют одинаковую размерность, то условие подобия треугольников со сторонами a, b, c и a', b', c' таково: $a/a' = b/b' = c/c'$. В данном случае $N = 3, n = 1$; поэтому здесь имеется $3 - 1 = 2$ критерия подобия. За них можно выбрать или отношения b/a и c/a , или отношение b/a и угол C , или углы A и B ; мы приходим к известным признакам подобия треугольников.

В качестве второго примера рассмотрим колебания математического маятника без затухания. Здесь параметрами процесса можно считать длину l маятника, массу m груза, ускорение g силы тяжести и наибольший угол φ отклонения маятника от вертикали. Так как

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [\varphi] = 1$$

и имеется три основных размерности, то $N - n = 4 - 3 = 1$, т. е. критерий подобия только один; ясно, что это φ . Таким образом, колебания маятников с одинаковым значением φ подобны. Пусть нас интересует круговая частота ω колебаний. Так как $[\omega] = T^{-1}$, то величина $lg^{-1}\omega^2$ безразмерна, а потому для подобных процессов одинакова, т. е. зависит только от φ . Мы получаем формулу $lg^{-1}\omega^2 = f(\varphi)$, откуда

$$\omega = \sqrt{f(\varphi)} \sqrt{\frac{g}{l}} = c_\varphi \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (3.2)$$

где c_φ — безразмерный коэффициент, зависящий только от φ . Вид этой зависимости только из соображений

размерности получить нельзя (можно доказать, что $c_\varphi = \pi \left(2 \int_0^{\pi/2} d\alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \alpha} \right)^{-1}$). Но и без этого из

формулы (3.2) можно получить полезные следствия: мы видим, что частота колебания не зависит от массы груза; видим, как она зависит от l , а это дает возможность, зная частоту для одного маятника, пересчитать ее для другого и т. д.

Аналогично получается формула (3.1), при выводе которой надо учесть, что для плоской задачи $[\rho] = ML^{-2}$. Может возникнуть вопрос: почему существенно, что обтекание дозвуковое? Здесь дело в том, что на подъемную силу влияет также сжимаемость воздуха, которой можно пренебрегать лишь для сравнительно небольших скоростей v (скажем, до половины скорости звука). Для больших скоростей эту сжимаемость надо учитывать и можно проверить, что учет сжимаемости сводится к введению в число задаваемых параметров также и скорости a звука. Но тогда к критериям подобия, характеризующим форму профиля и направление набегающего потока, добавляется еще один — число Маха $Ma = v/a$. Таким образом, при скоростях потока, близких к скорости звука или больших ее, для подобия двух процессов необходимо также совпадение соответствующих чисел Маха.

Рассмотрим еще один пример. Пусть железнодорожная цистерна, частично заполненная жидкостью и катящаяся с постоянной скоростью v , внезапно останавливается, и нас интересует возникающее при этом движение жидкости. Если цистерна не имеет переборок и внутренней арматуры, то это движение поддается довольно точному расчету, в противном случае расчет затруднителен. Но можно провести наблюдение на модели, изготовленной с точным соблюдением пропорций с геометрическим коэффициентом подобия k_l . Возникают вопросы: какова должна быть скорость v_m модели; нужно ли заменить жидкость; как пересчитать время фаз процесса с модели на натуре и т. д.

Эти вопросы решаются с помощью анализа размерностей. На первой стадии процесса, пока затуханием колебаний можно пренебречь, существенно только силы инерции и гравитации, а заданными параметрами, при точном соблюдении геометрического подобия (включая сохранение коэффициента заполнения цистерны жидкостью), можно считать характерную длину l цистерны, скорость v , плотность ρ жидкости и ускорение g земного тяготения. Для них

предосторожности, выдаст каждый из приведенных результатов как достоверный *).

Имеются различные способы распознавания плохой обусловленности системы уравнений. Самый простой из них состоит в пересчете решения при произвольном изменении исходных данных в рамках их точности. Если при этом обнаружится неприемлемый разброс результатов, то обычно стараются как-то существенно изменить систему уравнений задачи, другими словами, заменить математическую модель.

Нелинейное уравнение (3.3) решают чаще всего «вручную», а систему вида (3.4) — на ЭВМ обычно с помощью какого-либо из вариантов метода Ньютона (см. п. 4 § 2). Однако при этом число уравнений и неизвестных, при котором система допускает эффективное решение, в общем случае существенно снижается по сравнению с линейным случаем, до значения порядка 10. Впрочем, многое зависит от выбора нулевого приближения: удачный выбор, основанный на прикидке или на неформальных соображениях, может «расколоть» и систему из большого числа уравнений, а также существенно уменьшить число итераций.

Если система конечных уравнений включает параметр и ее решение при некотором значении параметра известно, то для получения решения при других значениях параметра можно применить метод продолжения решения по параметру. Этот метод мы поясним на примере системы

$$f(x, y; t) = 0, \quad g(x, y; t) = 0 \quad (3.6)$$

с параметром t . Пусть известны значения решения при $t = t_0$:

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad (\text{при } t = t_0). \quad (3.7)$$

Чтобы найти решение системы (3.6) при других значениях t , продифференцируем уравнения (3.6) по t , считая в них x и y функциями t ; получаем

$$\begin{aligned} f'_x(x, y; t) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y; t) \frac{dy}{dt} &= -f'_t(x, y; t), \\ g'_x(x, y; t) \frac{dx}{dt} + g'_y(x, y; t) \frac{dy}{dt} &= -g'_t(x, y; t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

*) Рассмотренный пример имеет простое геометрическое истолкование. Каждое из уравнений (3.5) определяет прямую на плоскости с декартовыми координатами x, y , так что задача состоит в нахождении точки пересечения двух прямых. В данном примере эти прямые пересекаются под весьма малым углом (менее 0,5 угловой минуты). Малому изменению правой части отвечает малый перенос второй прямой в поперечном направлении. Но при таком переносе точка пересечения прямых может значительно сдвинуться!

Эти равенства образуют систему двух линейных алгебраических уравнений относительно dx/dt и dy/dt и поэтому определяют эти производные как функции коэффициентов и правых частей, т. е. в конечном счете как функции x, y, t . (Для системы (3.8) выражения этих функций нетрудно выписать явно, но, вообще говоря, в таком явном выписывании нет необходимости.) Таким образом, мы приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $x(t), y(t)$. Решая ее численно при начальных условиях (3.7), мы и получаем искомое решение системы (3.6) — во всяком случае, пока оно не уйдет в бесконечность или пока определитель системы (3.8) не станет близким к нулю, что всегда является признаком критической ситуации. Отметим, что в процессе продолжения желательнее время от времени проводить уточнение решения — например, по методу Ньютона.

Сходный метод постепенной перестройки известного решения применяется и для более сложных задач, включающих дифференциальные, интегральные уравнения и т. д. Его можно применить и в случае, когда в поставленную задачу параметр не входит: тогда он вводится искусственно так, чтобы при одном его значении получилась задача с известным решением, а при другом — исходная задача.

Отметим некоторые случаи, когда решение нелинейной системы (3.4) существенно упрощается. Пусть, например, все уравнения этой системы, кроме последнего, линейны. Тогда, перенеся в первых $n - 1$ уравнения члены с x_n в правую часть (кстати, в эти члены x_n может входить и нелинейно), мы, как правило, можем разрешить эти уравнения относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , выразив тем самым эти неизвестные через x_n . Подставив полученные выражения в последнее уравнение (3.4), мы приходим к уравнению вида (3.3) относительно x_n .

Сравнительно просто решается также *треугольная* система уравнений, общий вид которой

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

В самом деле, найдя из первого уравнения значение x_1 , мы можем подставить его во второе, в результате чего получится уравнение с единственной неизвестной x_2 . Найдя значение x_2 , мы подставляем полученные значения x_1 и x_2 в третье

уравнение, т. е. приходим к уравнению с единственной неизвестной x_3 , и так до последнего уравнения, из которого находим значение x_n .

Описанные случаи допускают разнообразные варианты.

Отметим, что нелинейные уравнения и системы уравнений в отличие от линейных могут иметь более одного решения. Тогда возникают вопросы — то ли решение мы получили, которое нас интересует, и могут ли подсказать что-то полезное другие решения; сходные вопросы появляются, если задача вместо вещественного решения, которое ожидалось, или наряду с ним обладает комплексными решениями.

Важным частным случаем нелинейных уравнений, встречающимся в разнообразных приложениях математики, является *характеристическое уравнение* для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка m . Это алгебраическое уравнение степени m , имеющее вид

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

где I — единичная матрица порядка m . В курсах численных методов и в специальной литературе приведен ряд методов его решения.

В заключение заметим, что хотя для нахождения n величин в принципе достаточно n независимых конечных уравнений, но если эти уравнения выписываются с определенной погрешностью, то в ряде случаев для повышения достоверности ответа количество уравнений увеличивают. Тогда задача о решении системы уравнений преобразуется в задачу об их наилучшем совместном приближенном удовлетворении, что можно сделать, например, с помощью одного из вариантов метода наименьших квадратов.

Приведем пример. Пусть для определения двух величин x, y мы получили три уравнения:

$$x + y = 3,1, \quad x + 2y = 4,9, \quad 2x + 3y = 7,8.$$

На первый взгляд эта система противоречива, так как, складывая два первых уравнения, мы приходим к противоречию с третьим. Но если правые части получены в результате измерения и содержат погрешность, то такая система вполне естественна. В простейшем варианте метода наименьших квадратов x и y надо найти из условия

$$(x + y - 3,1)^2 + (x + 2y - 4,9)^2 + (2x + 3y - 7,8)^2 \rightarrow \min,$$

которое приводит к значениям $x = 1,23, y = 1,80$.

Различные методы численного решения конечных уравнений изложены во многих курсах численных методов (см., в частности, [5]).

8. Уравнения для функций одного аргумента. Если для ответа на поставленные вопросы необходимо предварительно найти те или иные функции, то конечных уравнений обычно оказывается недостаточно и приходится привлекать уравнения более сложной структуры. Здесь мы рассмотрим случай, когда искомыми являются функции одного аргумента.

Наиболее широко в приложениях математики используются *дифференциальные уравнения*. (Если хотят подчеркнуть, что искомой является функция от одного аргумента, то говорят: *обыкновенные дифференциальные уравнения*.) Дифференциальное уравнение порядка n в стандартной форме, т. е. разрешенное относительно старшей производной искомой функции, имеет в общем случае вид

$$\frac{d^n u}{dt^n} = F\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right). \quad (3.9)$$

При этом независимую переменную (здесь t) удобно трактовать как время; кстати, в приложениях она чаще всего таковым и является. (Впрочем, нередки и случаи, когда она имеет смысл геометрической координаты или — реже — какой-либо иной смысл.)

Как известно, общее решение уравнения (3.9) включает n произвольных постоянных, и потому, чтобы выделить конкретное частное решение, надо задать еще n конечных уравнений (так называемых *добавочных условий*), связывающих значения искомой функции u и ее производных в некоторых точках. Если (3.9) рассматривается как уравнение, определяющее развитие некоторого процесса во времени, то чаще всего добавочными служат *начальные условия*

$$u = u_0, \quad \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)_0, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} = \left(\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right)_0 \quad (\text{при } t = t_0),$$

фиксирующие состояние рассматриваемого процесса в начальный момент t_0 . Если независимой переменной служит геометрическая координата, а искомая функция строится на некотором интервале, то чаще применяются *краевые условия*, в которых какое-то число k условий задается на левом конце этого интервала, а $n - k$ — на правом (обычно в таких случаях n четно и $k = n - k = n/2$). Встречаются и добавочные условия иного вида. Дифференциальное

уравнение вместе с начальными (соответственно, краевыми) условиями называется *задачей Коши* (соответственно, *краевой задачей*).

Аналогичный вид имеют системы дифференциальных уравнений с несколькими искомыми функциями, число которых должно равняться числу уравнений. Каждую такую систему (а потому и уравнение (3.9)) легко с помощью введения новых искомых функций свести к системе уравнений первого порядка *), что довольно часто делают. Система первого порядка размерности n в стандартной форме имеет в общем случае вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{du_n}{dt} &= f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Для выделения частного решения должно быть указано еще n добавочных условий. Так, начальные условия имеют вид

$$u_1 = (u_1)_0, u_2 = (u_2)_0, \dots, u_n = (u_n)_0 \quad (\text{при } t = t_0).$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию механической системы под действием внешних и внутренних сил, должна, как правило, содержать столько независимых уравнений второго порядка, сколько эта система имеет степеней свободы (см. уравнения (1.1) и (2.1)). Если совершается переход к фазовым координатам, то уравнения оказываются первого порядка, а их число удваивается. Таким образом, значение числа степеней свободы механической системы позволяет проконтролировать полноту ее математической модели. (По поводу числа степеней свободы см. Добавление, п. 5.)

*) Так, для уравнения (3.9) достаточно обозначить

$$u_1 = u, u_2 = \frac{du}{dt}, u_3 = \frac{d^2u}{dt^2}, \dots, u_n = \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}.$$

Это приводит к системе уравнений первого порядка

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \frac{du_2}{dt} = u_3, \dots, \frac{du_{n-1}}{dt} = u_n, \frac{du_n}{dt} = F(t, u_1, u_2, \dots, u_n),$$

равносильной уравнению (3.9)

Для дифференциального уравнения и системы таких уравнений редко удается получить интересующее нас решение точно, в виде формулы. (Исключение составляет важный класс линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами, а также некоторые гораздо более узкие классы уравнений первого и второго порядков, которые можно найти в распространенных учебниках и справочниках.) Однако этот недостаток компенсируется наличием большого числа эффективных методов приближенного построения решений, а также асимптотических и качественных методов их исследования.

Методы приближенного построения решений дифференциальных уравнений, как и других уравнений, в которых искомыми являются функции, можно условно подразделить на непрерывные и дискретные; в первых решение строится как функция непрерывного аргумента, во вторых — дискретного (сравните п. 2 § 2). Типичными непрерывными методами являются различные варианты методы Галеркина и другие методы, в которых путем подбора параметров в формуле для приближенного решения производят «исправление» невязки. (Напомним, что *невязкой* называется разность между левой и правой частями уравнения после подстановки в него приближенного решения; для точного решения невязка равна нулю.) Эти методы широко применяются при решении краевых задач.

Типичными дискретными методами являются методы Рунге — Кутты, Адамса и другие сходные методы, особенно удобные при работе на ЭВМ. В этих методах значение приближенного решения строится в точках $t_0, t_1 = t_0 + \tau, t_2 = t_0 + 2\tau, \dots, t_k = t_0 + k\tau, \dots$, где $\tau > 0$ — выбранный шаг метода. Дифференциальное уравнение (3.9) по определенному правилу, различному для разных методов, заменяется на *разностное уравнение* вида

$$u_{k+r} = \varphi(u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+r-1}, k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.10)$$

где под u_k понимается значение приближенного решения при $t = t_k$; тогда говорят о *явном r -шаговом разностном методе*. (Так, метод Рунге — Кутты решения дифференциального уравнения первого порядка является одношаговым, а метод Адамса — четырехшаговым.) Иногда оказывается более удобным перейти к разностному уравнению вида

$$\Phi(u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+r-1}, u_{k+r}, k) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

— это *неявный r -шаговый метод*. Для неявного метода на каждом шаге приходится решать конечное уравнение

относительно u_{k+r} , но оказывается, что это осложнение может с лихвой искупаться возможностью увеличения τ и тем самым уменьшением числа шагов для достижения разумной точности.

Аналогичным образом применение дискретных методов решения системы дифференциальных уравнений приводит к системе разностных уравнений. Ее в общем случае можно записывать в том же виде (3.10) или (3.11), но под u_k тогда уже понимается вектор той же размерности, что и размерность исходной системы.

Дискретные методы особенно удобны при решении задачи Коши. В самом деле, определив сначала значения u_0, u_1, \dots, u_{r-1} (имеются способы, как это сделать), мы можем, положив $k = 0$, найти значение u_r ; затем, положив $k = 1$, найти u_{r+1} и т. д., пока не пройдем весь интересующий нас интервал изменения переменной t . В случае краевой задачи значения u_0, u_1, \dots, u_{r-1} непосредственно определить нельзя и совокупность уравнений (3.10) для всех необходимых значений k приходится рассматривать как систему конечных уравнений специального вида, причем очень высокой размерности. В курсах приближенных вычислений приводится ряд методов решения подобных систем (чаще всего применяется так называемая прогонка).

По поводу численного решения дифференциальных уравнений см. [4, 5, 31] и другие курсы численных методов.

Разностные уравнения вида (3.10) и (3.11), скалярные и векторные, появляются в приложениях математики и вне связи с дифференциальными уравнениями. Задачи, свойства решений, асимптотические и качественные методы их исследования для разностных уравнений схожи с таковыми для дифференциальных уравнений, и их можно найти в специальной литературе. Разностные уравнения обычно появляются как математические модели механических и иных систем, для которых определен закон перехода из одного состояния в другое в некоторые дискретные моменты времени, либо как модели стационарного состояния дискретной системы взаимосвязанных объектов. Особенно удобны линейные разностные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, для которых решение строится в виде простой формулы.

В последние годы в приложениях математики широко распространились дифференциально-функциональные уравнения (иначе — дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом). Как правило, это уравнения запаздывающего типа или нейтрального типа, простыми пред-

ставителями которых в случае уравнений первого порядка могут служить соответственно уравнения

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h))$$

и

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u'(t-h))$$

(штрихом обозначена производная; $h > 0$ — заданная постоянная). Такие уравнения появляются, если в моделируемой системе имеется элемент задержки, в результате действия которого скорость эволюции системы определяется ее состоянием не только в текущий момент t , но и в предшествующий момент $t-h$. Дифференциально-функциональные уравнения широко применяются в теории регулирования, математической биологии, медицине, экономике и др.

Методы приближенного построения и исследования решений дифференциально-функциональных уравнений сейчас развиты близко к соответствующим им методам для обычных дифференциальных уравнений и приведены в специальной литературе. Однако появление «запаздывания» h порой приводит не только к количественным, но и к качественным изменениям постановок задач и свойств их решений. Так, в качестве начального условия для уравнений первого порядка задается не только значение $u(t_0)$, как для обычных уравнений, а все значения искомой функции $u(t)$ при $t_0 - h \leq t \leq t_0$; при заданном начальном условии уравнение может решаться не в обе стороны, как обычно, а только «вперед» по t и т. д. Как и для случая обычных уравнений, наиболее эффективно применение линейных уравнений или систем с постоянными коэффициентами. В частности, вопрос об устойчивости системы, описываемой таким уравнением, полностью решается на основе анализа корней соответствующего характеристического уравнения, которое, правда, оказывается не алгебраическим, как для обычного дифференциального уравнения, а трансцендентным.

Реальные объекты могут описываться дифференциально-функциональными уравнениями и более сложной структуры, чем приведенная выше. В частности, уравнение может включать не одно, а несколько дискретных запаздываний, а также «распределенное запаздывание». Это приводит к интегро-дифференциальным уравнениям. В линейном случае такое уравнение может, например, иметь вид

$$u'(t) = \int_{t_0}^t K(t, s) u(s) ds + f(t) \quad (t \geq t_0)$$

(заданная функция K называется *ядром* этого уравнения); оно описывает системы, обладающие памятью. Интегрально-дифференциальные уравнения могут иметь и более сложный вид.

Применяются и «чисто» интегральные уравнения, чаще всего — уравнения Фредгольма второго рода, т. е. уравнения вида

$$u(t) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t, s) u(s) ds + f(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

и уравнения Вольтерра второго рода, имеющие вид

$$u(t) = \int_{\alpha}^t K(t, s) u(s) ds + f(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

(Соответствующие уравнения первого рода получаются, если левую часть заменить нулем.) При математическом моделировании колебаний сплошных сред встречается соответствующая задача на собственные значения

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(t, s) u(s) ds = \lambda u(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

Собственным значениям ядра K , определяющим частоту так называемых нормальных колебаний среды, называется любое значение λ , при котором последнее уравнение имеет ненулевые решения; сами эти решения, определяющие моды (формы) таких колебаний, называются *собственными функциями*; при этом независимой переменной служит геометрическая координата.

Встречаются и более сложные интегральные уравнения. Методы исследования и приближенного решения интегральных уравнений описаны во многих книгах; в принципе это те же методы, что и для дифференциальных уравнений.

9. Уравнения для функций нескольких аргументов. Если искомой является функция нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение становится *уравнением с частными производными*; такие уравнения традиционно называются также *уравнениями математической физики*. Они естественно появляются в задачах, связанных с механикой сплошной среды, теорией тепломассообмена, теорией электромагнитных полей и т. д., причем независимыми переменными чаще всего служат геометрические координаты и в случае эволюционных задач время. (По поводу математического описания физических полей см. Добавление, п. 6.)

Уравнения с частными производными, применяемые при решении технических задач, подразделяются на два класса: уравнения, описывающие стационарное состояние среды, и *эволюционные уравнения*, описывающие развитие процесса в ней. Среди уравнений первого класса наиболее широко известны уравнения Лапласа и Пуассона, имеющие для пространственных задач, соответственно, вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \quad (3.12)$$

Эти уравнения, а также их одномерные и двумерные варианты применяются при описании напряженного состояния однородных изотропных упругих тел, стационарных течений идеальной несжимаемой жидкости, стационарного распределения температуры, электрических и магнитных полей и т. д. При изучении прогиба плоской однородной пластинки применяются также уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = f(x, y). \quad (3.13)$$

Если рассматривается неоднородная среда либо неплоская пластинка, то уравнения остаются линейными, но коэффициенты при производных перестают быть постоянными. Встречаются и более сложные уравнения и системы уравнений с частными производными; в частности, при рассмотрении больших деформаций, течений сжимаемой среды и др. уравнения становятся нелинейными. При применении систем уравнений с частными производными надо, как и в п. 6, следить, чтобы число независимых уравнений равнялось числу искомых функций.

Для уравнений стационарного состояния добавочными обычно служат *краевые условия*, отражающие ситуацию на границе (∂D) области (D) , в которой строится решение. Так, для уравнений (3.12) наиболее часто на (∂D) задаются значения либо u , либо du/dn (производная по внешней нормали к (∂D)), либо линейная комбинация u и du/dn — это соответственно *краевые условия первого, второго и третьего родов*. Для уравнений (3.13) краевое условие состоит уже из двух равенств: например, в случае жесткой заделки на (∂D) задаются значения u и du/dn .

Среди эволюционных уравнений наиболее часто применяются *волновое уравнение* и уравнение теплопроводности,

имеющие для пространственных задач, соответственно, вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.14)$$

(a — постоянная, равная скорости распространения волн для рассматриваемого процесса) и (1.4). Для таких уравнений обычно ставится начальное условие, отражающее начальное состояние моделируемого процесса. Для уравнения (3.14) оно состоит в задании u и $\partial u / \partial t$ при некотором начальном значении $t = t_0$, для уравнения (1.4) задается только $\theta|_{t=t_0}$. Если для предпринятого исследования существенна ситуация на границе области, в которой происходит процесс, то задаются еще граничные условия, о которых говорилось в предыдущем абзаце; тогда говорят о *начально-краевой задаче*.

В последнее время довольно широко распространились нестационарные задачи в областях с изменяющейся границей, причем закон изменения границы заранее не задан, а определяется попутно с построением всего решения. Такие задачи возникают при исследовании нестационарных движений жидкости или сыпучей среды со свободной поверхностью, перехода среды из одной фазы в другую (это «задача Стéфана») и т. д. Для них на неизвестной границе задается еще одно добавочное условие типа равенства, которое вместе с остальными условиями и дает возможность найти границу. Встречаются и стационарные задачи с неизвестными границами.

Промежуточное положение между стационарными и эволюционными задачами занимают задачи на собственные значения (см., например, (2.9)).

Точное решение задачи для уравнения с частными производными в виде явной формулы, даже включающей интегралы или суммы бесконечных рядов, возможно лишь для уравнений и областей специального вида; этой возможностью не следует пренебрегать, так как при ее реализации решение иногда удается исследовать наиболее полно. Порой удается найти точные формулы для решений специального вида — например, стационарных (т. е. не зависящих от времени) для эволюционных задач, или не зависящих от пространственных координат, или автомодельных (п. 4 § 5), или типа бегущих или стоячих волн (п. 5 § 5) и т. п. Из таких формул обычно удается сделать полезные выводы.

В качестве простого примера рассмотрим задачу о разогрете однородного стержня с помощью постоянного (по вре-

мени и по пространству) теплопритока, если на концах $x = 0$ и $x = l$ стержня поддерживается постоянная температура θ_0 . Соответствующее дифференциальное уравнение (Д. 3) в одномерном варианте имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{c\rho} \beta. \quad (3.15)$$

Естественно ожидать, что для любого начального распределения температур поле температур θ при $t \rightarrow \infty$ устанавливается, переходит в некоторое предельное стационарное поле $\theta_\infty(x)$. Как его найти? Для этого надо считать, что в уравнении (3.15) θ не зависит от t . Тогда мы получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = -\frac{1}{c\rho a} \beta = -\frac{1}{\lambda} \beta, \quad \theta|_{x=0} = \theta|_{x=l} = \theta_0,$$

решение которой легко найти:

$$\theta = \theta_\infty(x) = \theta_0 + \frac{\beta}{2\lambda} x(l-x).$$

Это и есть предельное распределение температур. Мы видим, в частности, что оно не зависит от начального распределения.

Всё же чаще применяется приближенное построение решений, методы которого, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, можно подразделить на непрерывные и дискретные. Впрочем, ряд приближенных методов имеет и дискретные и непрерывные черты; к таким методам относится *метод прямых*, в котором производится дискретизация всех независимых переменных, кроме одной, в результате чего задача приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений; дискретные и непрерывные черты имеет также широко популярный сейчас метод конечных элементов, наиболее приспособленный к решению уравнений в областях сложной конфигурации (см. Добавление, п. 3).

Естественно, что трудность приближенного решения задачи значительно повышается с возрастанием ее *геометрической размерности*, под которой понимается число существенных геометрических координат, т. е. минимальное число таких (быть может, криволинейных) координат, с помощью которых выписываются все условия задачи и ее решение. (Например, осесимметричная задача в пространстве с координатами x, y, z , для которой ось x служит осью симметрии, является двумерной с существенными координатами z и $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.)

Если одномерные задачи сравнительно просты, а двумерные чаще всего поддаются решению на ЭВМ средней мощности, то для существенно трехмерных задач объем вычислений обычно бывает велик и требует применения мощных ЭВМ. Поэтому весьма желательно возможное понижение геометрической размерности задачи, т. е. переход от трехмерной задачи к двумерной или от двумерной — к одномерной, если это можно сделать без существенной потери адекватности. Иногда это удается сделать с помощью введения специальных систем координат, иногда — с помощью объявления параметром одной из координат, от которой зависимость решения сравнительно медленная, и т. п. Подобное понижение геометрической размерности применяется, в частности, в теории пограничных слоев.

Решение эволюционной задачи на ограниченном интервале времени, как и задачи Коши для уравнения (3.9), сводится к последовательной перестройке начального условия шагами во времени; для этого разработаны разнообразные эффективные методы. Решение стационарной задачи после дискретизации координат приводится к решению системы конечных уравнений, число которых равно числу узловых точек в области, где строится решение, т. е. обычно достаточно велико. (Кстати, подобные системы возникают и при решении эволюционных задач, если применяются неявные методы — см. п. б.) Существует большое число методов решения таких систем. Укажем на интересный класс методов: чтобы найти решение уравнения стационарного состояния, строится такое эволюционное уравнение, для которого заданное состояние получается в результате *установления*, т. е. при $t \rightarrow \infty$; построенное уравнение решается шагами по времени, пока решение практически не установится.

Отметим, что в последние годы активно решаются эволюционные задачи оптимального управления (п. 11), для которых условия ставятся не только в начальный, но и в конечный моменты времени. Для таких задач время как бы играет роль добавочной геометрической координаты, что соответственно повышает трудность их решения.

Численное решение уравнений с частными производными описано во многих книгах; в качестве вводного курса укажем на [10].

10. Задачи на экстремум с конечным числом степеней свободы. Как уже указывалось в п. 2, при математическом моделировании широко применяются задачи на экстремум.

Эти задачи можно условно подразделить на два класса: задачи с конечным числом степеней свободы, для которых искомыми являются точка экстремума и экстремальное значение функции конечного числа аргументов, и задачи на экстремум функционала, в которых искомой является функция. (Для задач второго класса обычно говорят о *целевом функционале*.) Мы будем рассматривать только задачи на минимум, так как задачи на максимум сводятся к ним переменной знака у целевой функции.

Отыскание минимума функции одного аргумента, т. е. решение задачи

$$f(x) \rightarrow \min, \quad a \leq x \leq b,$$

для функций f простого вида можно осуществить с помощью решения уравнения $f'(x) = 0$ и исследования знака f' . Для более сложных функций f бывает проще вычислять последовательные значения $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, ... с достаточно малым шагом h и сравнивать их друг с другом. Найдя точку минимума на выбранной сетке, можно для уточнения провести аналогичную процедуру на интервалах длины h , примыкающих к этой точке, но существенно уменьшив шаг, и т. д. Имеются способы, позволяющие ускорить этот процесс.

Минимизацию функции $n \geq 2$ аргументов поясним, взяв $n = 3$:

$$f(x, y, z) \rightarrow \min. \quad (3.16)$$

Наиболее ясен случай, когда функция f определена при всех значениях своих аргументов и непрерывна вместе со своими частными производными; тогда обычно применяется один из методов спуска. Так, *метод наискорейшего спуска* основан на том, что антиградиент функции f , т. е. вектор $-\text{grad } f$ с проекциями

$$-f'_x(x, y, z), -f'_y(x, y, z), -f'_z(x, y, z),$$

указывает направление наибоыстрейшего убывания этой функции в точке (x, y, z) . Отправляясь от некоторой начальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению антиградиента в ней и следя вдоль (прямой) линии движения за значением функции f , т. е. переходя к функции одного аргумента

$$f_0(t) = f(x_0 - k_0 f'_x(x_0, y_0, z_0) t, \quad y_0 - k_0 f'_y(x_0, y_0, z_0) t,$$

$$z_0 - k_0 f'_z(x_0, y_0, z_0) t),$$

мы можем найти точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, в которой функция f минимальна вдоль этой линии. Затем мы отправляемся от

точки M_1 по направлению антиградиента в ней, т. е. вновь переходим к функции одного аргумента

$$f_1(t) = f(x_1 - k_1 f'_x(x_1, y_1, z_1)t, \quad y_1 - k_1 f'_y(x_1, y_1, z_1)t, \\ z_1 - k_1 f'_z(x_1, y_1, z_1)t)$$

и т. д. (Множители k_i вводятся для того, чтобы при приближении к точке минимума движение не слишком замедлялось; например, можно положить $k_i = (|\text{grad } f|_{M_i})^{-1}$.)

Применяются и другие методы спуска: покоординатный спуск, спуск по случайным направлениям и др. Направление спуска может и непрерывно подправляться: так, в методе *градиентного спуска* мы задаемся малым шагом h и переходим от точки M_i к точке M_{i+1} по формулам

$$x_{i+1} = x_i - k_i f'_x(x_i, y_i, z_i)h \quad \text{и аналогично} \quad y_{i+1}, z_{i+1}.$$

Известны многочисленные варианты этих методов, приспособленные к решению различных классов задач.

Функция f может иметь несколько локальных минимумов, а данный метод приводит лишь к одному из них, быть может, не самому глубокому. Для поиска более глубокого минимума можно попробовать повторить процесс несколько раз, начиная с различных точек M_0 . Однако достаточно представительный выбор таких точек можно получить, только если число аргументов не слишком велико — скажем, порядка 10 или менее (чем меньше, тем лучше). Впрочем, выбор M_0 вблизи от искомой точки минимума позволяет увеличить число аргументов и существенно ускорить процедуру. Поэтому неформальные обсуждения и прикидки, позволяющие хотя бы грубо нащупать искомую точку, весьма желательны.

Если задача на минимум содержит параметр, то можно, найдя точку минимума при некотором начальном значении параметра, последовательно ее перестраивать, совершая шаги по параметру наподобие п. 5. Впрочем, при таком продолжении точка минимума может для некоторого критического значения параметра пропасть; кроме того, если рассматриваемый минимум был первоначально самым глубоким, то в процессе продолжения он может перестать быть таковым.

Не менее часто встречаются задачи на *условный экстремум*, в которых аргументы целевой функции связаны конечными уравнениями (*связями*), причем число независимых связей должно быть меньше числа аргументов. Так, в задаче (3.16) может быть одна или две таких связи; рассмотрим для

определенности случай одной связи

$$g(x, y, z) = 0, \quad (3.17)$$

так что полная задача имеет вид (3.16), (3.17). В ней остается $3 - 1 = 2$ степени свободы. Наиболее благоприятен случай, когда совокупность уравнений связи можно заменить эквивалентным параметрическим представлением аргументов. Для задачи (3.16), (3.17) это означает, что переменные x, y, z , удовлетворяющие уравнению (3.17), можно представить в виде

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Тогда рассматриваемая задача сведется к задаче на безусловный минимум

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \rightarrow \min,$$

к которой можно применить указанные выше методы.

Однако чаще такой переход осуществить не удастся и тогда приходится проводить спуск в пространстве аргументов вдоль поверхности (S), определенной уравнением (3.17) (в общем случае — вдоль многообразия, определенного совокупностью уравнений связи). Так, в градиентном методе мы, отправляясь от точки $M_0 \in (S)$, совершаем шаг по направлению $-(\text{grad } f)_{M_0}$, получаем точку $\bar{M}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, приближенно проецируя которую на (S) (для этого приходится приблизительно решить конечное уравнение

$$g(\bar{x}_1 + g'_x(x_0, y_0, z_0)t, \quad \bar{y}_1 + g'_y(x_0, y_0, z_0)t, \\ \bar{z}_1 + g'_z(x_0, y_0, z_0)t) = 0,$$

находим точку $M_1 \in (S)$. Далее проделываем ту же процедуру, отправляясь от точки M_1 , и т. д.

В последние годы в качестве математических моделей широко распространились задачи на *экстремум с ограничениями*, т. е. задачи, в которых аргументы целевой функции связаны конечными неравенствами (*высвобождающими связями*), число которых в отличие от уравнений связи может быть любым. Рассмотрим для определенности задачу (3.16), в которой аргументы связаны неравенствами

$$h_1(x, y, z) \leq 0, \quad h_2(x, y, z) \leq 0, \quad (3.18)$$

и обозначим (V) (трехмерную) область в пространстве x, y, z , определенную этими неравенствами. Пока оба они являются строгими, мы можем пользоваться градиентным методом в простейшем варианте. Но пусть после очередного

шага одно из неравенств (3.18), например первое, оказалось нарушенным. Это означает, что точка вышла за пределы (V) и потому ее нужно спроецировать на поверхность $h_1(x, y, z) = 0$ этой области. При дальнейших шагах, пока вектор $-\text{grad } f$ направлен из (V) (что распознается по знаку h_1), мы производим проецирование точек на эту поверхность, как при отыскании условного экстремума. Может оказаться, что через какое-то число шагов вектор $-\text{grad } f$ будет направлен внутрь (V) и тогда при дальнейшем спуске неравенства (3.18) становятся строгими, т. е. связь снимается (во всяком случае, до следующего выхода на границу). Но может получиться и так, что при спуске по поверхности $h_1 = 0$ мы приходим к точке, где и второе неравенство (3.18) нарушено. Тогда надо ее спроецировать на ребро $\{h_1 = 0, h_2 = 0\}$ и в дальнейшем в соответствии с направлением вектора $-\text{grad } f$ спускаться либо по этому ребру, либо по примыкающим к нему граням ($h_1 = 0$ и $h_2 = 0$). Для выбора того, по какому именно многообразию надо идти, здесь и в общем случае имеется алгоритм, определяемый так называемой теоремой Куна — Такера и содержащийся в курсах нелинейного программирования.

Аналогично решается задача на условный экстремум с ограничениями, в которой аргументы целевой функции связаны не только неравенствами, но и уравнениями. Отметим, что если область (V) , определенная всеми этими неравенствами и уравнениями, неограниченная (простирается в бесконечность), то задача на экстремум может и не иметь решения; обычно это свидетельствует о ее неправильной формулировке.

Некоторые классы задач на экстремум с ограничениями разработаны особенно далеко. Так, если целевая функция является линейной, равно как и все уравнения и неравенства, связывающие ее аргументы, то мы имеем задачу *линейного программирования*. Имеются стандартные программы для ЭВМ, позволяющие решать такие задачи, даже если целевая функция имеет несколько сотен аргументов. Известны также алгоритмы решения задач *линейного целочисленного программирования*, т. е. задач, для которых аргументы целевой функции по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения.

Если целевая функция и левые части высвобождающих связей, записанных по образцу (3.18), являются выпуклыми функциями, а все невысвобождающие связи линейные, то перед нами — задача *выпуклого программирования*. При этом функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *выпуклой*, если для

любых $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n)].$$

(Для функции одного аргумента это означает, что ее график выпуклый книзу; если же функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет непрерывные производные второго порядка, то ее выпуклость равносильна неотрицательности всех собственных значений «матрицы Гессе» $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n$.) Задачи выпуклого про-

граммирования обладают важным свойством: они не могут иметь более одного решения, и если решение есть, то метод спуска обязательно приводит к нему. Задача выпуклого программирования, для которой целевая функция квадратична, а высвобождающие связи линейны, называется задачей *квадратичного программирования*; для таких задач алгоритм решения особенно стандартизован.

Отметим, что задача на нахождение экстремального значения целевой функции несколько отличается от задачи на нахождение точки экстремума (т. е. значений аргументов, при которых экстремум достигается). В самом деле, пусть, как это чаще всего бывает, все участвующие функции имеют непрерывные частные производные. Тогда точка безусловного экстремума задачи без ограничений является *стационарной* для целевой функции f , т. е. в этой точке все производные первого порядка функции f равны нулю. Отсюда следует, что малая погрешность при определении точки экстремума влечет за собой погрешность второго порядка малости для экстремального значения функции f . Таким образом, если цель исследования состоит только в том, чтобы придать функции f по возможности меньшее значение, то для рассматриваемого класса задач не требуется слишком точно находить точку минимума, так как это практически не повлияет на значение функции. (См. пример в конце п. 8 § 5.)

То же относится к задаче на условный экстремум без ограничений, если только соблюдение уравнений связи обеспечено с достаточной точностью. (Что касается задач с ограничениями, то подобное «шатание» точки экстремума возможно только вдоль содержащей ее грани наименьшей размерности области (V) .)

В заключение укажем на один специфический класс задач с дискретным временем, для решения которых применяется так называемый *метод динамического программирования*, получивший в последние годы разнообразные применения. Пусть состояние некоторого объекта характеризуется величиной x (непрерывной или дискретной) и этот объект надо перевести из заданного состояния x_0 в момент t_0 в заданное состояние x_N в момент t_N , подобрав для этого промежуточные состояния x_1, x_2, \dots, x_{N-1} в моменты t_1, t_2, \dots, t_{N-1} . Пусть при этом известна стоимость $f_i(x, y)$ перевода объекта из состояния x в момент t_i в состояние y в момент t_{i+1} . Задача состоит в том, чтобы минимизировать общую сумму затрат:

$$f_0(x_0, x_1) + f_1(x_1, x_2) + \dots + f_{N-1}(x_{N-1}, x_N) \rightarrow \min.$$

В курсах динамического программирования приводятся алгоритмы решения этой и родственных ей задач, в частности аналогичной задачи с непрерывным временем.

Все описанные в этом пункте задачи могут включать те или иные случайные компоненты. Тогда значение целевой функции становится случайной величиной и цель задачи состоит в минимизации математического ожидания этой величины.

По поводу задач, упомянутых в этом пункте, см. [7, 20, 24, 26] и т. д.

11. Задачи на экстремум с искомой функцией. Одной из самых наглядных задач подобного рода является задача о кривой наибыстрейшего спуска, поставленная еще Галилеем: среди всех кривых, лежащих в плоскости x, y с вертикальной осью y и имеющих заданные концы $A(a, h)$ и $B(b, 0)$, где $a < b, h > 0$, найти такую, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, материальная точка, отправляясь из A без начальной скорости, достигнет B за минимально возможное время.

Для формулировки математической модели допустим, что некоторая кривая с концами A и B и с уравнением $y = y(x)$ задана; тогда можно проверить (попробуйте!), что время спуска по ней равно

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-y)}} dx,$$

где g — ускорение земного тяготения. Этот интеграл принимает определенное значение, если функция $y(x)$ задана. Подобного рода соотношение, когда каждой ф у н к ц и и

из некоторого класса отвечает определенное значение некоторой в е л и ч и н ы, называется *функционалом*.

Таким образом, для функционала те функции, на которых он определен, являются как бы значениями независимой переменной. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем в этом пункте, как это сейчас часто делают в математической литературе, различать обозначения y и $y(x)$, понимая под y (пишут также $y(\cdot)$) саму функцию как закон зависимости, а под $y(x)$ — значение этой функции при значении x аргумента. Тогда сформулированную задачу можно, обозначив функционал буквой f , записать в виде

$$f(y) := \int_a^b \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{2g[h-y(x)]}} dx \rightarrow \min$$

при заданных краевых условиях

$$y(a) = h, \quad y(b) = 0.$$

Эта задача принадлежит к следующему общему классу: найти функцию y , для которой

$$f(y) := \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \rightarrow \min \quad (3.19)$$

при заданных краевых условиях

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (3.20)$$

Такие задачи изучаются в курсах *вариационного исчисления*, где рассматриваются и разнообразные варианты: функционал f может включать и производные более высокого порядка функции y , функция y может принимать векторные значения (другими словами, искомыми будут не одна, а несколько функций) и зависеть от нескольких аргументов, краевые условия могут быть заданы не на всей границе или даже вовсе не заданы и т. д. Рассматриваются также задачи на условный экстремум — например, если в задаче (3.19), (3.20) заданы одно или несколько добавочных условий вида

$$g(y) := \int_a^b G(x, y(x), y'(x)) dx = 0.$$

Такая вариационная задача называется *изопериметрической*; название происходит от следующей знаменитой задачи: среди всех линий заданной длины на плоскости найти такую, которая ограничивает фигуру наибольшей площади.

Подобно задачам на экстремум с конечным числом степеней свободы задача (3.19), (3.20) более проста, если функция F определена для всех значений своих аргументов и имеет непрерывные производные. В этих предположениях функция y , на которой функционал принимает экстремальное значение, является стационарной точкой функционала f . (Это означает, что при малом варьировании функции y , т. е. при переходе к функции $y + \delta y$, где δy и $(\delta y)'$ малы, с сохранением условий (3.20) значение функционала f изменяется на величину высшего порядка малости.) А из условия стационарности легко выводится дифференциальное уравнение — так называемое *уравнение Эйлера*, — которому должна удовлетворять искомая функция y . Так, для функционала (3.19) уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y' - \frac{d}{dx} F_{y'}' = 0,$$

или, подробнее,

$$F_y'(x, y, y') - F_{y'y'}''(x, y, y') - F_{y'y'}''(x, y, y') y' - F_{y'y'y'}'''(x, y, y') y'' = 0.$$

Таким образом, вместе с (3.20) мы получаем краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. В некоторых довольно редких случаях эту задачу удается решить точно. Так, в задаче о кривой наибольшего спуска (см. начало этого пункта) оказывается, что решением служит дуга циклоиды с точкой возврата в A , проходящая через B . Но гораздо чаще точное решение найти не удается и краевую задачу решают приближенно тем или иным способом.

Однако еще чаще применяются *прямые методы*, с помощью которых приближенное решение задачи на экстремум функционала сводится без обращения к уравнению Эйлера к аналогичной задаче с конечным числом степеней свободы. Один из таких методов, предложенный еще Эйлером, состоит в следующем. Разобьем интервал $[a, b]$ на n равных частей длины $h = (b - a)/n$ и обозначим

$$x_i = a + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

После этого напишем приближенное выражение интеграла (3.19) с помощью одной из квадратурных формул, причем производные также заменим приближенным выражением через значения y_i . Например, применяя квадратурную

формулу прямоугольников, получим

$$f(y) \approx h \sum_{i=1}^n F \left(x_i - \frac{h}{2}, \frac{y_i + y_{i-1}}{2}, \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right);$$

при этом надо учесть, что значения y_0 и y_n заданы в силу условий (3.20). Таким образом, мы приходим к задаче на экстремум функции $n-1$ аргументов y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , которую можно приближенно решать одним из методов, упомянутых в п. 8. Аналогично решаются задачи на условный экстремум и экстремум с ограничениями для функционала (3.19) и функционалов более сложной структуры.

Другой распространенный прямой метод приближенного решения вариационных задач — *метод Рунца* — по классификации п. 6 принадлежит к числу непрерывных. Так, для задачи (3.19), (3.20) этот метод состоит в том, что приближенное решение строится в виде

$$y = \varphi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_n \psi_n. \quad (3.21)$$

Здесь функция φ_0 удовлетворяет условиям (3.20), «координатные функции» ψ_i — соответствующим однородным условиям $\psi_i(a) = \psi_i(b) = 0$, а α_i — искомые постоянные. Подстановка выражения (3.21) в интеграл (3.19) сводит исходную задачу к задаче на экстремум с конечным числом степеней свободы.

В последние годы весьма широко распространился еще один класс экстремальных задач с искомой функцией — *задачи оптимального управления*. Поясним их на простом примере. Пусть вдоль оси x движется материальная точка массы m под действием только силы инерции и внешней силы $F(t)$, которая находится в нашем распоряжении, но не может по модулю превышать заданное значение F_0 . Требуется так выбрать внешнюю силу, чтобы за кратчайшее время («задача о быстрейшем движении») точка пришла в начало координат $x = 0$ и там остановилась.

Математическая формулировка этой задачи имеет вид

$$mx''(t) = F(t), \quad |F(t)| \leq F_0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0, \quad x(T) = 0, \quad x'(T) = 0, \quad T \rightarrow \min.$$

Ее решение оказывается следующим: если при $t = 0$ имеет место неравенство $2F_0 x(t) + mx'(t) |x'(t)| > 0$ (< 0), то надо полагать $F(t) = -F_0$ (соответственно $F(t) = F_0$), пока оно не обратится в равенство; после этого переключить $F(t)$ на противоположное крайнее значение и ожидать прихода точки в начало координат, после чего отключить силу. Это

необходимо иметь в виду при построении его математической модели. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть в электрическую цепь в момент $t = t_0$ включается постоянное напряжение $U = U_0$. Тогда зависимость $U(t)$ обычно принимается такой, как показано на рис. 10,а, она имеет при $t = t_0$ скачок. Но если более детально проследить за ней, то окажется, что она имеет вид примерно такой, как показано на рис. 10,б, т. е. скачка не имеет. Надо ли учитывать это обстоятельство, т. е. законна ли идеализация $U(t)$ в виде скачка?

Ответ зависит от того, какие свойства изучаются, и от значений параметров задачи. В подавляющем большинстве

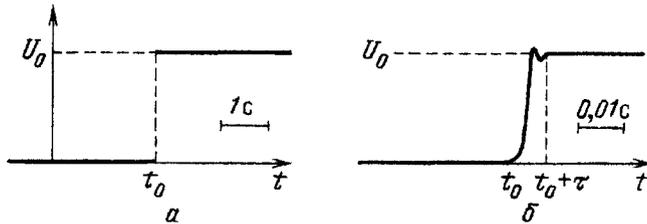


Рис. 10

вопросов характер и время нарастания напряжения несущественны, важно только, что длительность τ переходного процесса мала по сравнению с характерным временем T основного изучаемого процесса — например, периода колебаний, возникающих в контуре. (Кстати, каков смысл выражения «мала по сравнению с ...»? Обычно это означает переход к следующим порядкам величины, т. е. уменьшение по крайней мере в 10 раз. Более детальный разбор этого понятия содержится в п. 6 § 4.) Тогда можно упростить реальную быстро нарастающую зависимость, заменив ее идеализированной — разрывной.

Если же τ сравнимо с T , то такая замена может оказаться неадекватной и тогда надо так или иначе учесть нарастающий характер $U(t)$. Наконец, сама эта зависимость может оказаться предметом изучения. Тогда следует принять τ за характерное время и в дифференциальных уравнениях, определяющих $U(t)$, перейти к безразмерному времени $t_0 = t/\tau$.

В качестве другого примера рассмотрим определение (Д. 30) понятия плотности неоднородного тела в точке. В математических курсах считается, что область $(\Delta\Omega)$ бесконечно мала, т. е. в процессе ее изменения размеры этой

области становятся меньше любого заданного положительного значения. Но ясно, что реально область $(\Delta\Omega)$ не может уменьшаться безгранично, ее размеры должны быть существенно больше межмолекулярных расстояний. Как же понимать формулу (Д. 30)?

Если речь идет о реальном неоднородном теле, то в формуле (Д. 30) под $(\Delta\Omega)$ надо понимать не математически, а физически (говорят также — практически) бесконечно малую область, т. е. переменную или даже постоянную область, размеры которой должны быть не слишком большими, но и не слишком малыми. Смысл этого требования зависит от свойств изучаемого тела и от постановки задачи. Так, если рассматривается плотность газа, жидкости или аморфного твердого тела, то эти размеры l должны быть велики по сравнению с межмолекулярными размерами λ , но малы по сравнению с характерным макроразмерами L , на протяжении которых интересующая нас плотность может заметно измениться. (Можно принять l порядка $\sqrt{\lambda L}$.) Если перед нами дисперсная структура типа грунта, то l должно быть велико и по сравнению с микрооднородностями среды и т. п. Когда говорят о *элементах* объема и массы (см. Добавление, п. 6), соответственно $d\Omega$ и $dm = \rho d\Omega$, то обычно имеют в виду объем и массу физически бесконечно малой области.

Формулу (Д. 30) можно понимать и в традиционном математическом смысле, если от реального тела предварительно перейти с помощью осреднения (п. 2 § 2) к его непрерывной математической модели — сплошной среде; при этом осреднение надо производить по областям $(\Delta\Omega)$ указанных выше размеров. Этот переход называют *размыванием* или *континуализацией* *).

Рассмотрим еще математическое понятие устойчивости по Ляпунову равновесного состояния некоторой системы (S) . Содержание этого понятия состоит в том, что при бесконечно малых возмущениях координат и скоростей системы (S) в некоторый начальный момент времени эти возмущения останутся бесконечно малыми на протяжении всего дальнейшего бесконечного интервала времени (тогда исходное невозмущенное состояние называется устойчивым) либо могут принять конечные значения (тогда оно неустойчиво). Но как такое понятие можно применять к реальным системам, для которых, казалось бы, рассматриваемые возмущения и интервал времени всегда конечны?

*) От латинского слова «континуум» — непрерывное.

Ответ на этот вопрос, как и на предыдущий, состоит в отличии математической бесконечности от физической. Математическому бесконечному интервалу времени реально соответствует время перехода из заданного равновесного состояния к другому или к некоторому незатухающему режиму движения, а бесконечно малым начальным возмущениям отвечают любые малые непредвиденные возмущения, которые могут реально появиться в рассматриваемых условиях. В зависимости от этих условий одни и те же возмущения при переходе к математической модели могут квалифицироваться как конечные или как бесконечно малые, а потому одна и та же система — как устойчивая или как неустойчивая. В яркой книге В. И. Феодосьева [30] приведен эффектный пример по этому поводу: сооружение из трех поставленных друг на друга табуреток можно считать устойчивым, если сверху ставится модель в классе для рисования, но должно рассматриваться как неустойчивое, если при его помощи собираются сменить в люстре перегоревшую лампочку.

Сказанное сейчас можно описать также следующим образом. Рассмотрим положение равновесия $q = 0$ для системы (S) с одной степенью свободы (q — обобщенная координата) и потенциалом, показанным на рис. 11 сплошной линией. Тогда, если характерная амплитуда α энергии не-

предвиденных внешних воздействий значительно меньше «потенциального барьера» ΔU , т. е. $\alpha \ll \Delta U$, то этими воздействиями при исследовании устойчивости (S) можно пренебречь и пользоваться в математической модели заданной зависимостью $U(q)$. Если же α имеет порядок ΔU или даже $\alpha \gg \Delta U$, то «практически бесконечно малые» возмущения существенно возрастут и модель станет

качественно неадекватной. Тогда в модели зависимость $U(q)$ надо заменить примерно так, как показано на рис. 11 штриховой линией. (Новую зависимость можно получить из старой с помощью осреднения по интервалам, радиус которых отвечает изменению потенциальной энергии на α .) После этого перехода положение равновесия $q = 0$ системы адекватно распознается как неустойчивое. Таким образом, масштаб непредвиденных возмущений может качественно повлиять на свойства математической модели.

Разницу между математической и практической бесконечностями продемонстрируем еще на следующем эффектном примере хорошо известного в теории вероятностей парадокса «петербургской игры». Пусть игроки А и Б подбрасывают правильную монету до первого выпадения герба, причем Б подписал обязательство выплатить А 2^{N-1} коп., если это выпадение произошло при N -м бросании. Сколько А должен предварительно заплатить Б, чтобы игру можно было считать справедливой? Согласно обычным правилам эта плата совпадает с математическим ожиданием выигрыша А, которое, казалось бы, равно

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots \right) \text{ коп.}$$

Но сумма ряда, стоящего в скобках, равна бесконечности, т. е. получается, что сколько бы ни внес А предварительно, игра — в его пользу. Однако здравый смысл показывает, что это не так. В чем же дело?

Разгадка этого парадокса в том, что реальное проведение такой игры, на которое ориентируется здравый смысл, принципиально отличается от приведенной математической модели, которая, таким образом, качественно неадекватна. В самом деле, эта модель предполагает, что Б в состоянии выплатить как угодно большую сумму, если N окажется достаточно большим. Но ясно, что если, например, Б должен выплатить 10^9 руб., он этого заведомо не сделает, каким бы добросовестным он ни был: 10^9 руб. в данном случае есть практическая бесконечность. Это заставляет пересмотреть модель реальной игры. Допустим, что Б может выплатить никак не более 10^5 руб. = 10^7 коп. (результат не очень зависит от этого конкретного значения, если оно реально). Тогда, так как $2^{23} < 10^7 < 2^{24}$, математическое ожидание выигрыша при указанном ограничении оказывается равным

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots + \frac{1}{2^{24}} \cdot 2^{23} + \\ & + \frac{1}{2^{25}} \cdot 10^7 + \frac{1}{2^{27}} \cdot 10^7 + \dots = 24 \cdot \frac{1}{2} + \frac{10^7}{2^{24}} = 12,6 \text{ коп.} \end{aligned}$$

Значит, даже предварительная выплата 13 коп. несправедлива по отношению к А. Вот к чему привели неадекватность модели, основанная на подмене практической бесконечности математической бесконечностью!

§ 4. УПРОЩЕНИЯ И УТОЧНЕНИЯ

1. Рабочие гипотезы. Часто бывает, что после построения сложной математической модели ее оказывается возможным так или иначе упростить, другими словами, перейти к новой, более простой (и обычно более грубой, т. е. менее адекватной) модели. Эта упрощенная модель может оказаться достаточной для целей исследования; если же это не так, то результат ее рассмотрения можно применить для изучения более сложной модели. Бывает и так, что мы сразу строим грубую модель, имея в виду, что она в дальнейшем будет уточняться. В связи с этим отметим, что, прикладное математическое исследование часто имеет характер последовательных приближений, при которых предыдущее приближение к удовлетворяющему нас результату применяется для построения последующего, более точного.

Одним из методов существенного упрощения модели является выдвижение *рабочих гипотез*, относящихся к ожидаемым свойствам решения задачи и выдвигаемых в процессе ее исследования. Такие гипотезы могут относиться, например, к структуре искомой зависимости (см. примеры ниже), и если они опираются на реальное истолкование математической задачи, разумные аналогии и другие рациональные доводы, опыт и здравый смысл, то могут оказаться решающими. С другой стороны, эти гипотезы могут порой открыть возможность для необоснованных выводов. Поэтому применение рабочих гипотез должно отчетливо осознаваться, а на мотивировку их включения и последующее обоснование надо обращать серьезное внимание.

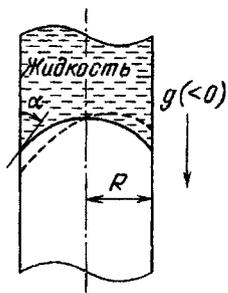


Рис. 12

Рассмотрим пример. Пусть исследуется равновесие столба жидкости, «подвешенного» силами поверхностного натяжения в вертикальной трубке с круговым сечением (рис. 12). Построение формы свободной равновесной поверхности сводится к двумерной краевой задаче для линейного уравнения с частными производными. Но на основании элементарных наблюдений представляется естественным ввести рабочую гипотезу о том, что решение должно быть осесимметричным. При включении этой гипотезы в модель задача становится одномерной и приводится к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, что несравненно проще. Здесь имеется два критерия подобия — число Бонда

$Bo = g\rho R^2/\sigma$ (ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, g, R показаны на рис. 12) и угол смачивания α . Можно построить решение задачи и проверить его устойчивость для любых достаточно малых значений $|Bo|$, и форма этого решения близка к экспериментально наблюдаемой, что служит апостериорным *) оправданием принятой рабочей гипотезы.

Однако полученное решение существует при значительно больших значениях $|Bo|$, чем это реально наблюдается. Это объясняется тем, что, начиная с некоторого критического значения $Bo_{кр} < 0$, зависящего от α , решение становится неустойчивым относительно неосесимметричных возмущений! Таким образом, бесконтрольное применение рабочей гипотезы приводит в задаче об отыскании $Bo_{кр}$ к прямой ошибке. Этой ошибки можно избежать, если подумать о реальном характере потери устойчивости столба жидкости, например, при уменьшении σ с помощью разогрева (как показано штриховой линией на рис. 12) либо на основании аналогий. В самом деле, известен целый ряд задач, в которых условия вместе с соответствующей формой равновесия обладают определенной симметрией, но для которых наиболее опасные формы потери устойчивости этой симметрией не обладают.

Широко применяются рабочие гипотезы в прикладной теории колебаний — гипотезы о форме движения, о ее разложимости в ряды того или иного вида, о частоте искомого колебания и т. д. — и во многих других областях приложения математики.

2. Упрощение уравнений. Имеется много способов упрощения математических моделей. Можно упрощать геометрические формы, заменять заданные зависимости между величинами на более простые и т. д. Мы здесь остановимся на упрощении уравнений, составляющих математическую модель. Основные способы упрощения таких уравнений состоят в переходе к безразмерным величинам, в отбрасывании малых членов, в замене заданных функций на постоянные значения и т. п.

Приведем пример. Рассмотрим вынужденные гармонические колебания линейного осциллятора, которые для простоты будем записывать в комплексной форме:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = Ae^{i\omega t}, \quad (4.1)$$

*) От латинских слов «а постериори» — из последующего.

где m, f, k те же, что в уравнениях (1.1) и (1.3), а A, ω — амплитуда и частота вынуждающей силы. Решение будем искать в виде

$$x = Be^{i\omega t}. \quad (4.2)$$

Комплексная амплитуда B колебаний зависит от всех пяти параметров m, f, k, A, ω , что делает, казалось бы, невозможным сколько-нибудь полное представление этой зависимости в табличном или графическом виде. Но в действительности положение не столь печальное. Сделаем в (4.1) и (4.2) замену переменных

$$x = x_x x', \quad t = t_x t',$$

где x_x, t_x — некоторые характерные значения координаты и времени, которые мы уточним позже, а x', t' — соответствующие безразмерные переменные. Мы получим

$$\frac{mx_x}{t_x^2} \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{fx_x}{t_x} \frac{dx'}{dt'} + kx_x x' = Ae^{i\omega' t'}, \quad (4.3)$$

$$x' = B' e^{i\omega' t'}, \quad \omega' := \omega t_x, \quad B' := B/x_x.$$

Разделив уравнение (4.3) на коэффициент при старшей производной, получаем безразмерный вариант уравнения (4.1):

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + \left(\frac{ft_x}{m}\right) \frac{dx'}{dt'} + \left(\frac{kt_x^2}{m}\right) x' = \left(\frac{At_x^2}{mx_x}\right) e^{i\omega' t'}. \quad (4.4)$$

Он включает четыре безразмерных параметра (три, взятых в скобки, а также ω'); однако путем выбора x_x, t_x их число можно уменьшить на два. Это можно сделать различными способами в соответствии с условиями задачи и целями исследования.

Пусть нас интересует в основном зависимость амплитуды вынужденных колебаний от трения и частоты возбуждения, причем силы инерции и упругости считаем примерно одного порядка. Тогда естественно положить в уравнении (4.4) безразмерные коэффициент упругости kt_x^2/m и амплитуду внешнего воздействия At_x^2/mx_x равными единице, откуда получаем

$$t_x = \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad x_x = \frac{A}{k}.$$

Таким образом, мы связываем здесь характерное время с периодом свободных колебаний при отсутствии трения (см. формулу (1.2)), тогда как характерное значение ко-

ординаты просто равно ее статическому значению, если внешняя сила постоянна. Выбор таких единиц масштаба определила постановка задачи.

После указанной замены уравнение (4.4) принимает вид

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + f' \frac{dx'}{dt'} + x' = e^{i\omega' t'} \quad (4.5)$$

и содержит всего два безразмерных параметра $f' = f/\sqrt{mk}$ и $\omega' = \omega\sqrt{m/k}$. Зависимость безразмерной амплитуды $|B'|$ колебаний от безразмерной частоты ω' («амплитудно-частотную характеристику») при различных значениях безразмерного коэффициента трения f' нетрудно представить графически. Зная зависимость $|B'| = F(\omega', f')$, мы получаем и соотношение между размерными величинами

$$|B| = \frac{A}{k} F\left(\sqrt{\frac{m}{k}} \omega, \frac{f}{\sqrt{mk}}\right).$$

Проведенное преобразование дает, в частности, ответ на вопрос, при каком условии в рассматриваемой задаче можно считать трение малым и упростить уравнение (4.1), отбросив средний член в левой части. Ответ « f должно быть мало», хотя и правильный, требует уточнения, так как малость размерной величины имеет смысл только в сравнении с другой величиной той же размерности. Из уравнения (4.5) мы получаем более точный ответ: должно быть мало f' или, что то же, должно быть $f \ll \sqrt{mk}$. Что это конкретно означает, зависит от допустимого расхождения между приближенным и точным значениями амплитуды колебаний и выясняется из сравнения амплитудно-частотных характеристик для данного f' и для $f' = 0$. Так, при $f' < 0,1$ (т. е. при $f < 0,1\sqrt{mk}$) указанное расхождение имеет порядок процентов.

Аналогичным образом рассматриваются и более сложные задачи. При этом может получиться, что на различных этапах развития изучаемого процесса или при рассмотрении различных участков изучаемой среды характерные значения величин следует выбирать по-разному и уравнения упрощать тоже по-разному (см. пример ниже). Поэтому если известны численные значения параметров системы, то после приведения уравнений к безразмерному виду следует проводить прикидку численных значений отдельных членов, чтобы выяснить, нельзя ли какие-либо из них выбросить. В частности, если речь идет о численных расчетах, то заведомо можно отбрасывать все слагаемые, существенно меньшие по модулю реальных погрешностей в других слагаемых.

Таким образом, выбор характерных значений величин допускает варианты. Например, если бы для модели (4.1) нас интересовало влияние коэффициента жесткости k на амплитуду колебаний, то можно было бы выбрать t_x и x_x так, чтобы сделать безразмерные частоту и амплитуду внешнего воздействия равными единице (проделайте это и разберите смысл полученных характерных значений).

Рассмотрим еще один случай, который сначала кажется парадоксальным. Пусть нас интересуют колебания, описываемые уравнением (4.1), при заданных начальных условиях

$$\ddot{x} = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{при } t = 0, \quad (4.6)$$

если масса m осциллятора пренебрежимо мала, точнее, $m \ll f_2/k$. Может показаться, что тогда надо просто выбросить первый член в уравнении (4.1), т. е. перейти к уравнению

$$f \frac{dx}{dt} + kx = A e^{i\omega t}. \quad (4.7)$$

Но ведь произвольно заданные условия (4.6) могут и не удовлетворить уравнению (4.7) при $t = 0$!

Объяснение этого кажущегося парадокса в следующем. Если уравнение (4.7) при $t = 0$ противоречит условиям (4.6), то это означает, что сила инерции в этот момент отлична от нуля, т. е. на первом, так называемом *релаксационном* *) этапе движения пренебрегать первым членом в уравнении (4.1) нельзя. На этом этапе из-за малости m ускорение весьма велико и потому скорость быстро становится равной значению $\tilde{v}_0 = (A - kx_0)/f$, удовлетворяющему уравнению (4.7). После этого на следующем этапе закон движения получается из дифференциального уравнения (4.7) при единственном начальном условии $x|_{t=0} = x_0$.

Рассмотрим первый этап подробнее. Так как характерное время t_x для него мало, то в соответствии с уравнением (4.4) естественно принять $ft_x/m = 1$, т. е. $t_x = m/f$. Кроме того, перенесем член с x' в правую часть; мы получим

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{dx'}{dt'} = \frac{m}{f^2} \left(\frac{A}{x_x} e^{i\omega t'} - kx' \right).$$

Но так как

$$\omega' = \frac{\omega m}{f}, \quad x'(t') = \frac{1}{x_x} x(t) = \frac{1}{x_x} x \left(\frac{m}{f} t' \right),$$

то при малом m и конечных значениях прочих величин (в частности, промежутка изменения t') выражение, стоящее в скобках, почти постоянно и мы заменяем его на значение этого выражения при $t' = 0$ — как говорят, *замораживаем* правую часть. Это приводит к задаче с начальными условиями (задаче Коши)

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{dx'}{dt'} = \frac{m}{f^2 x_x} (A - kx_0),$$

$$x'|_{t'=0} = \frac{x_0}{x_x}, \quad \frac{dx'}{dt'} \Big|_{t'=0} = \frac{t_x}{x_x} v_0 = \frac{m}{fx_x} v_0,$$

причем значение x_x можно и не уточнять. Решение этой задачи имеет вид

$$x' = \frac{x_0}{x_x} + \frac{m}{fx_x} v_0 (1 - e^{-t'}) + \frac{m}{f^2 x_x} (A - kx_0) (e^{-t'} - 1 + t').$$

Возвращаясь к размерным величинам, а затем проводя дифференцирование два раза, получаем приближенные формулы для рассматриваемого этапа:

$$x = x_0 + \frac{1}{f} (A - kx_0) t + \frac{m}{f^2} (v_0 f + kx_0 - A) (1 - e^{-(f/m)t}),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{f} (A - kx_0) + \frac{1}{f} (v_0 f + kx_0 - A) e^{-(f/m)t},$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = (A - v_0 f - kx_0) e^{-(f/m)t}.$$

Видно, что релаксация происходит по показательному закону с показателем, обратно пропорциональным значению m .

Конечно, тот же результат нетрудно вывести из точного решения уравнения (4.1) при начальных условиях (4.6), но мы хотели здесь продемонстрировать общий метод исследования кратковременного переходного процесса, пригодный и в более сложных задачах (см. п. 4).

По прошествии релаксационного этапа мы можем положить $m = 0$ и перейти к уравнению (4.7), отбросив второе начальное условие (4.6). Мы видим, что на втором этапе решение после переходного процесса, происходящего с «нормальной» скоростью, выходит на гармонические колебания. Чтобы определить характерное время этого второго переход-

*) От латинского слова «релаксацио» — ослабление.

ного процесса, заметим, что при $m = 0$ уравнение (4.3) приводится к виду

$$\frac{dx'}{dt'} + \frac{kt_x}{f} x' = \frac{At_x}{fx_x} e^{u't'}$$

Поэтому естественно положить $kt_x/f = 1$, откуда получаем характерное время $t_x = f/k$. Примерный график вещественной части получающегося решения с двумя переходными процессами показан на рис. 13, причем мы для наглядности изобразили зависимость скорости $v = dx/dt$ от времени. (Изобразите примерный вид зависимости $x(t)$.)

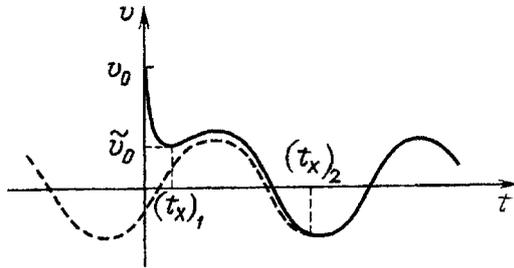


Рис. 13

Другой пример уравнения с различными способами упрощения на различных интервалах получается при рассмотрении реакции всё того же осциллятора на произвольное медленно меняющееся внешнее воздействие. Такое уравнение можно записать в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = F(\epsilon t), \quad (4.8)$$

где $\epsilon \ll 1$ — малый безразмерный положительный параметр, показывающий порядок скорости изменения внешнего воздействия. Произведение ϵt называется *медленным временем*, это как бы время, в котором «живет» внешнее воздействие. Для уравнения (4.8) ставятся обычные начальные условия (4.6).

На любом конечном фиксированном интервале времени для достаточно малого ϵ имеем $F(\epsilon t) \approx F(0)$, т. е. внешнее воздействие остается почти постоянным. Заменяя $F(\epsilon t)$ на $F(0)$, мы в соответствии с уравнением (4.8) видим, что на первом этапе процесса с характерным временем m/f в системе происходят затухающие колебания к положению с координатой $x = F(0)/k$, т. е. к положению, для которого в

момент $t = 0$ внешняя сила уравновешивается силой упругости. Затем наступает второй этап, когда решение меняется медленно и потому силы инерции и трения существенно меньше сил упругости; другими словами, процесс становится квазистатическим. На этом этапе при приближенном решении уравнения (4.8) мы можем в левой части отбросить два первых слагаемых, что приводит к простой приближенной формуле: $x = F(\epsilon t)/k$. Она подтверждает естественную рабочую гипотезу о медленном изменении решения; дифференцирование этой формулы показывает, что dx/dt имеет порядок ϵ , а d^2x/dt^2 — даже ϵ^2 , что также говорит о приемлемости примененной процедуры.

На последнем примере мы продемонстрируем явление, ставшее в последние годы особенно актуальным в связи с изучением нелинейных моделей. Рассмотрим задачу Коши в безразмерных переменных

$$dx/dt = \alpha x + \epsilon x^2, \quad x|_{t=0} = 1,$$

где $0 < \epsilon \ll \alpha \ll 1$. Пока x невелико, вторым членом в правой части уравнения можно пренебречь, и мы получаем приближенное выражение для решения: $x \approx e^{\alpha t}$. Могло бы показаться, что из-за малости ϵ второй член вносит в это решение только небольшую поправку. Но так происходит лишь на некотором этапе, пока $\epsilon e^{\alpha t} \ll \alpha$. Когда же x достаточно увеличится, второй член станет преобладающим. В данном примере легко написать точное решение (получите его!):

$$x = \alpha e^{\alpha t} / (\alpha + \epsilon - \epsilon e^{\alpha t}).$$

Мы видим, что при $t \rightarrow t^* := \alpha^{-1} \ln[(\alpha + \epsilon)/\epsilon]$ решение уходит в бесконечность; это явление называется *обострением* решения. Таким образом, экстраполяция решения по экспоненте в данном примере привела бы к грубой ошибке: у режима с обострением медленное экспоненциальное изменение величин (в других примерах — квазистационарный процесс) сменяется «взрывом» — катастрофическим нарастанием. Вблизи критического момента t^* асимптотическое выражение для решения уже совсем иное: если $\tau := t^* - t$, $0 < \tau \leq 1$, то

$$x = \frac{\alpha e^{\alpha t^*} e^{-\alpha \tau}}{\alpha + \epsilon - \epsilon e^{\alpha t^*} e^{-\alpha \tau}} = \frac{\alpha}{\epsilon (e^{\alpha \tau} - 1)} \sim \frac{1}{\epsilon \tau}.$$

Поскольку упрощение моделей часто включает осреднение участвующих переменных величин, скажем еще не-

сколько общих слов по этому поводу. Надо иметь в виду, что осреднение какой-либо величины x всегда производится по отношению к некоторой переменной величине u , функцией которой x является. (Осреднение возможно и для функции более одного аргумента.) Эта другая величина, по отношению к которой производится осреднение, должна быть указана явно или подразумеваться, так что не существует «осреднения вообще». Если та же величина x осредняется по отношению к какой-либо другой величине z , то среднее значение x , вообще говоря, изменится. Невнимание к этому может породить недоразумения и прямые ошибки.

Приведем простой пример. Пусть поезд половину пути ехал со скоростью 10 км/ч, а вторую половину — со скоростью 70 км/ч; какова его средняя скорость? Если осреднять скорость по (по отношению к) пути, то получится ответ: 40 км/ч. Но такой ответ на поставленный вопрос неверен: когда говорят о средней скорости \bar{v} движения, подразумевается, что осреднение производится по времени. А так как интеграл от скорости по времени есть путь, то \bar{v} равно отношению пройденного пути L к полному времени движения, т. е.

$$\bar{v} = L : \left(\frac{L/2}{10} + \frac{L/2}{70} \right) = 17,5 \text{ км/ч.}$$

Аналогичные недоразумения могут возникнуть при подсчете математического ожидания случайной величины, если нет ясного представления о том, как распределены вероятности в так называемом пространстве элементарных событий — грубо говоря, о том, какие события являются равновероятными.

3. Метод малого параметра. Этот метод, называемый также *методом возмущений*, широко применяется в прикладной математике, в частности, для уточнения решения, полученного из упрощенной модели, а также для выяснения погрешности этого решения; различным вариантам этого метода посвящена обширная литература (см., в частности, [14], [22]). Удачный выбор формы для невозмущенного и возмущенного решений позволяет во многих случаях даже с помощью первого приближения получить решение с удовлетворительной точностью при сравнительно небольшой затрате труда.

Задачи, при решении которых применяется метод малого параметра, бывают двух типов. В задачах первого типа малый параметр входит в саму их постановку и цель исследования состоит в выяснении влияния этого параметра на решение; метод приводит к асимптотическим формулам, из которых видно это влияние.

Приведем пример. Пусть рассматривается система из двух тел одинаковой массы, связанных между собой и со стенками пружинами одинаковой жесткости (рис. 14), и нас интересует влияние малого трения, действующего только на одно из этих тел, на характер свободных колебаний системы. Отсчитывая координаты тел от их положений равновесия, приходим к системе дифференциальных уравнений (проверьте!)

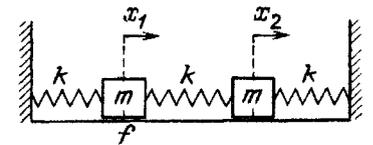


Рис. 14

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + f \frac{dx_1}{dt} + 2kx_1 - kx_2 = 0, \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2kx_2 - kx_1 = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(mp^2 + fp + 2k)(mp^2 + 2k) - k^2 = 0, \quad (4.9)$$

и нас интересует влияние коэффициента трения f на его решение.

Для более грубой модели, если трением пренебречь, задачу легко решить точно:

$$p_{1,2} = \pm \omega_1 i, \quad p_{3,4} = \pm \omega_2 i, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{3 \frac{k}{m}}.$$

Первой паре решений отвечает движение тел в одинаковой фазе, а второй — в противофазе.

Теперь рассмотрим более точную модель (4.9) с помощью метода малого параметра в простейшем варианте, а именно строя решение в виде суммы ряда по степеням малого параметра f :

$$p = a + bf + cf^2 + \dots \quad (4.10)$$

Так как $p = a$ получается при $f = 0$, то $a = \pm \omega i$, где $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$; это нулевое приближение. Отсюда

$$p^2 = -\omega^2 \pm 2\omega b i f + (b^2 \pm 2\omega c i) f^2 + \dots \quad (4.11)$$

Подставляя выражения (4.10) и (4.11) в (4.9) и раскрывая скобки, получаем после группировки членов с одинаковыми степенями f

$$\pm (4mb + 1) \omega i (-m\omega^2 + 2k) f + \{ [2m(b^2 \pm 2\omega c i) + b] \times \\ \times (-m\omega^2 + 2k) - 2m\omega^2 b (2mb + 1) \} f^2 + \dots = 0. \quad (4.12)$$

Но если сумма степенного ряда равна нулю, то и все его коэффициенты равны нулю. Приравнивая нулю коэффи-

циент при f , находим $b = -1/4m$, т. е. первое приближение имеет вид

$$p = \pm \omega t - \frac{f}{4m}. \quad (4.13)$$

Мы видим, что в первом приближении малое трение, не влияя на частоту колебаний, порождает их экспоненциальное затухание.

Найдем теперь следующую поправку. Для этого приравняем нулю коэффициент при f^2 в (4.12), подставив в него найденное значение b . После простых преобразований получаем

$$c = \pm \frac{3m\omega^2 - 2k}{32m^2\omega(-m\omega^2 + 2k)} i.$$

Подставляя $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, находим соответствующие значения c , откуда получаем второе приближение для корней характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{f}{4m} \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{f^2}{32km}\right) i, \quad p_{3,4} = -\frac{f}{4m} \pm \pm \sqrt{\frac{3k}{m}} \left(1 - \frac{7f^2}{96km}\right). \quad (4.14)$$

Таким образом, мы получаем поправку и к частотам колебаний, правда, второго порядка малости. При желании разложения (4.10) можно продолжить.

Тот же результат можно получить, применяя формулу Тейлора

$$p(f) = (p)_0 + \frac{1}{1!} (p')_0 f + \frac{1}{2!} (p'')_0 f^2 + \dots,$$

где штрихами обозначены производные по f , а индекс нуль означает подстановку значения $f = 0$. В силу нулевого приближения имеем $(p)_0 = \pm \omega i$. Взяв производную от обеих частей (4.9) по f , получаем

$$(2mp p' + p + fp') (mp^2 + 2k) + (mp^2 + fp + 2k) 2mp p' = 0; \quad (4.15)$$

подставив значение $f = 0$, приходим к равенству

$$[2m(p)_0(p')_0 + (p)_0] [m(p)_0^2 + 2k] + [m(p)_0^2 + 2k] 2m(p)_0(p')_0 = 0,$$

откуда после сокращений находим $(p')_0 = -1/4m$. Аналогично, взяв производную обеих частей (4.15) по f и подставив $f = 0$, находим $(p'')_0$ и т. д. (Проделайте это!)

Задачи второго типа, в которых применяется метод малого параметра, в своей постановке такого параметра не содержат и его приходится ввести, чтобы можно было применить данный метод. Для этого надо сначала «организовать» нулевое приближение, т. е. постараться так видоизменить задачу, по возможности мало, чтобы ее решение можно было найти легко или сравнительно легко. После этого в видоизмененную задачу так ввести параметр, например α , чтобы при $\alpha = 0$ получилась видоизмененная задача, а при некотором значении $\alpha = \alpha_0$ — исходная. Затем надо решение задачи, включающей α , разложить по степеням этого параметра, после чего в полученном решении положить $\alpha = \alpha_0$. Если эту программу удастся осуществить, то при благоприятном стечении обстоятельств мы получаем в итоге решение исходной задачи.

Приведем пример. Пусть надо решить уравнение

$$x^4 - 12x^3 + 10x - 1 = 0, \quad (4.16)$$

коэффициенты которого считаются точными. Продемонстрируем схему применения метода малого параметра (хотя стандартный метод Ньютона в этом конкретном случае эффективнее). Для этого заметим, что при x , близких к нулю, первые два члена сравнительно малы и потому для таких x в качестве уравнения для нулевого приближения можно взять

$$10x - 1 = 0$$

с очевидным решением $x_0 = 0,1$. Тогда возмущенное уравнение можно записать в виде

$$\alpha(x^4 - 12x^3) + 10x - 1 = 0, \quad (4.17)$$

из которого уравнение (4.16) получается при $\alpha = 1$. (Отметим, что малость параметра относительна и то, что значение $\alpha = 1$ считается малым, не должно вызывать недоумения: например, вместо α можно было бы написать 10β , тогда β менялось бы до 0,1. Истинным критерием малости параметра является практическая сходимости разложения, полученного в результате применения метода.)

Уравнение (4.17) определяет зависимость $x(\alpha)$ как неявную функцию. Имея в виду применение формулы Тейлора, проведем при $x = x(\alpha)$ дифференцирование обеих частей уравнения по α , обозначая производные штрихами:

$$x^4 - 12x^3 + \alpha(4x^3 - 36x^2)x' + 10x' = 0,$$

$$2(4x^3 - 36x^2)x' + \alpha(12x^2 - 72x)x'^2 +$$

$$+ \alpha(4x^3 - 36x^2)x'' + 10x'' = 0.$$

При $\alpha = 0$, $x = x_0 = 0,1$ получаем $x'_0 = 1,19 \cdot 10^{-3}$, $x''_0 = 8,4728 \cdot 10^{-5}$. Отсюда по формуле Тейлора

$$x(\alpha) = 0,1 + 1,19 \cdot 10^{-3} \alpha + 4,2364 \cdot 10^{-5} \alpha^2 + \dots$$

При $\alpha = 1$ получаем разложение искомого решения

$$x = x_1 = 0,1 + 1,19 \cdot 10^{-3} + 4,2364 \cdot 10^{-5} + \dots \quad (4.18)$$

Хорошая практическая сходимость полученного разложения (что распознается по его первым членам) подтверждает возможность считать значение $\alpha = 1$ малым, и мы получаем, таким образом, значение корня $x_1 = 0,101232$. При желании можно продолжить разложение (4.18) и этим уточнить значение x_1 .

При больших x в уравнении (4.16) сравнительно малыми оказываются два последних члена, поэтому за невозмущенное уравнение можно принять

$$x^4 - 12x^3 = 0$$

с решением $x_0 = 12$, а за возмущенное —

$$x^4 - 12x^3 + \alpha(10x - 1) = 0. \quad (4.19)$$

Аналогично предыдущему после дифференцирования по α находим при $\alpha = 0$, $x_0 = 12$ значения $x'_0 = -119/1728 = -0,068866$, $x''_0 = -0,001574$. Применяв формулу Тейлора и положив $\alpha = 1$, получаем второй корень уравнения (4.16): $x_2 = 11,9303$. Можно проверить, что два остальных корня уравнения (4.16) «средние» по величине, они равны 0,89429 и $-0,92585$.

В качестве другого примера рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 0,2y^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (4.20)$$

Здесь естественно считать второй член в правой части возмущением задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

имеющей очевидное решение $y = x$. Введем параметр в возмущенную задачу, записав ее в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad (4.21)$$

и будем искать ее решения как сумму ряда

$$y = x + z(x)\alpha + u(x)\alpha^2 + \dots \quad (4.22)$$

Подстановка его в уравнение и граничные условия (4.21) дает

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \alpha + \frac{d^2 u}{dx^2} \alpha^2 + \dots + \alpha(x + z\alpha + \dots)^3 = 0,$$

$$z(0)\alpha + u(0)\alpha^2 + \dots = 0, \quad z(1)\alpha + u(1)\alpha^2 + \dots = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , получаем последовательность линейных краевых задач:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + x^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0;$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 3x^2 z = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0; \dots$$

С помощью непосредственного интегрирования находим (проверьте!)

$$z = \frac{1}{20}(x - x^5), \quad u = \frac{1}{2400}(13x - 18x^5 + 5x^9).$$

Подстановка этих выражений в (4.22) дает при $\alpha = 0,2$ искомого решения задачи (4.20):

$$y = x + \frac{1}{100}(x - x^5) + \frac{1}{60000}(13x - 18x^5 + 5x^9) + \dots$$

Полученный ряд при $0 \leq x \leq 1$ хорошо сходится.

Мы рассмотрели здесь только самые простые примеры применения метода малого параметра. Далеко не всегда оказывается целесообразным разлагать решение по целым положительным степеням этого параметра. Так, если в невозмущенном решении содержалось слагаемое вида $A \sin \omega t$, перешедшее после возмущения задачи в $A \sin(\omega + \alpha) t$ (т. е. параметр повлиял на частоту, но не на амплитуду), то при построении решения в виде ряда по степеням α первая поправка превращает это слагаемое в

$$A \sin \omega t + (A\alpha t \cos \omega t) \alpha$$

и потому дает неправильное качественное представление о поведении возмущенного решения при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, неудачный выбор формы возмущенного решения может привести к ошибочным выводам. Правильный выбор осуществляется с учетом предполагаемых свойств решения, обычно на основе аналогии с уже известными

примерами, большое количество которых имеется в книгах, посвященных методу малого параметра, и в специальной литературе.

Для контроля качества получающегося приближенного решения можно сравнивать последовательные приближения друг с другом. Уже сравнение 0-го, 1-го и 2-го (а иногда даже только 0-го и 1-го) приближений позволяет с определенной достоверностью сделать вывод о качестве приближенного решения, так как сходимость или расходимость процесса обычно проявляются уже на его первых шагах; привлечение же еще нескольких приближений может сделать этот вывод практически достоверным. При этом, если решаемая задача кроме малого параметра включает еще конечные параметры, то может оказаться целесообразной такая проверка для нескольких типичных реальных комбинаций их значений, так как процесс, сходящийся для одних значений параметров, может оказаться расходящимся для других значений. Последовательные приближения можно для контроля сравнивать также с решением, полученным каким-либо иным методом, либо с экспериментальными данными.

4. Регулярные и сингулярные возмущения. Задача, включающая малый параметр α , может при значении $\alpha = 0$ либо не вырождаться, либо вырождаться (определение см. ниже). Как мы уже говорили, задача при $\alpha = 0$ называется *невозмущенной*, а при $\alpha \neq 0$ — *возмущенной*; как говорят, в задаче введено возмущение. Если задача при $\alpha = 0$ невырожденная, то возмущение называется *регулярным*, в противном случае — *сингулярным*. Регулярные возмущения более просты и обычно изучаются с помощью того или иного стандартного метода; сингулярные возмущения более сложны.

Само понятие вырожденности зависит от типа изучаемой задачи. Так, если рассматривается система из n алгебраических уравнений 1-й степени с n неизвестными, коэффициенты которой зависят от параметра α , то она обычно считается вырожденной при некотором значении $\alpha = \alpha_0$, если при этом значении определитель системы обращается в нуль. Тогда при α , близком к α_0 , этот определитель мал, и потому система становится, как правило, плохо обусловленной (п. 5 § 3), что вносит естественные осложнения в характер зависимости решения от α . Если же $\alpha = \alpha_0$, то система либо не имеет решений, либо имеет их бесконечное количество. Решение возмущенной системы при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ в первом случае уходит на бесконечность, а во втором, как правило, переходит в одно из решений вырожденной системы.

Покажем, как найти это предельное решение. Для этого запишем возмущенную систему в векторно-матричной форме, причем все заданные функции будем считать разложенными по степеням α :

$$(A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \dots)x = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots \quad (4.23)$$

Будем считать, что $\alpha_0 = 0$ и что невозмущенная система

$$A_0x = a_0, \quad (4.24)$$

получающаяся из (4.23) при $\alpha = 0$, вырожденная, т. е. $\det A_0 = 0$, но имеет решения. Из алгебры известно, что для последнего необходимо и достаточно равенство нулю скалярного произведения:

$$(a_0, z) = 0, \quad (4.25)$$

где z — любое решение однородной транспонированной системы, т. е. $A_0^T z = 0$ (все величины считаем вещественными). Ограничимся для простоты самым простым и распространенным случаем, когда такое решение $z \neq 0$ только одно с точностью до произвольного числового множителя. Тогда и решение $y \neq 0$ уравнения $A_0 y = 0$ тоже только одно с той же точностью. Представим решение системы (4.23) в виде

$$x = x_0 + x_1\alpha + x_2\alpha^2 + \dots \quad (4.26)$$

Подставляя это разложение в (4.23) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , получаем равенства

$$A_0x_0 = a_0, \quad A_0x_1 = a_1 - A_1x_0, \dots \quad (4.27)$$

Первое из них совпадает с невозмущенным уравнением (4.24) и в силу стандартной формулировки «общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения» получаем

$$x_0 = x_{0c} + c_0 y, \quad (4.28)$$

где c_0 — пока не известная постоянная. Однако из условия (4.25) разрешимости уравнения (4.24), примененного ко второму уравнению (4.27), получаем

$$(a_1 - A_1x_{0c} - c_0A_1y, z) = 0,$$

откуда, если $(A_1y, z) \neq 0$, находим

$$c_0 = (a_1 - A_1x_{0c}, z) (A_1y, z)^{-1}. \quad (4.29)$$

Итак, предельное решение невозмущенной, вырожденной

системы имеет вид (4.28)–(4.29). При желании можно продолжить разложение (4.26): для этого надо заметить, что $x_1 = x_{1n} + c_1 y$; применив условие (4.25) к третьему (не выписанному здесь) уравнению (4.27), найти постоянную c_1 и т. д. Можно проверить, что условие $(A_1 y, z) \neq 0$ обеспечивает возможность однозначного построения всех векторов x_n , а потому и всего разложения (4.26).

Аналогично вводится понятие вырожденности и проводится исследование сингулярного возмущения для других линейных систем — линейных краевых задач для дифференциальных уравнений, линейных интегральных уравнений и т. д., когда при некотором значении параметра нарушается существование либо единственность решения.

Для алгебраического уравнения произвольной степени, коэффициенты которого зависят от параметра, вырожденность обычно означает обращение в нуль коэффициента при старшей степени неизвестной, т. е. понижение степени уравнения. Что при этом происходит, легко понять на примере квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (4.30)$$

с коэффициентами a, b, c , зависящими от некоторого параметра α . Если $a(\alpha_0) = 0$, т. е. при $\alpha = \alpha_0$ уравнение (4.30) вырождается, то из формулы для корней

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

мы видим, что если $b(\alpha_0) \neq 0$, то при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ один из корней уходит в бесконечность, тогда как другой стремится к $-c/b$, т. е. к решению вырожденного уравнения; если же и $b(\alpha_0) = 0$, но $c(\alpha_0) \neq 0$, то при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ оба корня уходят в бесконечность.

Оказывается, что в общем случае картина аналогичная. Если алгебраическое уравнение степени n , вырождаясь, переходит в уравнение степени $k < n$, то в процессе вырождения $n - k$ корней уходят в бесконечность, тогда как остальные k корней переходят в корни вырожденного уравнения. Например, при $\alpha \rightarrow 0$ три корня уравнения (4.17) уходят в бесконечность, а один стремится к 0,1, тогда как у уравнения (4.19) все корни остаются конечными (оно при $\alpha = 0$ не вырождается): три из них стремятся к 0, а один — к 12.

С помощью приведенного общего утверждения анализируется и случай, когда некоторые из коэффициентов алгебраического уравнения обращаются в бесконечность. Пусть, например, для уравнения (4.30) $|b| \rightarrow \infty$, тогда как a и c остаются ограниченными; как ведут себя при этом корни? Переписав уравнение в равносильной форме

$$\frac{a}{b} x^2 + x + \frac{c}{b} = 0,$$

мы видим, что один из корней стремится к бесконечности, а другой — к нулю.

Для дифференциального уравнения, включающего некоторый параметр, вырождением обычно называют понижение порядка этого уравнения. Пример такого вырождения был разобран в п. 2: это уравнение (4.7), полученное из уравнения (4.1) при $m = 0$. Мы видели, что для сингулярно возмущенного уравнения, т. е. уравнения (4.1) с $m \ll f^2/k$, возникает кратковременный этап релаксации, на протяжении которого значение dx/dt существенно изменяется. Продолжительность этого этапа пропорциональна m , а изменение dx/dt на нем идет по закону $e^{-ct/m}$ ($c = \text{const}$), «крутизна» которого обратно пропорциональна значению m . При построении этой зависимости (во всяком случае, ее главной части) мало меняющиеся на релаксационном этапе правую часть уравнения и решение $x(t)$ можно «заморозить», заменив их соответствующими значениями при $t = 0$.

Оказывается, что разобранный пример является типичным, во всяком случае, для задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Если в уравнение входит малый параметр α и при $\alpha = 0$ оно вырождается, понижая порядок на единицу, но при $\alpha \rightarrow 0$ решение сингулярно возмущенной задачи остается конечным на некотором интервале (a, b) , то вблизи точек a и b могут возникнуть зоны, ширина которых имеет порядок α и на которых решение или его производные изменяются по описанному выше «крутому» закону; вне этих зон решение возмущенной задачи близко к решению вырожденного уравнения. Если независимой переменной служит время, т. е. рассматривается развитие процесса во времени, то, как в задаче п. 2, говорят об этапе релаксации. Если же за независимую переменную принята геометрическая координата, то говорят о возникновении пограничного слоя вблизи концов интервала, на котором определено решение сингулярно возмущенной задачи. Именно такая картина возникает при обтекании маловязкой жидкостью твердой стенки, причем малым пара-

метром служит коэффициент вязкости.) Поэтому и функции вида $e^{-cx/\alpha}$ ($c > 0$) называются функциями типа пограничного слоя. В теории сингулярно возмущенных уравнений можно найти методы построения асимптотических разложений решения как в зонах пограничного слоя, так и вне этих зон, а также методы выяснения того, действительно ли решение возмущенной задачи остается конечным при $\alpha \rightarrow 0$, если это не ясно из физических соображений.

5. Осреднение быстро колеблющихся исходных зависимостей. Если изучаемая система включает быстро колеблющиеся во времени или в пространстве исходные зависимости — например, механические или электромагнитные воздействия вибрационного характера либо мелкомасштабные «периодические с переменной амплитудой» структуры, — то важным методом упрощения математической модели является осреднение таких зависимостей. В некоторых случаях такое осреднение осуществляется совсем просто. Так, если рассматривается эволюция линейной системы под действием быстро колеблющегося внешнего воздействия, показанного на рис. 15, причем амплитуда этих колебаний остается конечной, то главную часть решения можно получить, заменив это воздействие на $u(t)$.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Мы будем рассматривать функции вида $f(t, \tau)$, где $\tau = \omega t$, а ω весьма

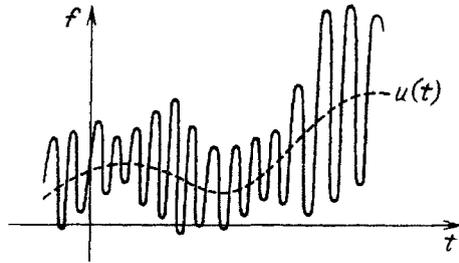


Рис. 15

велико, поэтому τ естественно называть *быстрым временем*. Будем считать, что функция f периодична по τ — для определенности с периодом 2π . Типичным примером может служить функция

$$g(t) \sin \tau = g(t) \sin \omega t,$$

описывающая так называемые модулированные колебания (рис. 16).

Для функции f указанного вида осреднение определяется по формуле

$$\langle f \rangle(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \tau) d\tau,$$

т. е. осреднение производится по быстрому времени, тогда как «обычное» время t при этом считается замороженным. Отсюда можно представить $f(t, \tau)$ в виде суммы

$$f(t, \tau) = \langle f \rangle(t) + [f(t, \tau) - \langle f \rangle(t)] = \langle f \rangle(t) + \psi(t, \tau),$$

$$\tau = \omega t,$$

причем первое, главное слагаемое изменяется со «средней»

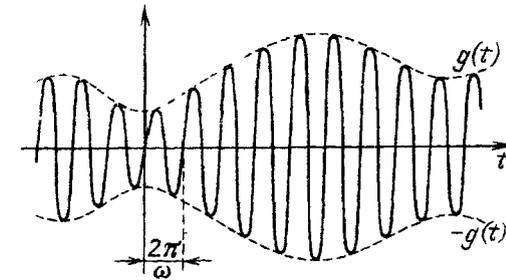


Рис. 16

скоростью, а второе, быстро колеблющееся, имеет среднее значение равным нулю.

Допустим теперь, что на осциллятор рис. 1 действует быстро колеблющаяся сила описанного типа. Выделив у этой силы главную часть, приходим к дифференциальному уравнению вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = u(t) + \psi(t, \omega t),$$

где $\langle \psi \rangle(t) \equiv 0$; для определенности будем считать начальные условия нулевыми. В силу линейности уравнения имеем

$$x(t) = v(t) + \alpha(t, \omega t), \quad (4.31)$$

где v и α — соответственно решения задач

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} + kv = u(t), \quad v|_{t=0} = 0, \quad \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k\alpha = \psi(t, \omega t), \quad \alpha|_{t=0} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Функция α быстро колеблющаяся; выразив ее через ψ с помощью функции Коши, можно с помощью интегрирования по частям показать, что α при $\omega \rightarrow \infty$ имеет порядок ω^{-2} . Таким образом, v — главная часть решения — получается как решение задачи с осредненным внешним воздействием.

Если внутренние параметры системы быстро колеблющиеся или если система нелинейная, то для получения главной части решения простого осреднения всех быстро колеблющихся зависимостей недостаточно, эта процедура может привести к прямым ошибкам. Глубинная причина этого в том, что если быстро колеблющаяся функция имеет нулевое среднее значение, то и произведение ее на «обычную» функцию обладает этим же свойством; но произведение двух быстро колеблющихся функций с нулевым средним значением каждой может не обладать этим свойством и потому дать при осреднении добавочный вклад: например, легко проверить, что при $\varphi_1, \varphi_2 = \text{const}$

$$\langle \sin(\tau + \varphi_l) \rangle = 0 \quad (\tau = \omega t; l = 1, 2),$$

однако

$$\langle \sin(\tau + \varphi_1) \sin(\tau + \varphi_2) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) *).$$

Правильный порядок осреднения для таких систем можно найти в курсах теории колебаний; мы ограничимся здесь разбором лишь одного яркого примера, который впервые рассмотрел П. Л. Капица в 1951 г.

Рассмотрим маятник с вибрирующей осью, т. е. тело малых размеров массы m , укрепленное на конце стержня пренебрежимо малой массы длины l , который подвешен на шарнире и может колебаться в вертикальной плоскости, причем точка подвеса совершает принудительные вертикальные колебания по закону $a \cos \omega t$. Обозначив буквой φ угол отклонения маятника от вертикали, нетрудно вывести дифференциальное уравнение колебаний маятника

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{k}{ml^2} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{a}{l} \omega^2 \sin \varphi \cos \omega t \quad (4.32)$$

(здесь k — коэффициент трения в шарнире), что мы предлагаем сделать желающим. Будем считать, что колебания

*) Этот факт широко применяется в электротехнике при подсчете средней мощности переменного (синусоидального) тока в случае сдвига фазы между напряжением и током.

точки подвеса происходят с малой амплитудой и большой частотой, точнее, что $a/l \ll 1$ и $\omega \gg \max \{k/ml^2, \sqrt{g/l}\}$.

Примем рабочую гипотезу о том, что решение уравнения (4.32) можно представить в виде суммы (4.31) «обычной» функции v и быстро колеблющейся функции α с малой амплитудой и нулевым средним значением. Подставив эту сумму в (4.32) и ограничиваясь линейными членами по α , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2(v + \alpha)}{dt^2} + \frac{k}{ml^2} \frac{d(v + \alpha)}{dt} + \frac{g}{l} (\sin v + \alpha \cos v) = \\ = \frac{a}{l} \omega^2 (\sin v + \alpha \cos v) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Проведя осреднение обеих его частей, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{k}{ml^2} \frac{dv}{dt} + \frac{g}{l} \sin v = \frac{a}{l} \omega^2 \langle \alpha \cos \omega t \rangle \cos v. \quad (4.34)$$

(При этом мы учли, что производная функции, имеющей нулевое среднее значение, также обладает этим свойством.) Вычитая почленно (4.34) из (4.33), имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{k}{ml^2} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l} \alpha \cos v = \\ = \frac{a}{l} \omega^2 [\sin v \cos \omega t + (\alpha \cos \omega t - \langle \alpha \cos \omega t \rangle) \cos v]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

При дифференцировании у быстро колеблющейся функции появляется член с множителем ω . Поэтому при большом ω и малом α в обеих частях уравнения (4.35) главными являются первые слагаемые и в первом приближении мы можем написать

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{a}{l} \omega^2 \sin v \cos \omega t.$$

Так как v сейчас заморожено, получаем выражение для быстрой составляющей решения:

$$\alpha = -\frac{a}{l} \sin v \cos \omega t.$$

Подставив это выражение в (4.34), приходим окончательно к уравнению для главной составляющей решения:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{k}{ml^2} \frac{dv}{dt} + \left(\frac{g}{l} + \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} \cos v \right) \sin v = 0. \quad (4.36)$$

Мы видим, что вибрация точки подвеса привела как бы к появлению добавочного крутящего момента

$$M_{\text{вибр}} = -\frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \cos v \sin v,$$

изменяющегося с «нормальной» скоростью. Это может привести к качественному изменению характера колебаний маятника даже без учета присутствия в них вибрационной составляющей α . Прежде всего, возможные положения его равновесия определяются приравниванием нулю третьего члена в левой части уравнения (4.36). Значит, при

$$\frac{a^2 \omega^2}{2l^2} > \frac{g}{l}, \quad \text{т. е.} \quad \omega > \frac{\sqrt{2lg}}{a}, \quad (4.37)$$

кроме очевидных положений равновесия $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ возникают еще два положения:

$$\cos \varphi_{3,4} = -\frac{2lg}{a^2 \omega^2}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_{3,4} = \pi \pm \arccos \frac{2lg}{a^2 \omega^2}.$$

С помощью стандартного метода линеаризации можно выяснить устойчивость этих положений, что мы предоставляем читателю. Оказывается, что положение $\varphi = 0$ устойчиво при любом ω . Положение же $\varphi = \pi$ неустойчиво при $\omega < \sqrt{2lg}/a$, но если выполнено условие (4.37), это положение становится устойчивым, тогда как вновь возникшие положения равновесия $\varphi = \varphi_{3,4}$ неустойчивы. Таким образом, если вибрация точки подвеса достаточно интенсивна (выполнено условие (4.37)), то «обратное» положение маятника, когда груз расположен над точкой подвеса, становится устойчивым и маятник, отклоненный от этого положения в интервал от φ_3 до φ_4 , вновь стремится стать вертикально кверху. Более того, чем больше $a\omega$, тем труднее вывести маятник из верхнего положения, как, впрочем, и из нижнего.

Все эти результаты было бы трудно предвидеть, даже в качественном отношении, без проведения выкладок. Их можно подтвердить экспериментом, который производит на неподготовленного зрителя глубокое впечатление.

б. Анализ влияния упрощений. Упрощенные математические модели, упрощенные формулы обладают целым рядом очевидных преимуществ. Однако довольно часто бывает неясно, можно ли применять данную упрощенную модель или формулу в той или иной ситуации. Чтобы выяснить границы применимости упрощенного метода, мож-

но провести контрольное сравнение получающегося решения с более точным.

Приведем несколько примеров. Пусть для системы, изображенной на рис. 14, мы собираемся пользоваться формулой (4.13); насколько малым для этого должен быть коэффициент трения f ? Ответ зависит от допустимой погрешности. Пусть, например, нас устраивает погрешность, не превышающая 5%. Примем (так часто бывает при применении метода малого параметра и в других «классических» случаях хорошо сходящихся последовательных приближений), что каждое приближение отличается от точного решения примерно на столько же, на сколько и от последующего приближения. Отсюда, сравнивая формулы (4.13) и (4.14), мы видим, что устраивающая нас погрешность формулы (4.13) получится при

$$\frac{7f^2}{96km} < 0,05, \quad \text{т. е.} \quad f < 0,8\sqrt{km}.$$

Еще один пример. Рассмотрим уравнение (1.3) свободных колебаний осциллятора. Мы уже говорили, что если нас интересует частота колебаний, а трение мало, то мы можем упростить уравнение, заменив его на (1.1). При каком значении коэффициента f это можно сделать? Частоты, подсчитанные для уравнения (1.1) и для более полного уравнения (1.3), равны соответственно

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4mk - f^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{f^2}{4km}}.$$

Если мы хотим, чтобы эти частоты различались не более чем на 5%, то должно быть

$$\sqrt{1 - \frac{f^2}{4km}} > 0,95, \quad \text{т. е.} \quad f < 0,6\sqrt{km}.$$

Это и есть в данной задаче условие малости трения. (Отметим, что более точное значение коэффициента в правой части равно 0,624; но в таком полукачественном вопросе «какое трение можно, а какое нельзя считать малым?» вряд ли целесообразно ответ приводить с высокой точностью.)

В качестве третьего примера рассмотрим колебания механического осциллятора без трения, возникающие в результате приложения к нему постоянной силы F_0 . Пусть m — масса осциллятора, а ω_0 — частота свободных колебаний

(см п 1 § 1) Непосредственное интегрирование уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \quad (4\ 38)$$

при нулевых начальных условиях дает решение

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4\ 39)$$

При выводе этой формулы было принято упрощающее предположение, что внешняя сила принимает значение F_0 мгновенно. Но реально это, конечно, не так и естественно поставить вопрос, можно ли пользоваться формулой (4 39), если внешняя сила возрастает с конечной скоростью. Для ответа на этот вопрос примем в качестве типичного варианта, что внешняя сила возрастает по линейному закону от значения $F = 0$ при $t = 0$ до $F = F_0$ при некотором $t = \tau$, после чего остается равной F_0 . Тогда при $0 \leq t \leq \tau$ в правой части уравнения (4 38) F_0 надо заменить на $(F_0/\tau)t$, интегрирование полученного уравнения при нулевых начальных условиях дает (проверьте!)

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) \quad (0 \leq t \leq \tau) \quad (4\ 40)$$

При $\tau \leq t < \infty$, когда внешняя сила уже не меняется, надо решать уравнение (4 38) при начальных условиях, определяемых из (4 40), т. е.

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(\tau - \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0} \right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 \tau) \quad \text{при } t = \tau$$

Решение, которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$x = \frac{F}{m\omega_0^2} \left[1 - \frac{\sin u}{u} \cos (\omega_0 t - u) \right] \quad \left(\tau \leq t < \infty, \quad u = \frac{\omega_0 \tau}{2} \right) \quad (4\ 41)$$

Таким образом, по сравнению с формулой (4 39) мы получаем поправку как в амплитуде, так и в фазе колебаний. Примем, что применение упрощенной зависимости (4 39) допустимо, если подсчитанная по ней амплитуда колебаний отличается от результата, который дает уточненная формула (4 41), не более чем на 5%. Тогда мы получаем, что должно быть $0,95 < (\sin u)/u < 1,05$, откуда с помощью таблиц находим, что $u < 0,55$, т. е. $\omega_0 \tau < 1,1$. Обозначив

$T = 2\pi/\omega_0$ период свободных колебаний, получаем, что должно быть $T/\tau = 2\pi/\omega_0 \tau \geq 6$. Другими словами, длительность этапа нарастания силы должна быть меньше периода свободных колебаний по крайней мере в шесть раз. Это и есть условие применимости упрощенной формулы (4.39) при принятом уровне допустимой погрешности.

Четвертый пример аналогичен третьему. Пусть внешняя сила F_0 , действующая на тот же осциллятор, возрастает, $F_0 = F_0(t)$, но меняется достаточно медленно, начиная со значения $F_0(0) = 0$. Тогда в упрощенной модели можно процесс считать квазистатическим, т. е. в уравнении (4.38) отбросить первый, инерционный член, откуда получаем очевидную формулу:

$$x = \frac{1}{m\omega_0^2} F_0(t) = \frac{1}{k} F_0(t)$$

— отклонение осциллятора пропорционально действующей силе. Но насколько медленным должно быть нарастание силы, чтобы можно было процесс действительно считать квазистатическим?

Для ответа на этот вопрос примем, что сила нарастает по линейному закону за некоторое время τ , после чего остается постоянной, а процесс можно считать квазистатическим, если при $t > \tau$ осциллятор отклоняется от равновесного положения $x_0 = F_0(\tau)/k$ не более чем на 5%. Тогда в силу формулы (4.41) получаем, что должно быть $|\sin u|/u < 0,05$, откуда $u > 20$, т. е. $\tau > 6T$. Это и есть условие квазистатичности в данной задаче.

Проведенное исследование в рассмотренных задачах, конечно, не является исчерпывающим. Так, в двух последних примерах мы приняли, что сила нарастает по линейному закону, тогда как в действительности этот закон может быть каким-либо иным. Поэтому привлечение к рассмотрению других таких законов сделало бы наши выводы более убедительными. Но и проведенный разбор дает правильное представление об условиях применимости упрощенных моделей и формул. Кроме того, надо учесть, что и сами критерии применимости (в наших примерах — расхождение не больше чем на 5%) не имеют категорического характера, так что если мы исходим из 5%, а в действительности получится 6%, то вряд ли кто-нибудь будет особенно возражать.

1. Методы построения и исследования решений. Мы будем рассматривать для определенности математические модели, имеющие вид дифференциальных уравнений, обыкновенных или с частными производными, с соответствующими начальными или граничными условиями. С необходимыми изменениями наше обсуждение можно распространить и на другие типы моделей.

Методы математического анализа можно грубо подразделить на качественные, аналитические и численные. С помощью *качественных методов* свойства решения изучаются без его построения, путем анализа свойств заданного уравнения. Применение этих методов требует большой математической подготовки и наименее поддается алгоритмизации.

Приведем пример качественного исследования. Рассмотрим нелинейный аналог уравнения (1.3):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + g \left(\frac{dx}{dt} \right) + f(x) = 0, \quad (5.1)$$

описывающий колебания осциллятора с нелинейными законами упругости и трения. Будем предполагать, что обе функции f и g непрерывные и возрастающие, причем $f(0) = g(0) = 0$, и докажем, что все решения уравнения (5.1) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Доказательство будем проводить на наглядном уровне, принимая, что если какая-либо функция φ при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянной, то $\varphi'(t) \rightarrow 0$ в этом процессе. (Практически это всегда так, хотя теоретически возможны исключения, поэтому имеется более сложное доказательство, не зависящее от этого наглядного допущения.) Пусть $x(t)$ — какое-либо решение уравнения (5.1). Введем функцию

$$E(t) = \frac{m}{2} [x'(t)]^2 + \int_0^{x(t)} f(\xi) d\xi,$$

представляющую собой математический аналог полной энергии осциллятора. Тогда

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \left[-g \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] \leq 0 \quad (5.2)$$

(последнее равенство вытекает из уравнения (5.1), а неравенство — из свойств функции g). Значит, функция $E(t)$

убывающая (хотя бы в слабом смысле), а так как $E(t) \geq 0$, то $E(t)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$. Но тогда по нашему допущению $dE/dt \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда из выражения (5.2) получаем, что и $dx/dt \rightarrow 0$ в этом процессе. Значит, по нашему допущению и $d^2x/dt^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Но тогда из уравнения (5.1) получаем, что $f(x) \rightarrow 0$, а потому и $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. Как видим, в процессе доказательства мы нигде не пользовались ни точным, ни приближенным выражением для решения $x(t)$.

Аналитические методы направлены в основном на построение точных или асимптотических формул для решений и изучение свойств решений с помощью этих формул. Точные формулы могут либо охватывать совокупность всех решений заданного дифференциального уравнения (тогда говорят о его *общем решении*), либо представлять отдельные, *частные решения*, удовлетворяющие определенным свойствам: удовлетворяющие заданным начальным или граничным условиям, стационарные, периодические, автомодельные (п. 4) и т. д. Так, для уравнения (4.1) вынужденных колебаний мы искали частное решение вида (4.2) — наиболее интересное решение, описывающее единственное в данных условиях установившееся движение.

Решение, построенное аналитически, может иметь вид либо конечной формулы, либо суммы бесконечного ряда, либо интеграла. Такая форма решения может оказаться особенно полезной, если задача содержит параметры и нас интересует зависимость решения от них, либо если требуется выяснить поведение решения, когда время или координаты стремятся к бесконечности (и потому применение численных методов не очень удобно). В последнем случае, а также если параметры задачи стремятся к нулю либо к бесконечности, от точных формул обычно переходят к *асимптотическим формулам*, дающим приближенное представление решения (говорят также — дающим асимптотическое решение), справедливое с точностью до членов, малых по сравнению с выписанными. Впрочем, асимптотические формулы чаще получают не из формул для точного решения, а с помощью действий над исходным уравнением (см. последний пример п. 3 § 4, а также п. 2).

Приведем простой пример исследования точного решения. Из соотношений (4.1) и (4.2) вытекает формула для амплитуды вынужденных гармонических колебаний:

$$|B| = \frac{A}{|m(\omega)^2 + f\omega + k|} = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2}}. \quad (5.3)$$

Пусть параметры A, k, m, f фиксированы, а ω произвольно. При каком значении ω эта амплитуда максимальна, т. е. на какой частоте осциллятор возбуждается сильнее всего? Для ответа вычислим производную

$$\frac{d|B|}{d\omega} = A [(k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2]^{-3/2} (2km - f^2 - 2m^2\omega^2)\omega.$$

Мы видим, что если трение велико, точнее, если $f \geq \sqrt{2} km$, то $d|B|/d\omega < 0$ при всех $\omega > 0$ и потому максимум $|B|$ достигается при $\omega = 0$, т. е. при статическом воздействии. Если же $f < \sqrt{2} km$, то при росте ω , начиная с $\omega = 0$, значение $|B|$ сначала растет, достигает максимума («квазирезонанс») при $\omega = \omega_{\text{квр}} := \sqrt{km - f^2/2}/m$, равного

$$|B|_{\text{max}} = \frac{2mA}{f\sqrt{4km - f^2}}.$$

В частности, при $f \rightarrow 0$ с помощью следствия из формулы Тейлора $(1 + \alpha)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}\alpha + \dots$ ($|\alpha| < 1$) получаем асимптотические формулы

$$\omega_{\text{квр}} \sim \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 - \frac{f^2}{4km}\right), \quad |B|_{\text{max}} \sim \frac{2mA}{f\sqrt{4km}} = \frac{A}{f} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (f \rightarrow 0)$$

(\sim означает асимптотическое равенство). При $\omega \rightarrow 0$ и зафиксированных прочих параметрах из (5.3) получаем асимптотическую формулу

$$|B| = \frac{A}{k} \left(1 + \frac{f^2 - 2km}{k^2} \omega^2 + \frac{m^2}{k^2} \omega^4\right)^{-1/2} \sim \frac{A}{k} \left(1 - \frac{f^2 - 2km}{2k^2} \omega^2\right) \quad (\omega \rightarrow 0),$$

а при $\omega \rightarrow \infty$ — асимптотическую формулу

$$|B| \sim \frac{A}{m\omega^2} \quad (\omega \rightarrow \infty).$$

Эти асимптотические формулы наглядно описывают зависимость $|B|(\omega)$ при близких к экстремальным значениям параметров.

По поводу численных (приближенных) методов решения задач математического анализа мы уже говорили в пп. 8 § 3 и 9 § 3 — в частности, о грубом подразделении этих методов на непрерывные и дискретные. Отметим, что между этими двумя типами методов нет резкой грани. Так, непрерывные методы часто сопровождаются вычислением интегралов, которое осуществляется с помощью перехода к узловым зна-

чениям участвующих функций. Естественно, что подавляющее большинство современных численных методов ориентировано на применение ЭВМ.

Применение дискретного численного метода к решению дифференциального уравнения по существу означает, что из-за чисто вычислительных соображений мы заменяем исходную непрерывную математическую модель на новую, дискретную.

Отметим в заключение, что мы описывали здесь традиционные математические методы построения решений. Однако при решении прикладных математических задач эти традиционные методы могут сочетаться с действиями нематематического характера — физическими измерениями, наблюдениями и т. п. Это относится не только к получению исходных параметров и зависимостей, но в некоторых случаях и к промежуточным этапам исследования, если какие-либо из появляющихся величин и функций сравнительно несложно получить эмпирически, хотя в принципе их можно было бы найти и средствами математики.

2. Асимптотические разложения. Асимптотические разложения заданных и искомым функций широко распространены при применении аналитических методов построения решения. Обычно это — разложения по целым (иногда целым и полужелым) положительным или отрицательным степеням независимой переменной либо параметра, входящего в уравнение. Такие разложения используются как для вычисления значений решения, так и для исследования его поведения; в частности, асимптотические формулы, о которых говорилось в п. 1, обычно получают, если в асимптотическом разложении оставить 1 — 2 первых члена.

Будем здесь рассматривать разложение решения по степеням независимой переменной. При разложении вблизи конечного значения $t = t_0$ по положительным степеням $t - t_0$ часто применяются формула Тейлора или метод неопределенных коэффициентов. Приведем простой пример: пусть мы хотим получить разложение решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t^2, \quad x(0) = 1 \quad (5.4)$$

по степеням t . Для этого воспользуемся формулой Тейлора

$$x = x_0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 t^2 + \dots, \quad (5.5)$$

где индекс нуль означает подстановку значения $t = 0$. Из начального условия и уравнения (5.4) имеем $x_0 = 1$,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Дифференцируя обе части уравнения (5.4) по t , получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x \frac{dx}{dt} - 2t, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x \frac{d^2x}{dt^2} - 2,$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 6 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{d^3x}{dt^3}, \dots,$$

откуда, подставляя значение $t = 0$, находим последовательно

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2, \quad \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0 = 4, \quad \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)_0 = 20, \dots$$

Подставляя эти значения в формулу (5.5), приходим к разложению

$$x = 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^4 + \dots \quad (5.6)$$

При желании его нетрудно продолжить. Им удобно пользоваться при сравнительно малых $|t|$, например, при $|t| < 0,1$. При дальнейшем увеличении t уравнение надо решать численно с помощью какого-либо из дискретных методов. При некотором значении $t = T > 1$ происходит обострение решения — оно обращается в бесконечность (см. п. 2 § 4). Это обнаруживается по переполнению ячеек памяти ЭВМ; чтобы найти значение T , можно также, сделав в задаче (5.4) замену $x = 1/y$, подсчитать, при каком значении t функция $y(t)$ перейдет через значение $y = 0$.

Разложение (5.6) можно получить также по методу неопределенных коэффициентов. Для этого надо подставить выражение

$$x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$$

в уравнение и начальное условие (5.4) и, раскрыв скобки, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t . Мы предоставляем читателю проделать соответствующие вычисления.

Асимптотические разложения при $t \rightarrow \infty$ обычно имеют вид

$$x(t) \sim g(t) \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + \dots \right), \quad (5.7)$$

где g — некоторая известная функция, а ряд, стоящий в скобках, вообще говоря, *сходится асимптотически*. Последнее означает, что для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ при всех достаточно больших t имеет место неравенство

$$\left| x(t) - g(t) \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} \right) \right| \leq \frac{\text{const}}{t^{n+1}} |g(t)|$$

(постоянная в правой части зависит от n). При этом не требуется, чтобы ряд был сходящимся в обычном смысле, а если он сходится, то чтобы его сумма, умноженная на $g(t)$, равнялась $x(t)$; поэтому в формуле (5.7) применен не знак «=», а знак «~» (который, правда, в математическом анализе применяется и в другом смысле). Тем не менее, оставляя у ряда лишь конечное число первых членов, мы получаем асимптотические формулы для $x(t)$, тем более точные при больших t , чем больше членов взято. На практике обычно принимают, что погрешность получающейся приближенной формулы близка к первому из отброшенных членов ряда, хотя теоретически это не всегда так.

Приведем в качестве примера асимптотическое разложение так называемой функции ошибок:

$$\text{erf } x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds,$$

появляющейся во многих приложениях математики. Для этого проведем интегрирование по частям:

$$\int_x^\infty e^{-s^2} ds = \int_{s=x}^\infty \frac{-1}{2s} de^{-s^2} = -\frac{1}{2s} e^{-s^2} \Big|_{s=x}^\infty - \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1}{2s^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \int_x^\infty \frac{1}{2s^2} e^{-s^2} ds,$$

откуда

$$1 - \text{erf } x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - e^{x^2} \int_x^\infty \frac{1}{s^2} e^{-s^2} ds \right).$$

Повторение этой процедуры, которое мы предоставляем читателю, приводит к равенствам:

$$1 - \text{erf } x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + e^{x^2} \int_x^\infty \frac{1 \cdot 3}{2s^4} e^{-s^2} ds \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - e^{x^2} \int_x^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 s^6} e^{-s^2} ds \right) = \dots \quad (5.8)$$

С помощью правила Лопиталья нетрудно проверить, что последнее слагаемое внутри скобок при $x \rightarrow \infty$ имеет порядок очередной отрицательной степени x ; например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{x^2} \int_x^{\infty} \frac{1}{s^6} e^{-s^2} ds : \frac{1}{x^7} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_x^{\infty} \frac{1}{s^6} e^{-s^2} ds : e^{-x^2} x^{-7} \right) =$$

$$= (0 : 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x^6} e^{-x^2} : \left(-2xe^{-x^2} x^{-7} - 7e^{-x^2} x^{-8} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в пределе из (5.8) получается асимптотическое разложение

$$1 - \operatorname{erf} x \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (5.9)$$

Применяя признак Даламбера сходимости рядов, легко проверить, что полученный ряд расходится для всех x . Однако это не мешает применению формулы (5.9) как для получения асимптотических формул для $\operatorname{erf} x$ (например,

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + O\left(\frac{1}{x^3} e^{-x^2}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

так и для вычисления значений этой функции. Отметим, кстати, что, как это следует из равенств (5.8), обрывая ряд в (5.9) все дальше и дальше, мы получаем в правой части значения попеременно то бóльшие, то меньшие левой части. Например, при $x = 2,5$ частичные суммы ряда последовательно равны 0,4; 0,368; 0,37568; 0,372608; 0,3743283; 0,3730897; 0,3741796; 0,3730462; 0,3744062... Мы видим, что эти суммы сначала как бы сходятся, но потом разбалтываются, и чем дальше, тем разбалтывание сильнее. Для последовательных пар из приведенных значений наиболее близки друг к другу 6-е и 7-е; руководствуясь ими, получаем значение $0,3736 \pm 0,006$, что приводит к результату

$$\operatorname{erf} 2,5 = 1 - \frac{1}{2,5\sqrt{\pi}} e^{-2,5^2} \cdot 0,3736 = 0,999837$$

с погрешностью, меньшей единицы последнего разряда.

Приведем еще один полезный пример. Пусть нас интересует ненулевое решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{t^2}{1+t^2} x = 0, \quad (5.10)$$

ограниченное при $t \rightarrow \infty$. Записав разложение при $t = 0$:

$$\frac{t^2}{1+t^2} = t^2 - t^4 + t^6 - t^8 + \dots,$$

можно с помощью метода неопределенных коэффициентов построить разложения двух линейно независимых решений уравнения (5.10):

$$x_1(t) = 1 + \frac{1}{12} t^4 - \frac{1}{30} t^6 + \frac{13}{672} t^8 - \dots, \quad (5.11)$$

$$x_2(t) = t + \frac{1}{20} t^5 - \frac{1}{42} t^7 + \frac{21}{1440} t^9 - \dots,$$

что мы предоставляем сделать читателю. Общее решение уравнения (5.10) имеет вид

$$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \quad (5.12)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. С другой стороны, из разложения при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^6} + \dots \quad (5.13)$$

мы видим, что при больших t уравнение (5.10) близко к уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0,$$

которое имеет линейно независимые решения e^t и e^{-t} . Это дает основание для того, чтобы искать асимптотическое разложение решения, ограниченного при $t \rightarrow \infty$, в форме

$$x = e^{-t} \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \dots \right).$$

Подстановка этого разложения в уравнение (5.13) с учетом формулы (5.13) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях t приводит к разложению искомого решения (проверьте!)

$$x(t) = a_0 e^{-t} \left(1 - \frac{1}{2t} + \frac{3}{8t^2} - \frac{13}{48t^3} + \frac{145}{384t^4} - \dots \right). \quad (5.14)$$

Коэффициент a_0 остался произвольным, и так как решение определено с точностью до произвольного постоянного множителя, будем считать, что $a_0 = 1$. Отметим, что

полученный ряд сходится к решению лишь асимптотически, так что более правильно в (5.14) писать знак \sim .

Построенному решению $x(t)$ соответствуют вполне определенные значения C_1 и C_2 в формуле (5.12), т. е. вполне определенное асимптотическое разложение при $t = 0$. Таким образом, возникает задача «склеивания» («сшивания») асимптотических разложений при $t = 0$ и $t = \infty$. Задача склеивания иногда решается точно, однако чаще, как и в данном случае, ее приходится решать с помощью численного интегрирования. Для этого можно, исходя из разложений (5.11) и (5.14) и численно интегрируя уравнение (5.10), продолжать решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в положительном направлении, а $x(t)$ — в отрицательном направлении оси t , пока все они не попадут на общий интервал оси t . После этого найти коэффициенты C_1, C_2 не составляет труда.

3. Интегральные представления решений. Здесь мы опишем некоторые методы интегрального представления решений, специфические для линейных моделей. Напомним (п. 3 § 2), что линейную модель можно трактовать как оператор, преобразующий входы в выходы, для которого справедлив принцип суперпозиции. Рассматриваемые методы дают возможность, зная выходы для того или иного достаточно полного стандартного набора входов простого вида, получить формулу для выхода при произвольном входе. Эти методы широко применяются для построения и исследования решений.

Остановимся сначала на методе применения так называемых функций Грина. Его общая схема такова. Будем для определенности считать, что входами служат функции $f(x)$, заданные на фиксированном интервале $a \leq x \leq b$, а выходами — функции того же или другого аргумента, тоже заданные на некотором фиксированном интервале, или даже просто числа. Пусть входом служит сдвинутая дельта-функция, $\delta(x - \xi)$, где $a < \xi < b$; обозначим соответствующий выход G_ξ — это и есть *функция Грина* в рассматриваемой задаче. Тогда, представив произвольный вход $f(x)$ как результат наложения бесконечно малых слагаемых $[f(\xi) d\xi] \delta(x - \xi)$ (см. формулу (Д. 15)) и применяя принцип суперпозиции, получаем соответствующий выход:

$$\int_a^b G_\xi f(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим в качестве примера задачу (2.7), в которой $q(x)$ является входом, а $y(x)$ — выходом, причем обе функции определены при $a \leq x \leq b$. Соответствующая функция Грина является решением краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \delta(x - \xi) \quad (a \leq x \leq b), \quad (5.15)$$

$$y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (x = a, b),$$

таким образом, это функция двух переменных x и ξ , т. е. $G_\xi = G(x; \xi)$. Говорят также, что это функция двух точек: *точки воздействия* ξ (в которой прилагается единичная нагрузка) и *точки наблюдения* x (в которой измеряется прогиб). Поэтому функцию Грина называют также *функцией влияния*: она описывает, как влияет нагрузка, приложенная к какой-либо точке стержня, на его прогиб в любой другой точке.

Применяя свойства дельта-функции, можем переписать задачу (5.15) в «обычных» терминах:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0 \quad (a \leq x < \xi, \xi < x \leq b),$$

$$y|_{x=a,b} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=a,b} = 0,$$

(5.16)

$$y|_{x=\xi+} = y|_{x=\xi-}, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=\xi+} = \frac{dy}{dx}|_{x=\xi-}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=\xi+} = \frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=\xi-}.$$

$$\left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right]_{x=\xi+} = \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right]_{x=\xi-} + 1.$$

Будем считать для простоты, что $EI = \text{const}$. Тогда после простого преобразования переменных (п. 2 § 4) можно считать, что все они безразмерные, причем $EI = 1$, а $a = 0$. Решая при таких условиях задачу (5.16), получаем (проверьте!)

$$y = \begin{cases} x(\xi - b)(\xi^2 - 2b\xi + x^2)/6b & (0 \leq x \leq \xi), \\ \xi(x - b)(x^2 - 2bx + \xi^2)/6b & (\xi \leq x \leq b). \end{cases} \quad (5.17)$$

Это и есть выражение для функции Грина в данной задаче.

Таким образом, ее решение имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{6b} \left[\int_0^x \xi (x-b) (x^2 - 2bx + \xi^2) q(\xi) d\xi + \int_x^b x (\xi - b) (\xi^2 - 2b\xi + x^2) q(\xi) d\xi \right].$$

Отметим важное свойство функции Грина, которое сразу следует из формулы (5.17): $G(x; \xi) \equiv G(\xi; x)$; это закон взаимности. В самом деле, пусть $0 \leq p \leq q \leq b$. Тогда при вычислении $G(p; q)$ надо пользоваться первой строкой формулы (5.17), положив $x = p$, $\xi = q$; а при вычислении $G(q; p)$ надо пользоваться второй строкой, положив $x = q$, $\xi = p$, что приведет к тому же результату (проверьте!).

Оказывается, что закон взаимности является следствием консервативности*) рассматриваемой системы, т. е. наличием у нее потенциальной энергии. В самом деле, пусть к некоторой точке p приложена сила, непрерывно возрастающая от 0 до P . Тогда прогиб в этой точке возрастает по линейному закону от 0 до $PG(p, p)$, а потому сила совершает работу $\frac{1}{2} P^2 G(p, p)$. Оставим эту силу без изменения и приложим в точке q еще одну силу, возрастающую от 0 до Q . Тогда эта сила совершит работу $\frac{1}{2} Q^2 G(q, q)$, а первая — работу $PQG(p, q)$. (Здесь используется предположение о линейности системы, в силу которого добавочный прогиб при приложении силы не зависит от уже имеющегося прогиба.) В итоге стержень накопит потенциальную энергию

$$\frac{1}{2} P^2 G(p, p) + \frac{1}{2} Q^2 G(q, q) + PQG(p, q).$$

Если же сначала возрастает вторая сила, а потом первая, то потенциальная энергия получается равной

$$\frac{1}{2} Q^2 G(q, q) + \frac{1}{2} P^2 G(p, p) + QPG(q, p).$$

Но так как итоговые положения стержня в обоих случаях одинаковы, то эти два выражения должны быть равными. Поэтому $G(p, q) = G(q, p)$.

Аналогичное построение для задачи (2.9) мы предоставим читателю, а здесь приведем только окончательный

результат. Функция Грина (при решении задачи Коши она называется также функцией Коши) для этой задачи имеет вид

$$G(t; \xi) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \xi), \\ \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 (t - \xi) & (\xi \leq t < \infty); \end{cases}$$

это — реакция осциллятора на единичный импульс (толчок), действовавший в момент $t = \xi$. Поэтому решение задачи таково:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \xi) F(\xi) d\xi \quad (0 \leq t < \infty).$$

Приведем теперь интегральное представление другого типа на примере задачи для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty),$$

$$\theta|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x < \infty), \quad \theta|_{x=0} = \theta^0(t) \quad (0 \leq t < \infty).$$

Если заданный закон $\theta^0(t)$ изменения температуры на конце стержня считать входом, а решение $\theta(x, t)$ — выходом, то мы получаем линейную систему.

Нетрудно непосредственно убедиться (попробуйте!) в том, что входу $\theta^0(t) \equiv 1$ отвечает решение

$$\Theta(x, t) = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}},$$

где erf — функция ошибок (п. 2). Чтобы перейти к произвольному входу $\theta^0(t)$, представим его, как показано на рис. 17, в виде суммы ступенек — одной конечной с уравнением $\theta = \theta^0(0)H(t)$ и остальных бесконечно малых с уравнением общего вида $\theta = d\theta^0(\tau) \cdot H(t - \tau)$, где H — единичная функция Хевисайда (см. Дополнение, п. 2). Другими словами, мы

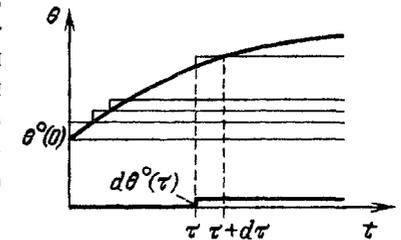


Рис. 17

как бы считаем, что происходит непрерывное подключение бесконечно малых постоянных входов. Так как каждый

*) От латинского слова «консерво» — сохраняю.

такой вход порождает решение

$$d\theta = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \tau), \\ d\theta^0(\tau) \cdot \Theta(x, t - \tau) & (\tau \leq t < \infty), \end{cases}$$

то, проводя суммирование с учетом равенства $d\theta^0(\tau) = \theta^{0'}(\tau) d\tau$ и учитывая вклад от конечной ступеньки, получаем формулу для решения:

$$\theta(x, t) = \theta^0(0) \Theta(x, t) + \int_0^t \theta^{0'}(\tau) \Theta(x, t - \tau) d\tau.$$

Решение, полученное с помощью такого разложения входов на ступеньки, иногда называют *интегралом Дюамеля*.

4. Автомодельные решения. Автомодельные («самоподобные») решения играют важную роль при изучении математических моделей сплошных сред, а построение и применение таких решений лежит в основе ряда аналитических методов. Рассмотрим в качестве примера уравнение теплопроводности для однородного стержня

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (0 < t < \infty, -\infty < x < \infty) \quad (5.18)$$

и поставим цель найти такое решение, график которого, изображенный при фиксированном $t = t_0 > 0$, с изменением t растягивается или сжимается в определенное число раз к каждой из осей x, θ . Другими словами, при изменении t можно не перестраивать этот график, а только менять единицы масштаба вдоль указанных осей. Такое решение и называется автомодельным; оно должно иметь вид

$$\theta_a(x, t) \equiv k_t f\left(\frac{x}{l_t}\right), \quad 0 < t < \infty, \quad (5.19)$$

где f — безразмерная функция безразмерного аргумента, а все размерности включены в коэффициенты растяжения l_t (по оси x) и k_t (по оси θ), зависящие только от t . Так как стержень считается бесконечным, а потери тепла через его поверхность уравнением (5.18) не учитываются, то естественно поставить требование, чтобы общее количество тепла в стержне оставалось постоянным:

$$c\rho S \int_{-\infty}^{\infty} \theta_a(x, t) dx \equiv \text{const}, \quad 0 < t < \infty, \quad (5.20)$$

где c — удельная теплоемкость, ρ — плотность и S — площадь поперечного сечения стержня. Из этого условия

вытекает, что коэффициенты l_t и k_t должны быть обратно пропорциональными (почему?), $k_t = C/l_t$, где $C = \text{const}$.

Так как отношение x/l_t должно быть безразмерным, а в силу уравнения (5.19) размерности величин удовлетворяют соотношению

$$\frac{[\theta]}{[t]} = [a] \frac{[\theta]}{[x]^2}, \quad \text{т. е. } [x]^2 = [at],$$

то l_t с точностью до несущественного числового множителя (его можно включить в f) должно равняться \sqrt{at} . Таким образом, в силу (5.19) получаем

$$\theta_a(x, t) = \frac{C}{\sqrt{at}} f\left(\frac{x}{\sqrt{at}}\right) = \frac{C}{\sqrt{at}} f(\xi), \quad \xi := \frac{x}{\sqrt{at}}.$$

Чтобы найти функцию f , вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_a}{\partial t} &= -\frac{C}{2\sqrt{at^3}} f(\xi) - \frac{C}{\sqrt{at}} f'(\xi) \frac{x}{2\sqrt{at^3}}, \\ \frac{\partial \theta_a}{\partial x} &= \frac{C}{\sqrt{at}} f'(\xi) \frac{1}{\sqrt{at}}, \quad \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial x^2} = \frac{C}{\sqrt{at}} f''(\xi) \frac{1}{at} \end{aligned}$$

и подставим их в уравнение (5.18). После простых преобразований, которые мы предоставляем читателю, получается дифференциальное уравнение для функции f :

$$2f''(\xi) + \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0. \quad (5.21)$$

Таким образом, мы перешли от уравнения с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Замечательно, что уравнение (5.21) можно проинтегрировать точно:

$$f(\xi) = C_1 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} + C_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \int_0^{\xi} e^{\frac{1}{4}s^2} ds,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Ограничиваясь первым слагаемым (второе имеет более сложный физический смысл), получаем искомое решение:

$$\theta_a(x, t) = \frac{C}{\sqrt{at}} e^{-x^2/(4at)}. \quad (5.22)$$

Постоянную C подберем так, чтобы общее количество тепла в стержне равнялось некоторому заданному значению Q .

Исходя из известного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$ и формулы

(5.20), имеем

$$Q = c\rho S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{\sqrt{at}} e^{-x^2/(4at)} dx = (x = 2\sqrt{at}r) = \\ = c\rho S \cdot \frac{C}{\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} 2\sqrt{at} dr = c\rho S \cdot 2C\sqrt{\pi}. \quad (5.23)$$

Найдя отсюда C и подставив в (5.19), получаем окончательно

$$\theta_a(x, t) = \frac{Q}{2c\rho S \sqrt{\pi at}} e^{-x^2/(4at)}. \quad (5.24)$$

Примерные графики этого решения при малом, «среднем» и большом t показаны на рис. 18 (соответственно линии 1, 2 и 3). Так как оно при $|x| \rightarrow \infty$ очень быстро стремится к нулю, а площадь под графиком все время остается равной $Q/(c\rho S)$, то

$$\theta_a(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} \frac{Q}{c\rho S} \delta(x),$$

где δ — дельта-функция. Таким образом, найденное решение описывает эволюцию распределения температуры в стержне, если в момент $t = 0$ при $x = 0$ на бесконечно малом интервале сосредоточено тепло в количестве Q , а остальная часть стержня имеет нулевую температуру.

Из формулы (5.24) вытекает ряд следствий. Так, вычисления (5.23) подтверждают сделанное выше допущение о сохранении количества тепла в стержне. Из равенства $l = \sqrt{at}$ вытекает, что любая конечная порция тепла «размывается» со скоростью,

пропорциональной $(\sqrt{t})' = 1/2\sqrt{t}$, т. е. с ростом t эта скорость падает. Впрочем, из той же формулы (5.24) следует и парадоксальный вывод о формально бесконечной скорости распространения тепла, упомянутый в п. 4 § 1.

В качестве еще одного следствия из формулы (5.24) получим так называемую формулу Пуассона для решения

уравнения (5.18) при заданном начальном условии:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Здесь рассуждение аналогично тому, как применялась функция Грина в п. 3. Начальное распределение тепла можно рассматривать как результат наложения его бесконечно малых порций $dQ = (c\rho S d\xi) \theta_0(\xi)$ на интервалах длины $d\xi$. В силу однородности стержня каждой такой порции отвечает закон эволюции температуры по формуле

$$d\theta = \frac{dQ}{2c\rho S \sqrt{\pi at}} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} \theta_0(\xi) d\xi.$$

Теперь, пользуясь линейностью уравнения (5.18), применяем суперпозицию полученных бесконечно малых составляемых, что дает требуемый результат:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} \theta_0(\xi) d\xi \\ (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty).$$

В других задачах понятие автомодельного решения вводится сходным образом. И смысл его аналогичен — оно обычно описывает эволюцию некоторой сингулярности, сосредоточенной в начальный момент в одной точке. Построение такого решения сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения; однако далеко не всегда это построение удастся осуществить в виде точной формулы и тогда приходится прибегать к численному решению. Из конкретного вида автомодельного решения можно вывести многие полезные следствия, даже порой для нелинейных уравнений с частными производными, которые в целом существенно сложнее, чем линейные; однако, к сожалению, такими решениями обладают далеко не все уравнения с частными производными, существенные для приложений.

5. Решения типа бегущих и стоячих волн. Поясним оба понятия на примере уравнения продольных упругих колебаний прямоугольного стержня при линейном законе упругости (см. Добавление, п. 16)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.25)$$

Решением типа бегущей волны называется решение вида

$$u = f(x - ct), \quad (5.26)$$

где f — какая-либо функция одного аргумента, вместо которого подставлено выражение $x - ct$, $c = \text{const}$. Нетрудно понять смысл такого решения. Ведь при фиксированном значении t график функции $u = f(x - ct)$ получается из графика $u = f(x)$ с помощью параллельного переноса в положительном направлении оси x на ct (если $ct < 0$, то направление переноса отрицательно). Пусть теперь t меняется непрерывно, как это и происходит на самом деле. Тогда мы видим, что график зависимости (5.26) u от x , не меняя своей формы, перемещается как жесткий шаблон вдоль оси x , причем в момент t перемещение равно ct , т. е. c есть скорость перемещения графика. Таким образом, бегущая волна проходит вдоль по стержню, не меняя своей формы, с постоянной скоростью c .

Чтобы найти такие решения, подставим выражение (5.26) в уравнение (5.25). При этом надо пользоваться правилом вычисления производной сложной функции: например, если $u = f(\xi)$, $\xi = x - ct$, то $u'_t = f'(\xi) \xi'_t = f'(x - ct)(-c)$; здесь f' — это производная функции f по ее единственному аргументу. Аналогично получаем $u''_{tt} = f''(x - ct)(-c)^2$, $u''_{xx} = f''(x - ct) \cdot 1^2$ и подстановка в (5.25) дает

$$c^2 f''(x - ct) = a^2 f''(x - ct), \quad \text{т. е.} \quad (c^2 - a^2) f''(x - ct) = 0.$$

Так как равенство $f''(\xi) = 0$ приводит к неинтересному решению $f(\xi) = A\xi + B$ ($A, B = \text{const}$), то

$$c^2 - a^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad c_{1,2} = \pm a,$$

тогда как функция f остается произвольной. Итак, вдоль стержня могут проходить бегущие волны любой формы в обоих направлениях со скоростью a . Заодно мы выяснили смысл параметра a , введенного в п. 1. Добавления формально: оказалось, что это — скорость распространения волн вдоль стержня, другими словами — скорость звука в стержне.

Так как уравнение (5.25) линейное однородное, то сумма его решений всегда является решением того же уравнения. Поэтому сумма

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (5.27)$$

волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях, является решением уравнения (5.25). Оказывается, что в таком виде, подобрав функции f_1 и f_2 , можно представить любое решение этого уравнения, т. е. формула (5.27) дает общее решение уравнения (5.25).

Иной характер имеют бегущие волны для телеграфного уравнения в варианте (Д.9) (см. Добавление, п. 1в). Подстановка $u = f(\xi)$, $\xi = x - ct$, приводит к уравнению для f :

$$(a^2 - c^2) f'' + k^2 f = 0.$$

При $k > 0$ этому уравнению удовлетворяет уже не любая функция f . Именно если $|c| < a$, то решение имеет вид

$$f(x, t) = f(\xi) = A \sin \left(\frac{k}{\sqrt{a^2 - c^2}} \xi + \varphi \right) = A \sin \left[\frac{k}{\sqrt{a^2 - c^2}} (x - ct) + \varphi \right],$$

где A и φ — произвольные постоянные. Для $|c| > a$ решение имеет вид суммы двух экспонент и безгранично возрастает по модулю при $\xi \rightarrow \infty$ или при $\xi \rightarrow -\infty$, что не подходит по смыслу задачи. Таким образом, бегущие волны имеют форму синусоиды, причем волна, бегущая со скоростью c , имеет длину

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \sqrt{a^2 - c^2}.$$

(Фактически волна, бегущая вдоль линии, затухает из-за множителя $e^{-\alpha}$ в формуле (Д.8).)

Мы видим, что линия пропускает только волны, длина которых находится в интервале $0 < \lambda < 2\pi/k$, причем волна с длиной λ распространяется с «фазовой скоростью»

$$c = c_\lambda = \pm \sqrt{a^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} \lambda^2},$$

меньшей, чем «групповая скорость» a распространения сигнала вдоль линии. Зависимость фазовой скорости от длины волны (или от частоты $\omega = kc/\sqrt{a^2 - c^2}$) приводит к искажению формы сигнала общего вида, получающегося при наложении гармонических колебаний при его прохождении вдоль по линии. Исключения составляют «линии без искажения», для которых $k = 0$, т. е. $R/L = G/C$ (см. (Д.10)), а потому c не зависит от λ и искажения не происходит.

Для других уравнений с частными производными не всегда удается найти решения типа бегущей волны и тем более построить с помощью таких волн общее решение. Тем не менее, когда такие волны удается найти, они могут дать весьма полезную информацию о характере изучаемого процесса. Отметим, что иногда бегущие волны ищутся в более общем виде $u = \varphi(t) f(x - ct)$ или $u = \psi(x) f(x - ct)$; это означает, что волна в процессе своего развития меняет

можно рассматривать для наглядности как поле скоростей плоского стационарного потока жидкости или лучше газа, так как с жидкостью обычно связывается свойство несжимаемости, которое здесь не требуется

При такой трактовке каждое частное решение системы (5.32) описывает закон движения какой-либо частицы газа. Каждому такому закону соответствует определенная траектория, т. е. линия, которую описывает частица в процессе движения. Обратное, каждой возможной траектории отвечает бесконечное число законов движения, различающихся лишь сдвигом во времени (ту же траекторию частица может проходить позже или раньше).

Задача Коши для системы (5.32) сводится к выяснению закона движения частицы, проходящей в заданный момент через заданную точку плоскости. В силу предположения о единственности решения этой задачи две различные траектории не могут иметь общих точек, т. е. вся фазовая плоскость как бы расслаивается на траектории.

Имеются три основных вида фазовых траекторий: точки покоя, циклы и непериодические траектории. Точкой покоя служит точка с координатами x_1^0, x_2^0 , для которой постоянные функции $x_1(t) \equiv x_1^0, x_2(t) \equiv x_2^0$ образуют решение системы (5.32), т. е. для которой

$$f_1(x_1^0, x_2^0) = 0, \quad f_2(x_1^0, x_2^0) = 0.$$

Такой точке отвечает состояние равновесия рассматриваемой реальной системы. Цикл (говорят также — периодическая траектория, замкнутая траектория) отвечает непостоянному периодическому решению системы (5.32), он описывает периодический процесс в реальной системе. Непериодические траектории — все остальные. Они могут существенно различаться по своему асимптотическому поведению как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$: уходить на бесконечность, стремиться к точке покоя, к циклу и т. д. Все эти способы поведения допускают реальное истолкование.

Рассмотрим несколько примеров. Уравнению свободных колебаний маятника без затухания после перехода к безразмерному времени можно придать вид (см. (4.32))

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin \varphi = 0.$$

Чтобы перейти к системе уравнений вида (5.32), обозначим $d\varphi/dt$ буквой ψ ; тогда получим систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sin \varphi. \quad (5.34)$$

Соответствующий фазовый портрет (совокупность всех траекторий на фазовой плоскости) показан на рис. 19, а. Он периодичен по φ с периодом 2π , так что достаточно ограничиться картиной между двумя штриховыми линиями, считая эти линии отождествленными, т. е. как бы свернув эту полосу в трубку. Другими словами, фазовым многообразием (Добавление, п. 5) здесь служит не плоскость, а

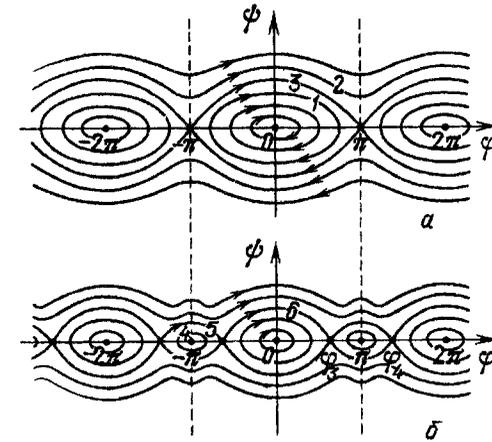


Рис. 19

цилиндрическая поверхность. На этой поверхности система имеет две точки покоя: $(0, 0)$, отвечающую нижнему положению, и $(\pi, 0)$, отвечающую верхнему положению маятника. Траектории типа 1 — циклы, отвечающие либрационным движениям (т. е. покачиваниям) маятника относительно нижнего, устойчивого положения равновесия. Траектории типа 2 непериодические (если рассматривать их на полной плоскости), им отвечают ротационные движения маятника, т. е. его вращения вокруг точки подвеса с неограниченным возрастанием фазового угла φ . Любопытна траектория, обозначенная цифрой 3: соответствующий режим отделяет либрационные движения от ротационных и состоит в асимптотическом стремлении маятника к верхнему положению равновесия при $t \rightarrow \pm \infty$. Такой режим, очевидно, неустойчив.

В качестве второго примера рассмотрим осредненное уравнение свободных колебаний маятника без затухания с часто колеблющейся точкой подвеса (см. уравнение (4.36)). После перехода к системе уравнений первого порядка и

введения безразмерного времени этой системе можно придать вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = -(1 + k \cos \varphi) \sin \varphi, \quad (5.35)$$

где $k = a^2 \omega^2 / (2lg) = \text{const} > 0$. Пока $k < 1$, фазовый портрет этой системы примерно такой же, как у (5.34). Но когда k , возрастая, переходит через значение $k = 1$ (см. условие (4.37)), бывшая неустойчивая точка покоя $(\pi, 0)$ становится устойчивой и от нее отделяются две вновь появившиеся неустойчивые точки покоя $(\varphi_3, 0)$ и $(\varphi_4, 0)$ *). Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 19, б. Мы видим, что появились траектории типа 4, которым отвечают либрационные движения маятника относительно его верхнего положения. Траектория типа 3 исчезла, взамен нее появились траектории, обозначенные цифрами 5 и 6, им соответствует асимптотический переход маятника из одного неустойчивого положения в другое.

Рассмотрим, наконец, важный формальный пример системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

Если перейти к полярным координатам в плоскости x_1, x_2 по формулам $x_1 = \rho \cos \varphi, x_2 = \rho \sin \varphi$, то после преобразований, которые мы предоставляем читателю, мы получим систему уравнений при $\rho > 0$

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho(1 - \rho^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Из второго уравнения мы видим, что луч, идущий из начала координат через движущуюся точку (x_1, x_2) , равномерно вращается с угловой скоростью 1. Первое же уравнение показывает, что при $0 < \rho < 1$ (соответственно, $1 < \rho < \infty$) ρ возрастает (убывает) и при $t \rightarrow \infty$ стремится к 1. Кроме того, система имеет неустойчивую точку покоя $\rho = 0$ и цикл $\rho = 1$. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 20: траектории типа 1 «скручиваются» с точки покоя и накручиваются на цикл 3 изнутри, тогда как траектории типа 2 «скручиваются с бесконечности» и накручиваются на тот же цикл извне. Такой цикл, служащий пределом для

*) Качественное изменение свойств объекта при переходе параметра через некоторое значение называется *бифуркацией* этого объекта (от латинского слова «бифуркус» — раздвоенный). В данном примере значение $k = 1$ — точка бифуркации системы (5.35).

незамкнутых траекторий, называется *предельным циклом*. В данном примере предельный цикл устойчивый — в том смысле, что траектории, проходящие через все близкие к нему точки, при $t \rightarrow \infty$ стремятся к этому циклу.

Устойчивый предельный цикл описывает *автоколебания* изучаемой системы. Это периодический самоподдерживающийся процесс, который при любых достаточно малых возмущениях вновь восстанавливается по прошествии некоторого переходного этапа. Такой процесс возможен только в нелинейной системе, способной к обмену энергией в обоих направлениях с внешними объектами. Автоколебания весьма распространены в природе и технике, от «шума моря» в раковине до флаттера крыльев самолета.

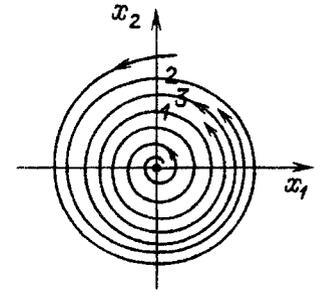


Рис. 20

Понятие фазового портрета системы (5.31) при любом n вводится аналогично, однако здесь фазовое пространство n -мерно и его «точками» служат наборы чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) ; такое пространство обозначают R^n (сравните с п. 5 Дополнения). Векторная запись системы (5.31) имеет тот же вид (5.33), где \mathbf{r} — радиус-вектор в R^n ; поэтому и истолкования системы уравнений как поля скоростей, а решения — как закона движения точки сохраняются. Сохраняется и представление о расслоении фазового пространства на траектории трех типов, хотя теперь фазовый портрет системы может оказаться существенно более сложным, чем при $n = 2$.

Большое число подробно разобранных примеров с помощью метода фазового портрета можно найти, в частности, в книге [3].

7. Обобщенные решения. Если математическая модель сведена к задаче о решении некоторого уравнения, то мы обычно, формулируя это явно или нет, представляем себе, в каком классе математических объектов должно содержаться искомое решение. Например, если ищется число элементов некоторого множества (скажем, число присутствующих людей), то решение должно быть целым неотрицательным числом; если ищется закон изменения тока в цепи, то решение после перехода к безразмерным величинам должно быть вещественной функцией вещественной переменной и т. п. Решив уравнение, мы проверяем, действительно ли

найденное решение попало в требуемый класс объектов; если не попало, то такое решение чаще всего отбрасывается как не удовлетворяющее смыслу задачи.

Однако не так уж редко бывает, что решение, не попавшее в заранее установленный класс, может оказаться полезным и даже имеющим реальный смысл, хотя порой и не совсем тот, который первоначально подразумевался. Такие решения задачи естественно считать *обобщенными* и возможность их появления надо иметь в виду, анализируя, действительно ли полученное решение является полностью бессмысленным.

Так, широко известен пример неправильного ответа «два землекопа и две трети» к школьной задаче из стихотворения С. Я. Маршака. Автор интерпретирует эти $2/3$ как человека «без ног, без головы», и действительно при такой интерпретации ответ грубо ошибочен. Но может быть (условие задачи не приведено), речь шла о числе землекопов, необходимом для выполнения определенной работы за рабочий день? Тогда смысл решения, которое является обобщенным, состоит в том, что третий землекоп должен работать лишь $2/3$ рабочего дня.

Формулу (5.14) можно считать определяющей обобщенное решение уравнения (5.10). В самом деле, мы искали решение в виде суммы ряда, но построенный ряд оказался расходящимся при всех t , т. е. не имеющим суммы. Конечно, можно было бы сказать, что полученное решение неприемлемо и этим ограничиться. Но мы видели, что хотя формула (5.14) и не дает решение в обычном смысле, но ее можно применить как для получения асимптотических формул, так и для приближенного вычисления значений «истинных» решений. В этом смысле можно в данном случае говорить об обобщенном решении.

Важный пример обобщенных решений составляют комплексные решения линейных автономных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами в случаях, когда по постановке задачи эти решения должны быть вещественными. Применение комплексных решений в теории колебаний и ее разнообразных приложениях к механике, электротехнике и т. д. сейчас столь распространено, что такие решения воспринимаются как вполне естественные — хотя, конечно, истинные значения колеблющихся физических величин вещественны.

Причины этой распространенности чисто формальные, они связаны с уникальной простотой формулы для производ-

ной показательной функции:

$$(e^{pt})' = pe^{pt}.$$

Это дает возможность весьма просто вычислять линейные дифференциальные выражения от такой функции, например,

$$\left(a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx \right) \Big|_{x=Me^{pt}} = \\ = (ap^2 + bp + c) Me^{pt} = (ap^2 + bp + c) x. \quad (5.36)$$

Аналогичные формулы имеют место при интегрировании экспоненты и при решении дифференциальных уравнений упомянутого выше типа с экспонентой в правой части. С другой стороны, при вычислении линейного дифференциального выражения L с вещественными коэффициентами от комплексной функции, действия над ее вещественной и мнимой частями производятся независимо друг от друга:

$$L[x_1 + ix_2] = L[x_1] + iL[x_2],$$

то есть

$$L[\operatorname{Re} x] = \operatorname{Re} L[x], \quad L[\operatorname{Im} x] = \operatorname{Im} L[x],$$

где под Re (Im) понимается вещественная (мнимая) часть. Например,

$$\left(a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx \right) \Big|_{x=Me^{it} \cos st} = \\ = \operatorname{Re} \left\{ \left(a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx \right) \Big|_{x=Me^{(t+is)t}} \right\}$$

(если a, b, c вещественны), а правую часть уже можно вычислять с помощью формулы (5.36). Аналогичные правила справедливы при решении дифференциальных уравнений. Это дает возможность при решении таких уравнений и их систем заменять исходные гармонические и затухающие гармонические зависимости на экспоненты с комплексным показателем, а получив решение задачи, взяв его вещественную часть в качестве окончательного ответа.

Рассмотрим в качестве простого примера электрическую цепь, показанную на рис. 21, и пусть нас интересуют токи j_1, j_2 , установившиеся в цепи после переходного этапа. Уравнения для токов сразу следуют из теории электрических цепей:

$$A \sin \omega t - R_1(j_1 + j_2) = L \frac{dj_1}{dt} + R_2j_1 = \frac{1}{C} \int j_2 dt,$$

причем постоянная в интеграле выбирается так, чтобы он имел нулевое среднее значение. Согласно сказанному выше заменим заданную функцию $A \sin \omega t$ на $Ae^{i\omega t}$, для которой первая является мнимой частью; тогда уравнения для соответствующих «комплексных токов» примут вид

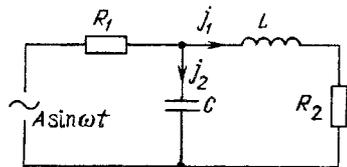


Рис. 21

$$\begin{aligned} Ae^{i\omega t} - R_1 (J_1 + J_2) &= \\ &= L \frac{dJ_1}{dt} + R_2 J_1 = \frac{1}{C} \int J_2 dt. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Будем искать установившиеся токи в виде $J_1 = I_1 e^{i\omega t}$, $J_2 = I_2 e^{i\omega t}$. Подстановка этих выра-

жений в (5.37) после сокращения на $e^{i\omega t}$ приводит к уравнениям

$$A - R_1 (I_1 + I_2) = Li\omega I_1 + R_2 I_1 = \frac{1}{C} \frac{1}{i\omega} I_2.$$

Отсюда легко найти

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{A}{R_1 (1 - LC\omega^2) + R_2 + (L + R_1 R_2 C) \omega i}, \\ I_2 &= \frac{AiC\omega (R_2 + L\omega i)}{R_1 (1 - LC\omega^2) + R_2 + (L + R_1 R_2 C) \omega i} \end{aligned}$$

и искомые токи

$$j_1 = \text{Im} (I_1 e^{i\omega t}), \quad j_2 = \text{Im} (I_2 e^{i\omega t}). \quad (5.38)$$

С помощью формулы Эйлера для $e^{i\omega t}$ нетрудно выразить j_1 , j_2 в «полностью вещественной» форме, через $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Однако в ряде отношений формулы (5.38) удобнее: например, мы сразу получаем, что амплитуда тока j_1 равна

$$|I_1| = \frac{A}{\sqrt{[R_1 (1 - LC\omega^2) + R_2]^2 + (L + R_1 R_2 C)^2 \omega^2}}$$

и т. д. Поэтому ответ обычно предпочитают оставлять в форме (5.38) либо в форме комплексного обобщенного решения.

Еще один тип обобщенных решений возникает из-за отсутствия у построенного решения тех производных, которые предполагались при выводе уравнения, — как говорят, из-за недостаточной гладкости решения. Рассмотрим, например, одномерное волновое уравнение (5.25) и его общее решение в виде суммы прямой и обратной волн (5.27);

здесь f_1 и f_2 — произвольные функции одного аргумента. При выводе уравнения (5.25) предполагалось, что функция $u(x, t)$ имеет производные второго порядка, так что, казалось бы, от функций f_1 и f_2 также надо требовать наличие производных того же порядка. Но чтобы пользоваться формулой (5.27), этого не требуется! Поэтому естественно считать, что если это «условие гладкости» функций f_1 и f_2 не выполнено, то формула (5.27) дает обобщенное решение уравнения (5.25). (Отметим, впрочем, что если производные понимаются в смысле теории так называемых обобщенных функций, простейшим представителем которых является дельта-функция, то условие гладкости функции u в уравнении (5.25) отпадает. Но решение, понимаемое в смысле теории обобщенных функций, все равно считается обобщенным.)

Этот переход имеет общий характер. Если дифференциальное уравнение в предположении определенной гладкости решений можно преобразовать к равносильной форме, а эта новая форма требует от решений меньшей гладкости, то естественно новые решения, не удовлетворяющие старым требованиям, считать обобщенными решениями исходного уравнения.

8. Выбор степени точности решения. Система уравнений, составляющая математическую модель реального объекта, обычно допускает различные методы решения, в результате применения которых само решение получается с большей или меньшей точностью. Большая точность, как правило, требует большей, иногда существенно большей затраты труда, поэтому выбор метода решения составляет ответственный этап применения математики.

Рассмотрим схему построения решения:

$$\text{реальный объект} \rightarrow \text{математическая модель} \rightarrow \text{решение.} \quad (5.39)$$

Как мы говорили в п. 4 § 1, математическая модель имеет большую или меньшую адекватность реальному объекту по изучаемым свойствам. В свою очередь, решение обладает определенной точностью по отношению к модели. Правильность описания решением изучаемых свойств определяется обоими этими обстоятельствами.

Чтобы проиллюстрировать их взаимодействие, приведем простую аналогию. Пусть две фабрики, Φ_1 и Φ_2 последовательно загрязняют воду: каждый килограмм чистой воды, проходя через Φ_1 , приобретает p_1 кг загрязнений, а каждый килограмм уже загрязненной воды проходит через Φ_2 и

приобретает p_2 кг загрязнений того же типа. Пусть обе фабрики принадлежат одному объединению, которое, затрачивая ежегодно некоторые средства, может уменьшить значения p_1 , p_2 тем сильнее, чем больше затраты. Пусть дирекция искренне хочет уменьшить загрязнение воды; как разумно распорядиться средствами для этого?

Заметим, что на 1 кг воды в итоге приходится

$$p = (1 + p_1)(1 + p_2) - 1 = p_1 + p_2 + p_1p_2$$

кг загрязнений. Пусть (мы утрируем картину) сначала было $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,1$; тогда $p = 0,32$. Пусть p_1 уменьшить затруднительно, но при ежегодных затратах S руб. можно снизить p_2 до 0,01. Тогда p снизится до 0,212, т. е. на 34 %, что довольно существенно. Пусть, далее, при удвоении ежегодных затрат можно p_2 снизить до 0,001. Тогда p снизится до 0,2012, т. е. добавочные S руб./год снизят загрязненность на 5 %, что уже менее эффективно. Пусть, вновь удваивая затраты, мы можем снизить p_2 до 10^{-4} ; тогда на каждые добавочные S руб./год придется снижение загрязненности на 0,27 %, т. е. эти затраты практически не принесут никакой пользы. Здесь картина совершенно ясна: как бы мы ни старались уменьшить загрязненность от деятельности Φ_2 , даже доведя ее до нуля, мы не можем сделать итоговую загрязненность ниже той, которая получается от Φ_1 . Вместо того чтобы увеличивать очистные затраты на Φ_2 , надо сосредоточить внимание на Φ_1 , так как уже при $p_2 = 0,01$ дальнейшее уменьшение p_2 неэффективно, но любое уменьшение p_1 сразу улучшит картину.

Вернемся к схеме (5.39). Нам нужно, чтобы решение математической задачи правильно описывало свойства реального объекта. Для этого надо повышать как адекватность математической модели, так и точность решения математической задачи. Если математическая модель грубая, имеет низкую адекватность или если точность исходных данных неудовлетворительна, то никакое повышение точности решения, привлечение сложных математических методов и вычислительных средств не могут сделать окончательный результат достаточно надежным. Об этом необходимо помнить, так как упомянутые методы и средства могут создать вредную иллюзию правильности, высокой точности окончательного результата и вводить в заблуждение как самого исполнителя, так и других людей: трудно примириться с тем, что значительные усилия и искусство, проявленные при решении математической задачи, могли оказаться практически бесплодными. Поэтому в подобных

случаях центральную роль должны играть не столько все большее уточнение вычислительного метода (который, конечно, не должен быть слишком грубым), сколько анализ и совершенствование математической модели.

Иллюзия достоверности ответа может также создаваться лишними значащими цифрами в решении. Вклад в эту иллюзию вносят ЭВМ, которое обычно выдают решение с предусмотренным для них числом значащих цифр независимо от грубости примененного вычислительного метода и тем более неадекватности математической модели. Например, если мы вздумаем вычислять длину земной орбиты при движении вокруг Солнца по грубой формуле $L = 2\pi R$, введя вместо R грубое значение $0,149 \cdot 10^9$ км, то ЭВМ выдаст значение $L = 0,936194611 \cdot 10^9$ км, как будто ответ известен с точностью до 1 км — что, конечно, не так: в действительности уже третья цифра после запятой сомнительна. Поэтому так важен контроль точности решения, о котором будет говориться в § 6.

В силу сказанного как в исходных данных, так и в ответах весьма желательно указывать их точность, если это возможно. Это можно делать в явной форме, например, $3,171 \pm 0,013$; $0,26_{-0,01}^{+0,02}$ и т. п. Если таких наращиваний нет, то часто считается, что для результата вычисления (соответственно измерения) погрешность не должна превышать единицы (половины) последнего из выписанных разрядов. Впрочем, допускается и небольшое превышение такой «нормы», если представляется, что это не будет иметь существенных последствий. При такой договоренности записи типа $m = 1800$ т, вполне допустимые в качественных рассуждениях, для математической обработки нежелательны, так как они не дают уверенного представления о точности; предпочтительнее численное значение писать в виде $1,8 \cdot 10^3$ или $1,800 \cdot 10^3$. (Конечно, от приближенных числовых значений надо отличать точные, как числа 2 и π в формуле $L = 2\pi R$ или число 1000 в выражении «1 км = 1000 м» и т. п.)

Приведем в заключение простой пример, показывающий ненужность чрезмерной точности решения. Хорошо известна простая задача на максимум: из квадратного листа жести со стороной a надо, вырезав одинаковые квадратики по углам, согнуть пятистенную коробку в форме прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема. Для этого, обозначив длину стороны квадратиков буквой x , получим

объем коробки

$$V = (a - 2x)^2 x, \quad (5.40)$$

откуда легко находим, что $V_{\max} = 2a^3/27$ достигается при $x = a/6 = 0,1667a$. Какая точность в этом ответе разумна? Простой подсчет показывает, что при $0,15a < x < 0,185a$ значение V отличается от V_{\max} менее чем на 1%. А так как отклонения реальных значений V от значений (5.40) из-за несовершенства изготовления вряд ли будут меньшими, то и высокая точность в значении x (скажем, выше 10%) в данном примере излишня.

9. Выяснение точности решения. Допустим, что мы выбрали систему уравнений, составляющую математическую модель изучаемого объекта, и построили приближенное решение этой системы. Оставляя вопрос об адекватности модели в стороне, поговорим о том, как выяснить точность полученного ответа как решения математической задачи.

Вообще, причины, порождающие ошибку при применении математической модели и проведении вычислений, можно грубо подразделить на: 1) ошибки, порожденные неадекватностью этой модели; 2) ошибки в исходных числовых данных; 3) ошибки вычислительного метода; 4) ошибки округлений в процессе вычислений. Как было сказано, сейчас мы отвлекаемся от первой причины.

Чтобы оценить влияние ошибок в исходных числовых данных на решение, можно в соответствии со сведениями об этих ошибках по тому или иному правилу произвольно «пошатать» исходные данные и посмотреть, как это скажется на решении. Приведем простой пример: пусть надо вычислить значение

$$q = \frac{cb^2 - a^3b}{ad^3 + e},$$

где $a = 1,37$, $b = 20,6$, $c = 3,32$, $d = 0,27$, $e = 2,15$ и возможная погрешность достигает единицы в последней цифре. Для подобных простых примеров имеются свои специальные правила определения погрешности, но мы не будем здесь ими пользоваться, а продемонстрируем метод «шатания». Непосредственное вычисление на микрокалькуляторе дает значение $q = 622,84184$, но сразу ясно, что большинство цифр здесь сомнительны. Заменяв наугад (это можно делать с помощью датчика случайных чисел) исходные данные на $a = 1,38$; $b = 20,5$; $c = 3,31$; $d = 0,28$; $e = 2,16$, получаем

$q = 610,48981$. Другие попытки шатания исходных данных приводят к изменениям q того же порядка. Значит, ответ надо дать в виде: $q = 6,2 \cdot 10^2$.

В связи со сказанным упомянем о полезном понятии чувствительности $S(y, x)$ функции $y(x)$ при данном значении аргумента: это коэффициент пропорциональности между малыми относительными изменениями dx/x аргумента и dy/y функции, т. е. $dy/y = S(y, x) dx/x$, откуда

$$S(y, x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}.$$

Аналогично определяется чувствительность функции нескольких переменных по каждой из них. Особенно просто выражается чувствительность для степенных функций: так, если $z = x^3/y^2$, то $S(z, x) = 3$, $S(z, y) = -2$.

Для оценки возможного влияния ошибок вычислительного метода наиболее убедительным является сравнение ответа с результатом решения той же задачи с помощью другого, независимого метода. Так, решение краевой задачи, полученное методом сеток, можно проверить, построив ее решение по методу Галеркина или методу конечных элементов. Возможна также проверка решения в рамках одного метода. Например, результат, полученный методом сеток, можно проверить, уменьшив шаг сетки; результат применения метода Галеркина можно проверить, изменив базис, и т. д. (Впрочем, для некоторых простых задач, например задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, выдерживание заданной точности может осуществляться автоматически с помощью стандартной программы на ЭВМ.) Если речь идет о решении серии однотипных задач, различающихся значениями параметров, то такой контроль полезно провести для нескольких наборов значений параметров, достаточно убедительно представляющих полный диапазон их значений. Для некоторых таких наборов решение или его компоненты (амплитуда и т. п.) могут быть известны из каких-либо дополнительных соображений — например, из эксперимента; соответствие построенного решения этим сведениям также повышает доверие к нему.

Что касается ошибок округления, то в эпоху ЭВМ они приобрели особую актуальность. Когда в длинных цепочках вычислений последующие выкладки все время опираются на результаты предыдущих, ошибки округления могут разрастаться до такой степени, что, начиная с некоторого момен-

та, мы будем иметь дело в сущности с одними лишь ошибками — как бы шум полностью заглушит мелодию.

Вот яркий пример такого эффекта [4]. Пусть нам надо вычислить интеграл

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

при $n = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что при $0 < x < 1$ имеем $x^0 > x^1 > x^2 > \dots$ и потому

$$I_0 > I_1 > I_2 > \dots > 0. \quad (5.41)$$

Кроме того, с помощью интегрирования по частям легко установить, что

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5.42)$$

Поэтому, вычислив $I_0 = 1 - 1/e = 0,6321206$, можно с помощью рекуррентной формулы (5.42) последовательно вычислить $I_1 = 1 - 1I_0$, $I_2 = 1 - 2I_1$, ... Приведем результаты $I_n^{(1)}$ вычисления таким методом значений I_n :

n	0	1	2	3	4	5
$I_n^{(1)}$	0,6321206	0,3678794	0,2642412	0,2072764	0,1708944	0,145528
n	6	7	8	9	10	11
$I_n^{(1)}$	0,126832	0,112176	0,102592	0,076672	0,23328	-1,56608

При $n > 9$ эти результаты явно ошибочны, так как противоречат неравенствам (5.41).

Причины ошибки легко понять: при вычислении $I_n^{(1)}$ первоначальная погрешность округления I_0 умножается на $n!$, а так как точное значение I_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то относительная погрешность стремительно возрастает.

Данные вычисления нетрудно перестроить так, чтобы погрешность не разрасталась, а уменьшалась. Для этого достаточно в соотношении (5.42) заменить n на $n + 1$ и переписать его в виде

$$I_n = \frac{1}{n+1} (1 - I_{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Теперь можно вычислять I_n , переходя от больших значений n к меньшим, положив некоторое стартовое I_n просто равным

нулю, причем при последовательных вычислениях влияние погрешности этого допущения и последующих округлений будет затухать. Так, положив $I_{13}^{(2)} = 0$, получаем значения

n	12	11	10	9	8
$I_n^{(2)}$	0,0769230	0,0769230	0,0839160	0,0916084	0,1009324
n	7	6	5	4	
$I_n^{(2)}$	0,1123834	0,1268023	0,1455329	0,1708934	
n	3	2	1	0	
$I_n^{(2)}$	0,2072766	0,2642411	0,3678794	0,6321206	

Более точные вычисления дают значения

n	12	11	10	9	8	7
I_n	0,0717732	0,0773522	0,0838770	0,0916123	0,1009319	0,1123835

а в остальных результатах для $I_n^{(2)}$ все выписанные цифры верны. Хорошо видно, как происходит приближение значений $I_n^{(2)}$ к точным, и наоборот, удаление $I_n^{(1)}$ от них.

Ошибки округления при решении дифференциальных уравнений дискретными методами могут создать парадоксальную ситуацию: желая повысить точность результата, мы измельчаем шаги, но если применяемый метод выбран неудачно (*неустойчив* в вычислительном отношении), то из-за увеличения числа действий ошибки округления начинают сказываться сильнее и итоговая погрешность возрастает. Часто такая неустойчивость обнаруживается сама, порождая быстро разрастающиеся осцилляции решения и даже переполнение ячеек, совершенно не согласующиеся с реальным смыслом задачи. В менее острых ситуациях влияние ошибок округления можно выяснить с помощью повторного вычисления с удвоенной точностью, или с одной недостающей значащей цифрой, или с измененным шагом интегрирования и т. д.

10. Особенности процесса решения содержательных задач. Мы уже говорили, что при решении уравнений, составляющих математическую модель, за математическими величинами все время скрываются их физические

прототипы. Это дает возможность в процессе решения в необходимых случаях опираться на интуицию, применять наглядные и физические соображения. Однако слишком вольные отклонения от строгих математических рассуждений могут приводить к существенным ошибкам; поэтому логические пробелы и другие слабые места в рассуждениях должны ясно осознаваться. В то же время интуицию, позволяющую выбрать правильный метод решения и избежать ошибок при наличии таких слабых мест, надо всячески развивать.

Одной из характерных черт прикладных математических исследований является широкое применение понятий, не вполне четко определенных с позиций строгой математики; такие понятия принято называть *размытыми*. Так, мы можем говорить, что тот или иной вычислительный метод в определенных условиях хорош или плох, что некоторый ряд или итерационный процесс сходится быстро или медленно, что погрешность приближенного решения велика или мала и т. п., не давая этим терминам (по существу, понятиям) строгого определения — что не мешает им нести полезную информацию.

Важным размытым понятием, широко применяемым при решении содержательных задач, является понятие *практической сходимости* бесконечного процесса, означающее возможность получения ответа за приемлемое число шагов с приемлемыми точностью и достоверностью. Допустим, что речь идет о бесконечном ряде. В курсе математики, изучая сходимость ряда, мы обычно считаем, что все его члены заданы явной формулой или удовлетворяют явно выписанному неравенству. В отличие от этого в приложениях математики (например, при применении метода малого параметра, см. п. 3 § 4) обычно члены ряда просто вычисляют один за другим. Ясно, что при таком образе действий строго доказать сходимость ряда невозможно. Но этого и не делают; вместо этого сравнивают друг с другом последовательные частные суммы ряда и если обнаружится отчетливая тенденция к сходимости (кстати, это понятие также является размытым) и нет оснований ожидать, что дальнейшие члены нарушат эту тенденцию, то вычисления прекращают, принимая полученную частную сумму за полную сумму ряда. Аналогичным образом рассматривают на практике бесконечные процессы других типов, причем часто совершение 2—3 шагов позволяет уловить тенденцию. Так, при применении метода сеток заключение о практической сходимости можно сделать, сравнив результаты вычислений при уменьшении

шага сетки; если применяют метод типа Галеркина, то сравнивают результаты вычислений при расширении множества координатных функций и т. п.

К сказанному добавим, что признание того или иного процесса практически сходящимся или расходящимся существенно зависит от тех вычислительных средств, которыми мы располагаем. При этом бесконечный процесс — например, ряд, — сходящийся в чисто математическом смысле, не всегда является практически сходящимся; см. примеры в п. 11 или еще более эффективный пример

$$1 - \frac{100}{1!} + \frac{100^2}{2!} - \frac{100^3}{3!} + \dots = e^{-100}.$$

(Прикидка показывает, что для подсчета суммы этого «быстро сходящегося» с абстрактных позиций ряда с точностью до 10 верных цифр потребуются вычислить значения примерно 400 членов с точностью до 10^{-55} , из-за чего средние члены в этой сумме придется подсчитывать со 100 верными цифрами!) И обратно, примеры п. 2 показывают, что ряд, расходящийся в смысле чистой математики, может оказаться практически сходящимся. Правильная квалификация процессов как практически сходящихся опирается не только на логические рассуждения, но и в еще большей мере на анализ своего и чужого опыта, на пробы и ошибки, позволяющие накопить правильную интуицию.

Важный частный случай размытых понятий составляют *размытые величины*. Они сохраняют некоторые признаки математических величин, но не обладают четкостью последних. Пусть, например, мы добиваемся того, чтобы погрешность приближенного решения оказалась малой. Но что означает выражение «малая погрешность»? Это зависит от типа рассматриваемых задач, от традиций, возможных последствий ошибки и других явно или неявно не очень четко формулируемых условий, причем возникающие критерии малости сами являются размытыми. Допустим, что малой условились считать погрешность в 1 %, а она получилась равной 1,5 %. Тогда в большинстве случаев погрешность все равно назовут малой; погрешность в 10 % вряд ли будет сочтена малой, а по поводу погрешности в 3 % может возникнуть дискуссия, неизбежная при применении размытых понятий на нечеткой границе их действия.

При исследовании математических моделей широко применяется *рассуждение по аналогии*. Пусть, например, показано, что некоторый метод хорошо проявил себя при решении какой-то задачи 3. Тогда часто тот же метод уже без

дополнительного исследования применяют и при решении других задач, аналогичных 3; ссылка на задачу 3 как бы служит обоснованием хорошего качества решения. Конечно, при этом можно и промахнуться, так как каждая новая задача имеет свою специфику. Но все же чаще разумная аналогия оказывается плодотворной, а если сохранять бдительность и действовать на основе здравого смысла и интуиции, то ошибок, как правило, удается избежать.

В исследование математической модели может быть включен численный или физический эксперимент и т. д. В книге [6] содержится подробный анализ различных типов рассуждений, не обязательно вполне совершенных с позиций формальной логики, но полезных и потому широко применяемых при решении содержательных задач; там такие рассуждения названы *рациональными*.

11. О применении ЭВМ. ЭВМ превратились сейчас в повседневное орудие прикладной математики. Они не только повысили на много порядков скорость и точность вычислений для известных ранее классов задач, но и впервые сделали возможным решение огромного числа других задач. Однако ЭВМ потребовали существенного изменения многих вычислительных методов и даже всей «вычислительной идеологии».

Значительную роль приобрел вычислительный эксперимент. В ряде случаев вместо попытки аналитического исследования свойств решений оказалось более целесообразным выяснить эти свойства, построив решения на ЭВМ. Это относится, в частности, к решениям дифференциальных уравнений, включая свойства, связанные с асимптотическим поведением решений, например с выяснением устойчивости. Разновидностью вычислительного эксперимента является так называемое *имитационное моделирование*, применяемое для анализа поведения сложных экономических и т. п. задач, для которых математическую модель в виде системы уравнений даже выписать затруднительно (см. [19], [34]).

В качестве примера перестройки подходов, вызванной ЭВМ, укажем на решение нелинейных дифференциальных уравнений. В «домашинную» эру считалось само собой разумеющимся, что если в таком уравнении можно понизить порядок с помощью некоторой подстановки, то это следует сделать. Например, для решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (5.43)$$

рекомендовалось рассматривать зависимость $dx/dt = p$ от x , что приводит к уравнению первого порядка $p dp/dx = f(x, p)$. Если нам удастся найти его решение $p = \varphi(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям, то получаем соотношение $\int dx/\varphi(x) = t + C$ и, вновь применяя начальное условие, приходим к конечному уравнению, связывающему t с x . Такая процедура при аналитическом исследовании иногда приводит к цели, однако это удается лишь в редких случаях (если не говорить о специально подобранных примерах) и приходится прибегать к численному интегрированию. Но для численного решения эта процедура плохо приспособлена, менее трудоемким оказывается непосредственное численное интегрирование уравнения (5.43) без понижения его порядка. Так и надо поступать при работе на ЭВМ. Таким образом, надо уметь хотя бы совсем грубо оценивать объем вычислительной работы, необходимой для доведения решения задачи до конца различными методами, имея в виду современные имеющиеся в распоряжении вычислительные средства.

В качестве другого примера такой перестройки укажем на вычисление сумм числовых рядов. Ранее для этого широко применялись разнообразные искусственные преобразования, некоторые из них и сейчас не потеряли актуальности; однако при применении ЭВМ нередко более эффективным оказывается непосредственное суммирование членов ряда. Но при этом, как и в других подобных случаях, весьма ответственным этапом является *подготовка задачи к программированию*, т. е. выбор алгоритма, наиболее эффективного для решения конкретной задачи.

Поясним сказанное на простом примере. Пусть мы хотим вычислить сумму бесконечного ряда

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

причем, понадеявшись на мощь ЭВМ, решили не применять никаких ухищрений, а просто подсчитывать и складывать члены ряда, пока они не обратятся в машинный нуль. Однако несложный подсчет, который мы предоставляем читателю, показывает, что для ЭВМ средней мощности на это уйдет около 10 ч; при этом итоговая ошибка, даже без учета округлений, получится на десять порядков выше последних слагаемых.

Описанная схема вычислений крайне нерациональна. Результат получится гораздо быстрее и точнее, если, например, просуммировать 10^4 первых членов ряда (это займет

время порядка 0,1 с), а остаток заменить по приближенной формуле

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \approx \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{2}{2n+1},$$

точность которой имеет порядок $0,1 n^{-3}$. Таким образом, разумная подготовка задачи к программированию позволила здесь уменьшить время работы более чем на пять порядков! (Конечно, в данном примере можно было воспользоваться и справочниками, согласно которым $S = \pi^2/6$, но это редкий случай, когда сумма ряда явно выражается через известные константы.)

В качестве еще одного примера неразумной и разумной организаций алгоритма приведем вычисление значения e^{-10} , которое с точностью до 10^{-7} равно $4,54 \cdot 10^{-5}$. Вычисление на микрокалькуляторе по тейлоровскому разложению

$$e^{-10} = 1 - 10 + \frac{1}{2!} \cdot 10^2 - \frac{1}{3!} \cdot 10^3 + \dots$$

дает значение $1,112 \cdot 10^{-4}$, т. е. ошибку в 140%! Причину этого нетрудно понять: хотя члены ряда в конечном счете стремятся к нулю, они перед этим успевают сильно возрасти, а так как вся сумма мала, т. е. эти возросшие члены почти взаимно уничтожаются, то погрешности в них оставляют существенный вклад (о подобной ситуации мы упоминали в п. 6 § 1). Простая перестройка алгоритма в соответствии с формулой

$$e^{-10} = (e^{10})^{-1} = \left(1 + 10 + \frac{1}{2!} 10^2 + \frac{1}{3!} 10^3 + \dots\right)^{-1}$$

устраняет эту трудность и приводит к значению $4,57 \cdot 10^{-5}$ с погрешностью 0,7%.

Если решение математической задачи не сводится к указанию одного или небольшого набора чисел, то возникает еще *проблема представления результатов*, чтобы можно было их обзреть и ими пользоваться. Такая проблема возникает, в частности, для задач, содержащих параметры. Приведем простой пример: пусть мы хотим составить таблицу, с помощью которой можно было бы решать полное кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (5.44)$$

при любых задаваемых коэффициентах a, b, c, d . Тогда, если допустить, что каждый из них может принимать 50 зна-

чений — а это не так уж много, — то всего получится $50^4 \approx 6 \cdot 10^6$ комбинаций этих значений. Средней ЭВМ для выдачи результатов потребуется неделя непрерывной работы (основное время уйдет на печать), а результаты займут около 200 км ленты и ими практически невозможно будет пользоваться! Поэтому весьма актуальным является один из основных тезисов, неоднократно подчеркиваемый Р. Хеммингом в книге [31], предназначенной для инженеров, имеющих дело с ЭВМ: прежде чем решать задачу, подумай, что делать с ее решением.

На самом деле положение с таблицей для решения уравнения (5.44) не такое уж печальное. Сделав подстановку $x = \alpha u + \beta$, получаем уравнение для u :

$$a\alpha^3 u^3 + (3a\alpha^2\beta + b\alpha^2) u^2 + (3a\alpha\beta^2 + 2b\alpha\beta + c\alpha) u + (a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d) = 0. \quad (5.45)$$

Выберем α и β так, чтобы между новыми коэффициентами имели место такие соотношения:

$$3a\alpha^2\beta + b\alpha^2 = 0, \quad a\alpha^3 = a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d.$$

Отсюда находим

$$\beta = -\frac{b}{3a}, \quad \alpha = \sqrt[3]{q}, \quad \text{где } q := \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

При таких α, β уравнение (5.45) после деления на $a\alpha^3$ приобретает вид

$$u^3 + ru + 1 = 0, \quad \text{где } r := \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right) / \alpha^2. \quad (5.46)$$

Это уравнение содержит всего один параметр r . Таблицу решений уравнения (5.46) в зависимости от r уже нетрудно составить с помощью ЭВМ, даже если r придать не 50, а 5000 значений. В результате решение уравнения (5.44) можно будет найти с помощью построенной таблицы $u(r)$, извлечения корня (для чего потребуется еще одна таблица или микрокалькулятор) и простых арифметических действий по схеме:

$$(a, b) \rightarrow \beta; \quad (a, b, c, d) \rightarrow q; \quad q \rightarrow \alpha;$$

$$(a, b, c, \alpha) \rightarrow r; \quad r \rightarrow u; \quad (\alpha, \beta, u) \rightarrow x.$$

Это, конечно, несравненно проще, чем применение таблицы с четырьмя или даже с тремя входами.

Следующий пример представляет больший практический интерес. С помощью основных законов механики нетрудно

вывести уравнение колебаний маятника, длина которого $l = l(t)$ изменяется по заданному закону. В случае пренебрежимо малого трения это уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(l^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) + gl \sin \varphi = 0, \quad (5.47)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали. Рассмотрим случай, когда длина меняется по гармоническому закону: $l = l_0 + a \cos \omega t + b \sin \omega t$, причем будем считать, что $|a| + |b| \ll l_0$, а φ мало. Тогда, проводя линеаризацию уравнения (5.47) по a , b , а затем по φ , получаем

$$l_0 \frac{d}{dt} \left[(l_0 + 2a \cos \omega t + 2b \sin \omega t) \frac{d\varphi}{dt} \right] + g (l_0 + a \cos \omega t + b \sin \omega t) \varphi = 0.$$

Умножив обе части этого уравнения на $l_0 + 2a \cos \omega t + 2b \sin \omega t$ и сделав после этого замену $dt = (l_0 + 2a \cos \omega t + 2b \sin \omega t) d\tau / l_0$, т. е.

$$\tau = l_0 \int_0^s \frac{ds}{l_0 + 2a \cos \omega s + 2b \sin \omega s},$$

приходим к уравнению

$$l_0^2 \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + g (l_0 + a \cos \omega t + b \sin \omega t) \times (l_0 + 2a \cos \omega t + 2b \sin \omega t) \varphi = 0.$$

Вновь проводя линеаризацию по a , b , в результате чего члены $a \cos \omega t$, $b \sin \omega t$ заменяется соответственно на $a \cos \omega \tau$, $b \sin \omega \tau$, получим после деления на l_0^2 уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + (u + v \cos \omega \tau + w \sin \omega \tau) \varphi = 0, \quad (5.48)$$

где обозначено $u = g/l_0$, $v = ag/l_0^2$, $w = bg/l_0^2$. Это же уравнение (5.48) служит математической моделью и ряда других процессов. Нас будет интересовать возможность наглядного представления наиболее важных свойств его решений.

Уравнение (5.48) содержит четыре параметра u , v , w , ω ; при каждом их выборе оно имеет двухпараметрическое множество решений (общее решение включает две произвольных постоянных), а каждое решение представляет собой функцию τ . Поэтому упомянутое наглядное представление сначала кажется сомнительным. Однако оно возможно.

Прежде всего, число параметров в уравнении можно понизить до двух. Для этого преобразуем

$$v \cos \omega \tau + w \sin \omega \tau = r \cos (\omega \tau - \alpha) \\ (v = r \cos \alpha, w = r \sin \alpha),$$

после чего введем обозначения

$$\omega \tau - \alpha = 2\theta, \quad \frac{4}{\omega^2} u = p, \quad \frac{4}{\omega^2} r = -2\epsilon.$$

Тогда уравнение (5.48) примет стандартный вид уравнения *Матье*

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + (p - 2\epsilon \cos 2\theta) \varphi = 0$$

с двумя безразмерными параметрами p , ϵ . Далее, наиболее важным для практических приложений свойством решений здесь является их устойчивость. А так как при заданных p , ϵ либо все решения устойчивы, либо все они неустойчивы, то наличие или отсутствие указанного свойства зависит только от значений p , ϵ . Это дало возможность Э. Айнсу и М. Стретту с помощью аналитических и вычислительных методов построить в плоскости p , ϵ диаграмму (рис. 22), на которой области, отвечающие неустойчивым решениям, заштрихованы. С помощью этой диаграммы непосредственно выясняется и устойчивость или неустойчивость нулевого решения уравнения (5.47) при $|a| + |b| \ll l_0$.

Конечно, описанным способом нельзя получить полные сведения о течении колебательного процесса в том или ином конкретном случае, но в большинстве прикладных задач это несущественно. Важно, что здесь удалось наглядно представить информацию, наиболее важную для данного класса задач. Так, мы видим, что при $p = 1$, т. е. $\omega = 2\sqrt{g/l_0}$, решение $\varphi \equiv 0$ уравнения (5.47) становится неустойчивым для любых достаточно малых $|a|$, $|b|$. Так как при любом «замороженном» значении l это решение устойчиво, то неустойчивость возникает только из-за периодического изменения «параметра системы» l . Поэтому такое явление называется *параметрическим резонансом*.

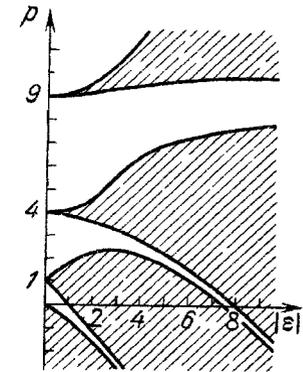


Рис 22

Так как при $a = b = 0$ частота свободных колебаний $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$, то мы видим, что параметрический резонанс наступает, в частности, при $\omega = 2\omega_0$ и как угодно малых $|a|, |b|$. Этот факт, между прочим, используется при раскачивании на качелях: для этого следует на протяжении каждого периода колебаний качелей два раза присесть.

Заклучая этот пункт о применении ЭВМ к математическим моделям рассматриваемых нами типов, приведем слова В. И. Феодосьева [30, с. 165]: ЭВМ, «освобождая нас от многих . . . обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух: от необходимости владеть математическим аппаратом и творчески мыслить».

§ 6. МЕТОДЫ САМОКОНТРОЛЯ

1. Прикидки. В процессе применения математики к решению реальной задачи выдача результата обычно связана с определенной моральной и/или материальной ответственностью. Поэтому на всех стадиях исследования с целью предотвращения ошибок широко применяются различные методы самоконтроля.

Большую пользу, причем не только для самоконтроля, приносят разного рода прикидки, которые могут быть направлены как на получение предварительных сведений о самом решении, так и на упрощение уравнений задачи — что, впрочем, взаимосвязано. Для первого полезно неформальное обсуждение условий задачи, по возможности ясное представление картины изучаемого процесса, привлечение физических соображений, интуиции, аналогий с ранее изученными случаями и т. п. Эту прикидку можно получить и с помощью максимально возможного упрощения геометрических форм и уравнений задачи. Знание, хотя бы самое грубое, качественных и количественных характеристик искомого решения может помочь при выборе более точного метода — в частности, при выборе нулевого приближения в итерационных методах, дает возможность указать характерные значения участвующих величин, а в ряде случаев и упростить уравнение задачи. Сравнение свойств решения, полученного более точными методами, с предварительными сведениями о нем дает дополнительное средство контроля, так как соответствие этих данных значительно повышает доверие к результатам. Существенное рассогласование между этими данными свидетельствует об ошибочности либо одних, либо других (а может быть, и тех и других); в этом

случае нужны проверка и обсуждение всех данных. Такое обсуждение полезно и для развития интуиции в области, к которой относится решаемая задача.

Как было сказано только что, с помощью прикидок мы можем получить характерные значения участвующих величин и перейти к безразмерной форме уравнений задачи (см. п. 2 § 4). Это дает возможность прикинуть величину отдельных членов уравнения и сравнительно малые члены либо отбросить, либо упростить, либо учесть с помощью метода малого параметра (п. 3 § 4). После решения упрощенного таким образом уравнения можно путем подстановки проверить, в самом ли деле относительно малы отброшенные члены.

Прикидки систематически проводятся и для текущего контроля вычисления арифметических и более сложных выражений, интегралов и т. п., особенно в случаях, когда есть опасность ошибиться в порядке величины (неправильно написать показатель степени у десятки). Приведем типичные примеры:

$$\sqrt{\frac{2,876 \cdot 10^{16}}{7,211 \cdot 10^8} + 3,517 \cdot 10^4} \approx \sqrt{\frac{2,9}{7} 10^8 + 3,5 \cdot 10^4} \approx \sqrt{41 \cdot 10^6} \approx 6,5 \cdot 10^3$$

(более точное значение $6,318 \cdot 10^3$);

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+0,1x^3}} dx \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1}} dx = 1$$

(более точное значение 0,988);

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{\sqrt{1+0,1x^3}} dx \approx \int_{10}^{20} \frac{1}{\sqrt{0,1x^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{0,1}} 2 \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{20}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 2(1 - 0,7) = 0,6$$

(более точное значение 0,584).

Приведем в заключение два курьезных примера того, как прикидка порядка величины позволяет обнаружить грубую ошибку. В известной повести А. Р. Беляева «Продавец воздуха» есть такой эпизод. Рассказчик вместе с главным злодеем посещает склад, где хранятся какие-то шарики. Первый пытается поднять шарик, но не может, на что второй говорит: это неудивительно, не всякая лошадь может

сдвинуть с места поклажу с таким шариком, ведь в нем заключен кубический километр воздуха... Читателя, привыкшего к прикидкам реальных значений физических величин, это замечание о лошади сразу настораживает: в самом деле, так как масса 1 м^3 воздуха равна $1,3 \text{ кг}$, то масса 1 км^3 воздуха в $(10^3)^3$ раз больше, т. е. равна $1,3 \times 10^6$ тонн! По-видимому, разгадка «лошади» в том, что, по мнению фантаста, 1 км^3 содержит 10^3 м^3 .

Другой пример. В разделе «Рога и копыта» на 16-й странице «Литературной газеты» как-то появилось сообщение: сотрудник одного элеватора подсчитал, что емкость этого хранилища составляет 83 952 264 175 293 648 209 зерен пшеницы. Отвлекаясь от того, что ответ не может быть известен с такой точностью, предлагаем читателю обнаружить грубейшую ошибку в этом ответе.

2. Контроль размерностей. Этот простой, но важный тест состоит из трех правил: 1) складывать друг с другом и связывать неравенствами можно только величины одинаковой размерности; 2) если размерность какой-либо величины, представленной некоторой формулой, известна заранее, то эта размерность должна вытекать и из данной формулы; 3) аргумент трансцендентной (т. е. неалгебраической) функции должен быть безразмерным, т. е. числом (в частности, безразмерным должен быть и аргумент тригонометрических функций в соответствии с правилом: \sin (угла в x радиан) = \sin (числа x)).

Пусть, например, величины a , b имеют размерность длины. Тогда, если в процессе выкладки получилось выражение $a^2 + 2b$ или $a^2 + \sqrt{a^2 - b^2}$, или просто $a + 1$, то это свидетельствует о допущенной ошибке, так как нарушено первое правило. Аналогично, если получилось выражение

для площади $S = \frac{a^2 + b^2}{a - b}$, то нарушено второе правило. Так как ошибку желательно обнаружить по возможности раньше, описанную проверку следует проводить не только по окончании вывода того или иного соотношения, но и на промежуточных стадиях этого вывода.

Отметим, что если в предыдущем примере a , b представляют собой значения безразмерной длины, т. е. численные значения длины, выраженные через определенную единицу измерения (см. п. 2 § 4), то все выписанные выражения возможны (конечно, тогда под S понимается безразмерная площадь). Для безразмерных величин правила контроля размерностей не действуют.

Приведем еще пример. Как-то в научном докладе встретилось выражение e^{-2t} , причем докладчик говорил, что t — это физическое (размерное) время. Он не заметил, что в силу третьего правила контроля такое выражение допустимо, только если t — безразмерное время.

Стремление к контролю размерностей приводит к тому, что если в формулировке задачи даны конкретные значения параметров, то часто оказывается удобным обозначить эти значения буквами, считая их размерными, затем решить задачу в буквенном виде и лишь после этого подставить вместо букв их значения. При переходе к действиям с числами здесь добавляется контроль системы единиц, согласно которому все величины должны быть выражены в одной и той же системе единиц.

Вот простой пример. Пусть требуется вычислить массу медной пластинки, вырезанной из листа толщиной $\delta = 0,72 \text{ мм}$ и имеющей форму равнобедренного треугольника с основанием $a = 5,2 \text{ см}$ и боковой стороной $b = 3,7 \text{ см}$. Для решения обозначим размерные массу и плотность соответственно буквами m и ρ ; тогда легко вывести формулу

$$m = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \delta \rho. \quad (6.1)$$

Нетрудно проверить, что правила контроля размерностей выполнены. При вычислениях надо подставить $\rho = 8,96 \text{ г/см}^3$ и не забыть перевести δ в сантиметры; получаем

$$m = 2,6 \cdot \sqrt{3,7^2 - 2,6^2} \cdot 0,072 \cdot 8,96 = 4,4 \text{ г.}$$

3. Другие виды контроля. Перечислим еще некоторые (не все!) применяемые методы контроля.

Контроль законов сохранения. Если в содержательной модели потери энергии считались пренебрежимо малыми, то математическая модель должна удовлетворять условию сохранения энергии, а потому и для решений должно проявляться это свойство. Например, так было для осциллятора, показанного на рис. 1, равно как и для его модели — уравнения (1.1): в самом деле, если обе части этого уравнения умножить на dx/dt и произвести интегрирование, то получим соотношение

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2} x^2 = \text{const},$$

которое и является математической моделью закона сохранения энергии. Можно проследить его и для решения (1.2), так как

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} \left(-C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \right. \\ \left. + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^2 + \\ + \frac{k}{2} \left(C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^2 = \frac{k}{2} (C_1^2 + C_2^2) = \text{const.} \end{aligned}$$

Если же в содержательной модели потери энергии были учтены, то соответствующим свойством должны обладать также математическая модель и решение. (Проверьте это для уравнения (1.3).) Аналогичную проверку полезно производить для закона сохранения количества движения и других подобных законов. Как правило, аналоги фундаментальных законов желательно сохранять и при переходе к вычислительному алгоритму, так как этим обеспечивается правильная передача решением наиболее глубоких свойств моделируемого объекта.

Контроль характера зависимости решения от параметров задачи. Здесь речь идет о проверке направления, а иногда и скорости изменения найденной величины при изменении параметров задачи: эти направления, вытекающие из выведенных соотношений, должны быть такими, как следует непосредственно из смысла задачи. Так, из формулы (6.1) мы видим, что m пропорционально δ и ρ и растет с ростом b ; но все это становится сразу ясным, если четко представить ситуацию. Указанный контроль также желательно по возможности проводить и в промежуточных формулах.

Контроль экстремальных ситуаций. Всегда оказывается чрезвычайно полезным проследить за тем, какой вид принимают как исходные, так и промежуточные и окончательные соотношения, а также выводы из исследования модели, если ее параметры приближаются к крайним допустимым для них значениям — чаще всего к нулю или к бесконечности. В таких экстремальных ситуациях задача часто упрощается или вырождается, так что соотношения приобретают более наглядный смысл и могут быть проверены — если, как это часто бывает, соответствующие им решения можно получить независимо от анализа общего случая или если они заранее известны.

Так, в последней задаче п. 2 при стремлении a , δ или ρ к нулю объект вырождается и масса обращается в нуль; то же вытекает из формулы (6.1), что служит ее подтверждением. Вырождение происходит и если a фиксировано, а $b \rightarrow a/2$, либо если b фиксировано, а $a \rightarrow 2b$ (почему?); это же следует из (6.1). Если одна из величин b , δ , ρ стремится к бесконечности, а остальные, как и a , фиксированы, то и $m \rightarrow \infty$; это вытекает как из смысла задачи, так и из формулы (6.1).

В качестве другого примера рассмотрим случай, возникший при написании этой книги. При решении задачи п. 2 § 1 сначала вместо (2.2) была выведена (как оказалось, ошибочно) формула

$$A = \frac{2\omega_2}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} \left| \cos \frac{\omega_2 \pi}{\omega_1} \right| v. \quad (6.2)$$

К счастью, автор для контроля решил провести анализ экстремальных ситуаций. Пусть сначала $m_2 \rightarrow 0$, тогда как остальные параметры m_1 , k_1 , k_2 , v не меняются. Тогда по смыслу задачи $A \rightarrow 0$ (продумайте это!); это же вытекает из (6.2) (так как $\omega_2 \rightarrow \infty$ в данных условиях), так что результаты согласуются. Но рассмотрим другую ситуацию: пусть $k_2 \rightarrow 0$, а прочие параметры не меняются. Тогда по смыслу задачи должно получиться $A \rightarrow \infty$; однако в новых условиях имеем $\omega_2 \rightarrow 0$ и потому из (6.2) следует, что $A \rightarrow 0$. Так была обнаружена ошибочность формулы (6.2).

Контроль математической замкнутости состоит в проверке того, что выписанные математические соотношения дают возможность решить поставленную математическую задачу, т. е. что математическая модель полна (см. п. 5 § 1). Так, если задача свелась к отысканию неизвестных величин с помощью решения системы конечных уравнений, которые должны удовлетворяться точно, то надо проверить, что этих уравнений — во всяком случае, независимых — столько же, сколько неизвестных. Если задача свелась к отысканию конкретного решения дифференциального уравнения, то надо проверить, что поставлены также добавочные (начальные, граничные) условия, определяющие это решение. (В таком случае после получения решения желательно еще проверить, что поставленные добавочные условия учтены и что построенная функция действительно им удовлетворяет.)

Упомянем еще о таком способе проверки правильности окончательного или промежуточного результата: если сложным, обходным путем получена простая формула, то пыта-

ются найти более прямой путь ее вывода, что дает возможность не только подтвердить ее справедливость, но и глубже ее понять. В качестве простого примера выведем формулу для производной по направлению от скалярного поля $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y, z — декартовы координаты в пространстве. Вычисления дают (проверьте!):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial l} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\widehat{x, l}) + \\ &+ \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\widehat{y, l}) + \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos(\widehat{z, l}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (xi + yj + zk) \cdot (\cos(\widehat{x, l})i + \cos(\widehat{y, l})j + \\ &+ \cos(\widehat{z, l})k) = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{r}^0 \cdot \mathbf{l}^0; \end{aligned}$$

здесь точкой обозначено скалярное произведение, а нуликом — единичный вектор. Однако скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними, т. е. мы получаем формулу

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{l}}).$$

Ее простота подсказывает, что должен быть ее непосредственный вывод. И действительно, этот вывод сразу получается из рассмотрения рис. 23 (AB — дуга окружности с центром

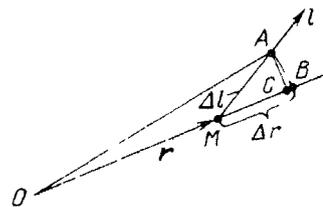


Рис. 23

в O , отрезок AC перпендикулярен к r), так как при бесконечно малом Δl величины $|MB|$ и $|MC|$ эквивалентны, а потому

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta r (= |MB|)}{\Delta l} = \\ &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{|MC|}{\Delta l} = \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{l}}). \end{aligned}$$

4. Роль примеров. Для успешного исследования математической модели, избежания ошибок особенно велика роль правильной интуиции, ориентировки в рассматриваемом круге вопросов. А для этого, в свою очередь, весьма полезным оказывается подробный разбор примеров, частных случаев, элементов модели. С помощью таких примеров можно выбирать и отрабатывать методы исследования математической модели, формулировать и проверять те или иные

гипотезы. Каждый пример служит как бы моделью интересующей нас более общей или более сложной модели, он выявляет некоторые свойства последней и способствует их пониманию. Существенно, что примеры часто удается исследовать значительно детальнее и с более высокой достоверностью, чем общую модель. (Впрочем, при переносе свойств примера на более общий класс объектов надо всегда иметь в виду, что некоторые из этих свойств могут проистекать именно из специфики данного примера.)

Особенно велика роль примеров при опровержении неправильных гипотез: утверждение «все лебеди белые» опровергается предъявлением хотя бы одного черного лебедя.

Приведем некоторые «примеры примеров». Легко проверить, что если линейное однородное автономное дифференциальное уравнение содержит производные только четного порядка и имеет хотя бы один кратный характеристический корень λ , то в фундаментальную систему решений этого уравнения входят функции $te^{\lambda t}$ и $te^{-\lambda t}$, а так как по крайней мере одна из них безгранично возрастает по модулю при $t \rightarrow \infty$, то такое уравнение неустойчиво. Исходя из этого, Лагранж, а за ним и Лаплас утверждали, что и линейная автономная механическая система, в которой силы трения пренебрежимо малы, в случае кратных характеристических корней из-за появления таких слагаемых всегда оказывается неустойчивой. На математическом языке это означает, что система уравнений вида

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

с постоянными коэффициентами при наличии кратного корня обязательно неустойчива. То, что это не всегда так, сразу видно, если в качестве $\|a_{jk}\|$ взять единичную матрицу. Такой вид при $n = 2$ имеет после перехода к безразмерным координатам линеаризованная система уравнений колебаний маятника, имеющего две степени свободы, около нижнего положения равновесия — очевидно, устойчивого. Эта знаменитая в истории механики ошибка Лагранжа получилась, как считают историки, из-за того, что ему вообще не было свойственно сопровождать общие рассуждения примерами.

Рассмотрим еще вопрос о влиянии рассогласования между начальными и граничными условиями на решение уравнения с частными производными. Пусть, например, рассматривается некоторый процесс, происходящий в полубе-

сконечном стержне, $0 \leq x < \infty$, начиная с момента $t = 0$. Тогда при $t = 0$ ставится начальное условие, а при $x = 0$ — граничное условие. Таким образом, при $x = 0, t = 0$ оказываются поставленными и то и другое условия. Если они противоречат одно другому, то говорят об их рассогласовании. Как такое рассогласование сказывается на решении задачи? (Строго говоря, тут надо говорить об обобщенном решении, см. п. 5 § 5.)

Оказывается, что ответ существенно зависит от так называемого типа уравнения, что легко продемонстрировать на примерах. Простейшим представителем уравнений «гиперболического» типа, описывающих процессы, распространяющиеся с конечной скоростью, является уравнение (5.25). Пусть начальные и граничные условия имеют, соответственно, вид

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0,$$

причем функция u_0 непрерывна. Тогда, исходя из формулы (5.27) для общего решения, можно получить явное выражение для решения

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [u_0(x+at) - u_0(at-x)] & (0 < x < at), \\ \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] & (at < x < \infty) \end{cases} \quad (0 < t < \infty). \quad (6.3)$$

Но что происходит при $x = at$, когда формулы сменяются? Если $x \rightarrow (at)^+$, т. е. x приближается к at со стороны больших значений, то в силу второй формулы (6.3) имеем

$$u \rightarrow \frac{1}{2} [u_0(2at) + u_0(0)] \quad (x \rightarrow (at)^+).$$

Если же $x \rightarrow (at)^-$, то в силу первой формулы (6.3)

$$u \rightarrow \frac{1}{2} [u_0(2at) - u_0(0)] \quad (x \rightarrow (at)^-).$$

Таким образом, при $u_0(0) \neq 0$ (это и есть условие рассогласования начальных условий с граничными) решение имеет разрыв вдоль всего луча $x = at, 0 \leq t < \infty$, в «мировой» плоскости x, t . Этот луч описывает распространение возмущения, возникшего при $t = 0$ в точке $x = 0$.

Оказывается, что описанная картина характерна для всех уравнений «гиперболического» типа, описывающих волновые процессы. При рассогласовании начальных условий с граничными у решения в случае одномерных задач возникают линии разрыва, подобные указанной; для двумерных и трехмерных задач размерность многообразия, на котором решение имеет разрыв, соответственно повышается. Отметим, что в разобранный примере линия разрыва оказалась прямой. Это связано со спецификой примера (предположением об однородности стержня) и в общем случае может не иметь места.

Рассмотрим теперь аналогичный вопрос для одномерного уравнения теплопроводности (5.18) — простейшего представителя уравнений «параболического» типа, описывающих процессы, распространяющиеся с формально бесконечной скоростью. Пусть начальные и граничные условия имеют соответственно вид

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 (= \text{const}), \quad \theta|_{x=0} = 0,$$

а решение строится при $0 \leq x < \infty, 0 \leq t < \infty$. Решение можно получить по *методу отражения*: начальную функцию $\theta_0(x) \equiv \theta_0 (0 < x < \infty)$, продолжить на отрицательную полуось нечетным образом, т. е. положить $\theta_0(x) \equiv -\theta_0(-\infty < x < 0)$, после чего решить уравнение (5.18) на всей оси x с помощью формулы Пуассона (см. п. 5.3), но решение рассмотреть только при $x > 0$, так как при указанном продолжении поставленное граничное условие обязательно удовлетворяется (сколько тепла идет в точку $x = 0$ справа, столько же холода — слева). Таким образом, получаем решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\xi)^2/(4at)} (-\theta_0) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4at)} \theta_0 d\xi \right] = \left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{at}} = s \right) = \\ &= \frac{\theta_0}{2\sqrt{\pi at}} \left[- \int_{-\infty}^{-x/(2\sqrt{at})} e^{-s^2} 2\sqrt{at} ds + \int_{-x/(2\sqrt{at})}^{\infty} e^{-s^2} 2\sqrt{at} ds \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}} \left[- \int_{x/(2\sqrt{at})}^{\infty} e^{-s^2} ds + \int_{-x/(2\sqrt{at})}^{\infty} e^{-s^2} ds \right] =$$

$$= \frac{2\theta_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{at})} e^{-s^2} ds = \theta_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right)$$

(см. это обозначение в п. 2 § 5; при преобразовании интегралов мы пользовались четностью функции e^{-s^2}). Рассмотрение полученной формулы для $\theta(x, t)$ показывает, что решение при $t > 0$ ($0 \leq x < \infty$) обладает непрерывными производными всех порядков, т. е. начальное рассогласование сразу же ликвидируется, не порождая никаких разрывов. Ясно, что данный пример для уравнения теплопроводности является типичным, т. е. полученное заключение имеет общий характер. Оказывается, что этим же свойством обладают и другие уравнения параболического типа.

5. О верификации модели. Проблема верификации модели, т. е. выяснения ее адекватности, значительно выходит за рамки самоконтроля, но о ней нельзя упомянуть. Действительно ли, составляя уравнения и выбирая исходные данные, мы правильно учли все существенные для нас факторы, причем с необходимой точностью? Ответ на этот вопрос имеет кардинальное значение для проводимого исследования или расчета.

Если речь идет о модели, достаточно апробированной в рассматриваемой области приложений, то вопрос о верификации обычно не возникает, мы полностью полагаемся на предшественников. Он становится существенным, если мы либо строим модель заново, применяя известные ранее приемы, либо применяем известную модель вне рамок, в которых она показала себя адекватной, либо, наконец, строим принципиально новую модель. Во всех этих случаях, особенно в двух последних подтверждение адекватности модели весьма желательно, без этого такая адекватность остается лишь более или менее правдоподобной гипотезой.

Основным подтверждением адекватности принятой модели является согласие следствий из нее с известными из эксперимента или из независимых теоретических исследований свойствами моделируемого объекта. При этом, чем больше окажется таких независимых подтверждений, тем большее доверие приобретает модель.

Так, например, нас может интересовать форма нормальных (т. е. гармонических или затухающих гармонических) колебаний системы, но из эксперимента нам известны только их частоты; тогда совпадение рассчитанных частот с экспериментальными может служить подтверждением правильности расчета форм. Совпадение рассчитанных прогибов с экспериментальными при каких-либо комбинациях значений параметров (чем больше таких комбинаций, тем лучше) может служить подтверждением правильности расчетов прогибов при других комбинациях значений. Правильность модели может подтверждаться и предсказанием с ее помощью какого-либо эффекта, относящегося к известному прошлому («предсказанием прошлого по предпрошлому»).

Порой бывает и так: мы с помощью модели получаем только те результаты, которые нам уже известны из опыта. При этом модель подтверждается как бы впрок, в расчете на дальнейшие применения в условиях, не охваченных экспериментом. К тому же математический анализ свойств объекта часто приводит к их более глубокому пониманию, что полезно само по себе.

Отметим еще следующее важное обстоятельство: при теоретическом подтверждении модели надо следить за независимостью подтверждающих соображений от подтверждаемых. Допустим, что мы описываем поведение реального объекта с помощью системы дифференциальных уравнений, причем, решив эту систему по методу Галеркина, обнаружили хорошее совпадение с ранее известным решением той же системы, полученным по методу сеток. Служит ли этот факт подтверждением адекватности модели? Конечно, нет, он говорит только о правильности решения системы дифференциальных уравнений.

Если обнаружено существенное расхождение между рассчитанными и известными свойствами, то модель необходимо изменить. Это можно делать, либо привлекая дополнительные теоретические соображения, либо путем подгонки, либо с помощью комбинации того и другого.

Рассмотрим в качестве примера ([38, с. 25—26]) процесс падения дождевой капли среднего размера с высоты $H = 300$ м с нулевой начальной скоростью. Применение «школьной» формулы $s = gt^2/2$ дает время падения $T = \sqrt{2H/g} = 7,8$ с. Однако фактически капля падает около 40 с, что показывает неадекватность «школьной» модели в данных условиях. Причина неадекватности здесь ясна: не учтено сопротивление воздуха, которое в данной ситуации оказывает весьма существенное воздействие. Попробуем

учесть это сопротивление. Самое простое предположение, не противоречащее здравому смыслу, таково: сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли. При этом предположении уравнение движения приобретает вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt}$$

(x отсчитывается вниз от точки начала падения), где m — масса капли, а $k > 0$ — коэффициент трения. Отсюда при нулевых начальных условиях получаем решение

$$x = \frac{gm^2}{k^2} \left(\frac{k}{m} t - 1 + e^{-(k/m)t} \right) \quad (6.4)$$

и соотношение между H , T и k/m :

$$H \left(\frac{k}{m} \right)^2 = g \left(\frac{k}{m} T - 1 + e^{-(k/m)T} \right). \quad (6.5)$$

Если k/m известно, то при заданном H отсюда можно найти T , решив (например, методом итераций) трансцендентное уравнение

$$\alpha = 1 + \frac{H}{g} \left(\frac{k}{m} \right)^2 - e^{-\alpha}$$

и положив затем $T = \alpha m/k$. Значение k можно получить теоретически по известной формуле Стокса $k = 6\pi\mu r$, где μ — коэффициент вязкости воздуха, а r — радиус капли. Мы здесь поступим иначе: рассмотрим k/m как *подгоночный коэффициент*, обеспечивающий заданное время падения капли. Тогда k/m надо найти из уравнения (6.5), считая H и g заданными. Для k/m , выраженного в с^{-1} , получаем уравнение

$$300 \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 9,81 \left(40 \frac{k}{m} - 1 + e^{-40k/m} \right),$$

откуда находим значение $k/m = 1,28$, т. е. формула (6.4) приобретает вид

$$x = 7,7t - 6,0 (1 - e^{-1,28t}) \quad (t — в с, x — в м).$$

Мы видим, что уже после 2—3 секунд падения скорость оказывается почти равной своему предельному значению 7,7 м/с, так что модель, основанная на предположении о равноускоренности движения, оказалась полностью неадекватной.

1. Ошибки в выборе модели. Эти ошибки могут происходить от разнообразных причин. Самой очевидной является непонимание ситуации, приводящее к выбору неадекватных гипотез. Яркий пример привел английский астроном А. Эддингтон: рыбак, который ловил рыбу только одной сетью, решил, разглядывая свои уловы, что наименьшие среди пойманных рыб — это самые маленькие рыбы в море; он допустил грубую ошибку, не учитывая важную особенность ситуации — определенный размер ячеек сети.

Другой пример приведем из практики автора этой книги. Приходя утром на работу, он замечал, что пол его комнаты влажный, так как уборщица его протирала мокрой тряпкой перед началом работы. Как-то, включив сразу же вентилятор, автор обратил внимание на то, что вскоре та половина пола комнаты, где стоял вентилятор, совершенно просохла, тогда как другая половина пола еще оставалась сырой. Автор решил, что это явление связано с воздушным потоком, создаваемым вентилятором, и попробовал произвести проверочные прикидки, но по прикидкам необходимая мощность вентилятора оказалась непомерно большой. Вопрос разъяснился, когда то же явление было обнаружено и при неработающем вентиляторе: попросту выяснилось, что смочив тряпку один раз, уборщица протирала ею весь пол в определенном порядке и потому одна половина пола оказывалась смоченной сильнее, чем другая. Таким образом, в этом примере модель была основана на первой попавшейся на глаза причинно-следственной связи, бесконтрольно принятой за основную, что и привело к грубой неадекватности модели явлению.

Сходный характер имеют случаи, когда не учитывается влияние факторов, которые по тем или иным причинам (например, из-за относительной малости характеризующих их параметров) считаются второстепенными, но на самом деле являются существенными, иногда даже определяющими для изучаемого свойства. Так, расчет так называемых статически неопределимых систем (например, балки, лежащей на трех жестких опорах) был невозможен, пока не поняли, что математическая модель такой системы должна существенно учитывать возникающие в ней малые деформации.

Модель может оказаться неадекватной также из-за того, что при ее построении была применена схема (круг представлений, понятия и их связи), разработанная и адекватная для иной области явлений, к которой изучаемое явление не

относится; гипотезы, на которые опирается модель, могут в изучаемой ситуации быть необоснованными или даже несправедливыми. Пример такой ошибки — применение ламинарной модели течения жидкости в условиях, когда на самом деле это течение турбулентно. Другим примером может служить незаконная попытка провести аналогию между расчетами балки на равномерно распределенную статическую нагрузку и равномерно распределенную импульсивную нагрузку: в действительности зависимость прогиба балки и изгибающего момента от параметров балки в этих случаях принципиально различна.

Поучительна история внедрения в практику формул для устойчивости стержневых систем. Первые формулы для критической нагрузки при сжатии упругих стержней получил еще Эйлер в 1757 г., однако они долгое время представляли лишь академический интерес. Практическая заинтересованность в вопросах устойчивости стержневых систем пробудилась в середине XIX века в связи с массовым строительством больших железнодорожных мостов. При этом Ходкинсон провел серию экспериментов, которые дали значения критической нагрузки в несколько раз меньше, чем получается из формул Эйлера. Только в конце XIX века выяснилось, что в этих экспериментах потеря устойчивости стержней (довольно коротких) происходила за пределами пропорциональности, при пластических деформациях, не учитываемых в выводе формул Эйлера. Таким образом, стала ясной область применимости модели Эйлера и эта модель в дальнейшем нашла практическое применение.

Конечно, всякое сколько-нибудь существенно новое исследование требует выхода за рамки уже испытанной области и это влечет за собой некоторую возможность ошибки; разумный риск здесь необходим. Однако, как мы уже говорили, нужно стараться видеть слабые места в рассуждении, чтобы в случае необходимости произвести соответствующие коррективы или даже полностью изменить модель.

Неадекватность, особенно количественная, математической модели может простекать также от чрезмерных, выходящих за допустимые рамки упрощений моделируемого объекта — упрощений геометрических форм, исходных зависимостей одних величин от других (или даже замены неизвестных зависимостей на придуманные) и т. п. Трудность состоит в том, что упрощения необходимы, но допустимо ли то или иное конкретное упрощение, заранее далеко не всегда бывает ясно (см. § 4 и, в частности, п. 2).

2. Влияние интерполяции и экстраполяции. При построении и исследовании математических моделей нам постоянно приходится пользоваться различными зависимостями между величинами — как исходными, в том числе эмпирическими зависимостями, так и получающимися в процессе исследования. При этом широко применяются интерполяция и экстраполяция, которые могут как существенно помочь исследованию, так и оказаться источником ошибок; см., в частности, [5], [31] и т. д.

Самые грубые задачи интерполяции возникают при подборе эмпирической формулы по данным измерения. Здесь надо предостеречь от формального, слепого подбора такой формулы только по измеренным значениям. Выбор вида формулы (многочлен, степенная функция, экспонента и т. д.) должен опираться на теоретическое обсуждение различных свойств изучаемой зависимости. После этого выбора параметры, входящие в формулу, можно найти по методу наименьших квадратов (п. 4 § 3) или как-либо иначе. При этом применяемый метод должен быть устойчивым относительно возможных ошибок измерения.

Приведем пример. Пусть измерение величины y в зависимости от величины x дало следующие результаты:

x	0,0	0,1	0,2	1,0
y	0,42	0,50	0,52	1,25

(соответствующие точки показаны на рис. 24 кружками), причем в значениях y допускалась погрешность до 0,05. Как известно, по четырем значениям можно подобрать многочлен 3-й степени, который точно принимает эти значения. В данном случае этот многочлен $f(x)$ имеет вид (коэффициенты выписаны с точностью до 0,01)

$$f(x) = 3,79x^3 - 4,14x^2 + 1,18x + 0,42,$$

а его график показан на рис. 24 штриховой линией. Как видим, поведение этого многочлена при $0,2 < x < 1,0$ совершенно не вытекает в качественном отношении из заданных условий и «шатание» значений y в рамках допустимой погрешности может существенно из-

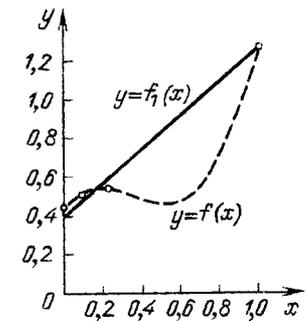


Рис. 24

менить его значения на этом интервале. Существенно большее доверие в данном примере вызывает многочлен первой степени $f_1(x)$, найденной по методу наименьших квадратов. Подсчет дает, что

$$f_1(x) = 0,84x + 0,40;$$

соответствующий график показан на рис. 24 сплошной линией. Отклонения значений $f_1(x)$ от измеренных не превышают 0,048, т. е. находятся в допустимых рамках.

Специального внимания требуют возможные особенности изучаемой зависимости — разрывы, острые экстремумы и т. п., которые могут оказаться определяющими, тогда как при «слепом» интерполировании их можно не заметить. (Например: пусть известно количество писем, доставленных в городе Н. 15 ноября и 15 декабря 1990 г., а также 15 января и 15 февраля 1991 г.; можно ли с помощью простой интерполяции приближенно определить количество писем, доставленных 31 декабря 1990 г.?) Это также делает существенным предварительный или попутный теоретический неформальный анализ реальной зависимости. Он часто дает возможность предвидеть появление подобных особенностей и так направить подбор эмпирических данных и интерполяционной формулы, чтобы получить правильное описание этой зависимости. Отметим, что во многих задачах оказывается удобным использовать в качестве интерполирующих функции, заданные не единой формулой, а двумя или несколькими формулами, действующими на различных интервалах изменения независимой переменной. Такой характер имеет, в частности, широко распространенное в последние годы интерполирование с помощью сплайнов (см. Добавление, п. 7).

Если при интерполяции обсуждение реального смысла исследуемой зависимости во многих случаях весьма полезно, то при экстраполяции такое обсуждение всегда является центральным, решающим элементом процедуры. Мы уже говорили, что интерполяцию одной и той же зависимости можно осуществить различными формулами. Но даже если эти формулы на интервале интерполирования дают близкие значения, то при удалении от него они могут приводить к принципиально различным результатам. Необоснованное распространение формул с исходного на существенно более широкие интервалы может приводить к вопиющим ошибкам, чему имеется много примеров. Особенно распространена формальная экстраполяция с помощью линейной функции или экспоненты, в основе чего лежит представление (не

всегда явно высказываемое!) о неизменности тех или иных решающих факторов.

Таким образом, построение экстраполяционной формулы или дифференциального уравнения, решение которого должно экстраполировать исследуемую зависимость на сколько-нибудь значительное удаление от уже изученного интервала, возможно только при глубоком анализе влияния существенных факторов, их взаимодействия, усиления или ослабления при отходе от этого интервала и т. п.

3. Ошибки в выборе метода исследования. Одна из распространенных ошибок состоит в недостаточной целеустремленности исследования. Это касается как случаев, когда исследователь не представляет себе четко, что он собирается искать, так и случаев, когда такое представление имеется, но движение к цели происходит по слишком извилистому пути и при этом добывается слишком много по существу ненужной информации. Конечно, при решении любой сколько-нибудь сложной задачи получение избыточной информации неизбежно. Но разным методам свойственно порождать различные объемы такой информации, и это надо учитывать при выборе метода. Еще Лаплас сказал: чтобы выяснить, что после дождя трава будет мокрой, нет надобности вычислять траектории всех капель...

Для уменьшения объема избыточной информации часто бывает полезным по возможности прямое изучение интегральных характеристик рассматриваемой системы и применение различных интегральных соотношений — таких, как закон сохранения энергии и т. п. В этом смысле поучительны общие теоремы динамики механической системы; например, теорема о движении центра инерции не позволяет описать движение каждой из точек системы, но дает возможность получить интегральное представление о движении, во многих случаях достаточное для приложений.

В качестве другой распространенной ошибки укажем на недостаточное внимание к доброкачественности исходных данных. Большой труд, потраченный на реализацию самого точного численного метода, будет в значительной мере обесценен, если воспользоваться неверными или чересчур неточными исходными данными. Более того, если не обратить внимания на недостоверность этих данных, то можно сделать неверное представление о доброкачественности окончательного вывода, причем соблазн поверить в такой вывод будет тем большим, чем более трудной была математическая задача. Когда же недоброкачественность результата будет обнаружена, весь метод может оказаться незас-

луженно опороченным. Поэтому выбираемый метод решения задачи должен быть рассчитан на введение в него только таких данных, которые можно реально получить с требуемой достоверностью. Если достаточно точные исходные данные получить не представляется возможным, то во многих случаях бывает целесообразно изменить метод — обычно упростив его, чтобы труд, связанный с применением метода высокой точности, не оказался напрасным.

Печальную роль может сыграть ошибка в выборе вычислительного алгоритма. Метод, корректный в «домашинном» понимании, может оказаться неустойчивым относительно ошибок округления (п. 9 § 5), что довольно часто бывает при решении краевых задач на ЭВМ. Это может привести даже к неправильным выводам о свойствах моделируемого объекта, так как чисто вычислительный эффект можно принять за физический. Например, если производится расчет течения жидкости и при переходе характерной скорости потока через некоторое значение решение из «гладкого» превращается в сильно осциллирующее, то это не обязательно говорит о смене ламинарного режима турбулентным: может оказаться, что при этом переходящий вычислительный метод стал неустойчивым.

Встречаются и многие другие ошибки математического характера. Здесь можно посоветовать только осваивать применяемую область математики, разбирать методы применения математики к задачам, аналогичным интересующим Вас, накапливать опыт и интуицию, а в случае осложнений обращаться к специалистам за консультацией.

ДОБАВЛЕНИЕ

1. Вывод некоторых уравнений математической физики.

а. Уравнение теплопроводности. Пусть тепло распространяется в некотором теплопроводящем теле; рассмотрим в нем произвольную область (Ω) в какой-то момент t времени. На поверхности (S) этой области определен тепловой поток с плотностью q , так что через элемент (dS) поверхности за время dt проходит тепловая энергия $dQ = q_n dS dt$, где n — направление внешней нормали к (S) . Таким образом, через (S) за время dt проходит тепловая энергия $(\int_{(S)} q_n dS) dt$ в направлении изнутри наружу.

С другой стороны, в элементе $(d\Omega)$ объема содержится $c\rho\theta d\Omega$ тепловой энергии, где c — удельная теплоемкость,

ρ — плотность тела, а θ — температура в данной точке в данный момент времени. Предполагая, что внешние источники тепла отсутствуют, составляем баланс тепловой энергии за время dt :

$$\partial_t \int_{(\Omega)} c\rho\theta d\Omega = - \left(\int_{(S)} q_n dS \right) dt$$

(∂_t — частный дифференциал, вычисляемый по формуле $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t} dt$). Применяя к правой части формулу Остроградского, а к левой — правило Лейбница о дифференцировании интеграла по параметру (в данном случае по t), получаем $\int_{(\Omega)} \frac{\partial (c\rho\theta)}{\partial t} d\Omega = - \int_{(\Omega)} \text{div } q d\Omega$, т. е.

$$\int_{(\Omega)} \left[\frac{\partial (c\rho\theta)}{\partial t} + \text{div } q \right] d\Omega = 0.$$

Выбрав область (Ω) бесконечно малой, получаем отсюда уравнение

$$\frac{\partial (c\rho\theta)}{\partial t} + \text{div } q = 0. \quad (\text{Д.1})$$

Примем для теплопроводности закон Фурье: плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры, $q = -\lambda \text{ grad } \theta$ (подумайте, почему здесь берется минус), где λ — коэффициент теплопроводности тела. Этот закон подразумевает, в частности, что по отношению к теплопроводности рассматриваемое тело изотропно. Кроме того, будем считать величины c , ρ , λ постоянными (это, в частности, означает, что тело является однородным) и введем коэффициент температуропроводности $a = \lambda / (c\rho)$. Тогда из уравнения (Д.1) получим окончательно уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \text{ div grad } \theta. \quad (\text{Д.2})$$

Мы предоставляем читателю показать, что при наличии внешних источников тепла с плотностью β (вообще говоря, зависящей от точки пространства и момента времени) тепловой процесс описывается, взамен (Д.2), неоднородным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \text{ div grad } \theta + \frac{1}{c\rho} \beta. \quad (\text{Д.3})$$

Комбинация div grad появляется во многих задачах и называется *лапласианом*; она обозначается также ∇^2 или Δ . В декартовых координатах x, y, z лапласиан имеет выражение

$$\text{div grad } \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (\text{Д.4})$$

б. *Уравнение продольных упругих колебаний прямолинейного стержня.* Пусть ось x направлена вдоль стержня. Обозначим $u = u(x, t)$ смещение вдоль этой оси в момент t поперечного сечения, которое в свободном равновесном состоянии стержня имело абсциссу x . (Это значение x называется *лагранжевой координатой* рассматриваемого сечения; она не зависит от времени в отличие от *эйлеровой координаты* $x + u$ этого сечения.) Тогда относительное удлинение стержня в сечении с координатой x равно $\epsilon = \partial_x u / \partial u = \partial u / \partial x$. Это удлинение порождает упругую силу $F = S\sigma$, где S — площадь поперечного сечения стержня (изменением S при удлинении стержня пренебрегаем), а $\sigma = \sigma(\epsilon)$ — упругое напряжение. Предполагая, что других сил, кроме силы упругости, нет, мы можем, применив второй закон Ньютона к элементу (dx) стержня, написать

$$\partial_x F = (\rho S dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho S} \frac{\partial}{\partial x} \left[S\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right],$$

где ρ — плотность стержня.

Считая закон упругости линейным: $\sigma = E\epsilon$ (это *закон Гука*, где E — модуль Юнга для стержня), а сам стержень однородным, т. е. ρ, S, E постоянными, и обозначив $\sqrt{E/\rho} = a$, получаем отсюда уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{Д.5})$$

Это *одномерное волновое уравнение*. При другом смысле букв оно описывает и другие волновые процессы в одномерных средах: колебания газа в трубке, поперечные колебания струны и т. д.

в. *Телеграфное уравнение.* Рассмотрим электрическую линию (провод) с распределенными параметрами, т. е. будем считать, что каждый участок (dx) этой линии обладает активным сопротивлением Rdx , индуктивностью Ldx и емкостью Cdx ; кроме того, будем считать, что возможна утечка тока в землю, причем проводимость этого участка для тока утечки равна Gdx . Параметры R, L, C, G будем считать

постоянными. Упомянутый участок схематически изображен на рис. 25.

Обозначим $v(x, t)$ и $j(x, t)$ соответственно напряжение и силу тока в точке x в момент t . Баланс напряжений дает

$$-\partial_x v = (Rdx) j + (Ldx) \frac{\partial j}{\partial t}.$$

С другой стороны, из сохранения количества электричества за время dt получаем

$$-(\partial_x j) dt = (Gdx) v dt + (Cdx) \partial_t v.$$

(Продумайте эти уравнения! Умение правильно действовать с дифференциалами, отбрасывая члены высшего порядка малости — один из важнейших навыков для построения непрерывных математических моделей.)

Из выписанных уравнений после перехода к производным и сокращений получаем *систему телеграфных уравнений*

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial j}{\partial t} + Rj = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0. \quad (\text{Д.6})$$

Отсюда, продифференцировав первое уравнение по x и подставив вместо $\partial j / \partial x$ его выражение из второго уравнения, приходим к *телеграфному уравнению* (проверяйте все вычисления!)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv. \quad (\text{Д.7})$$

Аналогичное исключение v вместо j из уравнений (Д.6) приводит в точности к тому же уравнению с j вместо v .

Будем считать, что $L > 0, C > 0, R \geq 0, G \geq 0$, т. е. R и G , но не L и C могут быть пренебрежимо малыми. Для упрощения уравнения (Д.7) сделаем подстановку

$$v = e^{-\alpha u} \quad (\alpha = \text{const}). \quad (\text{Д.8})$$

Легко проверить, что при $\alpha = [(R/L) + (G/C)]/2$ в уравнении для u производная $\partial u / \partial t$ пропадает и телеграфное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u, \quad (\text{Д.9})$$

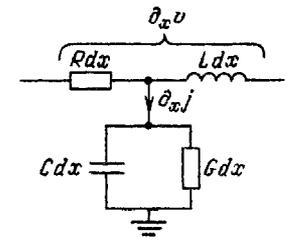


Рис. 25

где обозначено

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad k = \frac{1}{2} \left| \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right|.$$

В частности, при выполнении условия

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (\text{Д.10})$$

уравнение (Д.9) превращается в волновое уравнение (Д.5).

2. Дельта-функция. Эта функция была введена английским физиком П. Дираком около 60 лет назад и в последние десятилетия широко применяется в математике и ее приложениях. Дельта-функцию $\delta(x)$ можно получить, отправляясь от любой функции $\delta_1(x) \geq 0$ ($-\infty < x < \infty$), для которой $\delta_1(0) > 0$, $x\delta_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(x) dx = 1$. Преобразуем график функции $\delta_1(x)$: сожмем его в N раз к оси x и растянем во столько же раз от оси x . Мы получим функцию $\delta_N(x) = N\delta_1(Nx)$, примерный график которой при большом N показан на рис. 26, причем площадь заштрихованной области равна 1.

Дельта-функция $\delta(x)$ получается из $\delta_N(x)$ при $N \rightarrow \infty$, так что можно написать

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(x). \quad (\text{Д.11})$$

Правда, этот предел понимается в некотором обобщенном смысле, который мы здесь не будем уточнять. Непосредственный переход к пределу в формуле (Д.11), который мы предоставляем читателю, приводит к значениям $\delta(x) = 0$ ($x \neq 0$), $\delta(0) = \infty$, однако указание только этих значений не определяет дельта-функцию полностью. (Этим она отличается от обычных функций, которые полностью определяются указанием своих значений; $\delta(x)$ — простейший пример «обобщенной функции».) Надежнее относиться к ней, помня о ее происхождении, т. е. рассматривать $\delta(x)$ как $\delta_\infty(x)$. Иногда это выражают словами: все отличные от нуля значения функции $\delta(x)$ принимаются в бесконечно малой окрестности точки $x = 0$, причем эти значения положительны и таковы, что

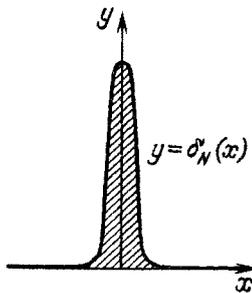


Рис 26

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$. Отметим, что конкретный вид исходной функции $\delta_1(x)$ при этом несуществен и что в силу последнего равенства, если величина x размерна, то размерность $\delta(x)$ обратна размерности x .

Физический смысл дельта-функции вытекает из ее определения. Если x — декартова координата, отсчитываемая вдоль некоторой оси, то $\delta(x)$ есть плотность единичной массы*), распределенной по бесконечно малому интервалу, содержащему начало координат. Короче говорят, что это плотность единичной массы, сосредоточенной в начале координат. Поэтому $m\delta(x - a)$ есть плотность массы m , сосредоточенной в точке $x = a$. Аналогично рассматриваются сосредоточенные заряды, силы и т. п. (см. п. 2 § 2). Если же мы рассматриваем закон $F(t)$ изменения силы во времени, то зависимость $F = \delta(t)$ описывает единичный импульс (удар) в момент $t = 0$. Поэтому дельта-функцию называют также *импульсной функцией*.

Из определения δ -функции сразу следует, что

$$\int_{a < 0}^x \delta(s) ds = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases} \quad (\text{Д.12})$$

Полученная функция аргумента x называется *единичной* или *функцией Хэвисайда*; будем ее обозначать $H(x)$. Это обычная (не обобщенная) кусочно-постоянная функция, заданная как таковая двумя формулами. Ее значение при $x = 0$ чаще всего бывает несущественно; впрочем, иногда полагают $H(0) = 1/2$.

Формула (Д.12) приводит к заключению, что должно быть

$$\delta(x) = H'(x). \quad (\text{Д.13})$$

И действительно, в теории обобщенных функций это равенство обосновывается. Его неформальный смысл легко понять. В самом деле, вспомним о том, что в реальных ситуациях скачок у функции — это идеализация ее конечного изменения на протяжении весьма малого интервала изменения аргумента (см. п. 12 § 3). В частности, функцию $H(x)$ можно считать идеализацией, упрощенным представлением функции $H_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} Nx$ при весьма

*) Единичная масса безразмерна, она равна числу 1

большом N . Но производная последней, т. е.

$$\delta_N(x) := H'_N(x) = \frac{N}{\pi [1 + (Nx)^2]}$$

при таком N приближенно представляет функцию $\delta(x)$, что и объясняет формулу (Д.13). (Постройте графики функций $H_N(x)$ и $\delta_N(x)$ при $N = 1$ и при $N = 10$.)

В соответствии с формулой (Д.13), для любой функции, имеющей конечные скачки (разрывы первого рода), производная имеет дельта-слагаемые. Например, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (|x| < 1), \\ 3x - 1 & (|x| > 1), \end{cases}$$

то эта функция имеет скачок, равный 6, при $x = -1$ и непрерывна при $x = 1$, а потому $f'(x) = g(x) + 6\delta(x + 1)$, где

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (|x| < 1), \\ 3 & (|x| > 1). \end{cases}$$

Исходя из определения дельта-функции, нетрудно понять формулу

$$\int_{a(<c)}^{b(>c)} f(x)\delta(x-c) dx = f(c) \quad (\text{Д.14})$$

для любой функции $f(x)$, непрерывной при $x = c$; для этого достаточно представить левую часть в виде суммы интегралов по интервалам (a, c^-) , (c^-, c^+) и (c^+, b) . При рассмотрении интеграла

$$\int_c^{b(>c)} f(x)\delta(x-c) dx$$

требуется уточнять, захватывается в нем «особенность» дельта-функции (бесконечно малый интервал, на котором она отлична от нуля) или нет. Это можно записать так:

$$\int_{c^-}^{b(>c)} f(x)\delta(x-c) dx = f(c), \quad \int_{c^+}^{b(>c)} f(x)\delta(x-c) dx = 0.$$

В частности, в операционном исчислении принимается первое правило, так что изображением по Лапласу функции $\delta(t)$ считают

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\delta(t) dt := \int_{0^-}^{\infty} e^{-pt}\delta(t) dt = 1.$$

Перепишав формулу (Д.14) в виде

$$f(x) = \int_a^b f(\xi)\delta(x-\xi) d\xi \quad (a < x < b) \quad (\text{Д.15})$$

(функция δ четная, так что $\delta(\xi-x) = \delta(x-\xi)$), мы получаем представление производной функции $f(x)$ в виде суммы бесконечно большого числа «столбчатых» функций, каждая из которых отлична от нуля на бесконечно малом интервале; график одного из слагаемых показан на рис. 27 жирной линией. Это представление лежит в основе применения функции Грина (см. п. 3 § 5).

Исходя из приближенного представления дельта-функции в виде

$$\delta_N(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > 1/(2N)), \\ N & (|x| < 1/(2N)) \end{cases}$$

с большим N , можно понять смысл ее производной $\delta'(x)$. Это плотность единичного диполя, т. е. совокупности двух равных бесконечно больших точечных зарядов противоположного знака на бесконечно малом расстоянии с единичным моментом (произведением величины каждого из зарядов на расстояние между ними). Обобщенная функция $\delta'(x)$ имеет при $x = 0$ еще более «острую» особенность, чем $\delta(x)$.

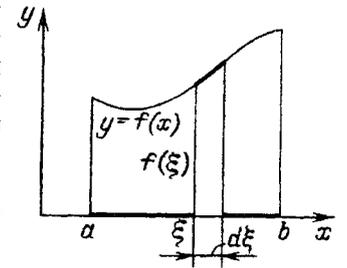


Рис 27

Рассматриваются также обобщенные функции нескольких аргументов или, что равносильно, векторного аргумента. Так, если $r = xi + yj + zk$, то

$$\delta(r) := \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

есть плотность единичной массы, сосредоточенной в начале координат $r = 0$. И здесь дифференцирование разрывных функций приводит к появлению дельта-слагаемых. Например, в теории сплошных сред важную роль играет формула для лапласиана

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r).$$

3. Метод Галеркина. Метод конечных элементов. Термин *метод Галеркина* объединяет несколько родственных

методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Мы приведем здесь один из наиболее простых вариантов на примере задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (a \leq x \leq b), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (\text{Д.16})$$

Для ее приближенного решения выберем какую-либо последовательность координатных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (a \leq x \leq b), \quad (\text{Д.17})$$

т. е. последовательность функций, удовлетворяющих соответствующим однородным краевым условиям

$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

и обладающих свойством *полноты*. Последнее означает, что любую функцию из достаточно широкого класса, удовлетворяющую указанным однородным краевым условиям, можно разложить в ряд по функциям (Д.17). (Здесь, как и в других подобных случаях, мы не уточняем формулировок.) Чаще всего полагают

$$\varphi_i(x) = x^{i-1}(x-a)(b-x) \quad \text{или} \quad \varphi_i(x) = \sin \frac{i\pi}{b-a}(x-a).$$

Кроме того, надо выбрать какую-нибудь функцию $\varphi_0(x)$, удовлетворяющую краевым условиям, указанным в (Д.16), например,

$$\varphi_0(x) = y_a + (y_b - y_a) \frac{x-a}{b-a}$$

или

$$\varphi_0(x) = y_a + (y_b - y_a) \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}.$$

Приближенное решение задачи (Д.16) ищется в виде

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (\text{Д.18})$$

где значением $n \geq 1$ мы задаемся, а постоянные C_1, C_2, \dots, C_n подбираем. Тогда краевые условия, указанные в (Д.16), заведомо удовлетворяются, а при подстановке выражения (Д.18) в дифференциальное уравнение получается невязка (т. е. разность между левой и правой частями

уравнения)

$$h_n(x; C_1, C_2, \dots, C_n) := \\ := \varphi_0'' + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i'' - f(x, \varphi_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, \varphi_0' + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i').$$

С ее помощью получаем уравнения для определения C_1, C_2, \dots, C_n :

$$\int_a^b h_n(x; C_1, C_2, \dots, C_n) \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{Д.19})$$

Это система из n конечных уравнений с n неизвестными, которую можно решать методами, указанными в п. 7 § 3. Особенно просто она решается, если краевая задача (Д.16) линейна, так как тогда и система уравнений (Д.19) линейна.

Рассмотрим в качестве примера краевую задачу

$$y'' + y = 1 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad (\text{Д.20})$$

точное решение которой $y_x = 1 - \cos x + (\operatorname{ctg} 1) \sin x$. При решении по методу Галеркина положим

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_i(x) = x^i(1-x) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad n = 2,$$

т. е. будем искать приближенное решение в виде

$$y_n = x + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x).$$

Тогда невязка оказывается равной

$$h_2(x; C_1, C_2) = C_1(-2 + x - x^2) + \\ + C_2(2 - 6x + x^2 - x^3) - 1 + x.$$

Система уравнений (Д.30) после вычисления интегралов приобретает вид

$$-\frac{3}{10} C_1 - \frac{3}{20} C_2 - \frac{1}{12} = 0, \quad -\frac{3}{20} C_1 - \frac{13}{105} C_2 - \frac{1}{30} = 0$$

и имеет решение

$$C_1 = -\frac{134}{369} = -0,3631, \quad C_2 = \frac{7}{41} = 0,1707.$$

Таким образом, приближенное решение оказывается равным

$$y_n = 0,6369x + 0,5338x^2 - 0,1707x^3.$$

Сравним, например, значения точного и приближенного

решений при $x = 0,5$:

$$y_r(0,5) = 0,4303, \quad y_n(0,5) = 0,4304.$$

Как видим, погрешность близка к 0,02 %.

Отметим, что сейчас принято трактовать множество функций, заданных на одном и том же интервале, как пространство обобщенных векторов, а интеграл от произведения двух функций по данному интервалу — как скалярное произведение этих векторов. При таком подходе последовательность координатных функций трактуется как базис в рассматриваемом пространстве, а уравнения (Д.19) означают приравнивание нулю проекций невязки h_n на первые n векторов из этого базиса. Поэтому методы описанного типа называются *проекционными*.

Проекционным является и *метод конечных элементов*, широко распространившийся за последние годы. Его мы также поясним на примере задачи (Д.16). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей с помощью точек деления

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (\text{Д.21})$$

и будем считать, что i -й конечный элемент ($0 \leq i \leq n$) — это непрерывная функция $\varphi_i(x)$ ($a \leq x \leq b$), линейная на каждом интервале $[x_{j-1}, x_j]$, причем $\varphi_i(x_i) = 1$, $\varphi_i(x_j) = 0$ ($j \neq i$). Тогда любую непрерывную функцию $y(x)$ ($a \leq x \leq b$), линейную на каждом интервале $[x_{j-1}, x_j]$, можно и притом единственным образом представить в виде

$$y(x) = \sum_{i=0}^n C_i \varphi_i(x); \quad (\text{Д.22})$$

для этого надо просто положить $C_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Если мы хотим, чтобы сумма (Д.22) удовлетворяла краевым условиям из (Д.16), то надо положить

$$C_0 = y_a, \quad C_n = y_b. \quad (\text{Д.23})$$

Остальные постоянные C_i находим из проекционного условия, аналогичного (Д.19):

$$\int_a^b \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - f(x, y, y') \right] \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

(Д.24)

Если раскрыть квадратные скобки и представить левую часть в виде разности двух интегралов, то при вычислении первого

полезно провести интегрирование по частям. Подставляя значения производных и отбрасывая нулевые слагаемые, получим, обозначая $x_{j+1} - x_j = \Delta x_j$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d^2 y}{dx^2} \varphi_i(x) dx &= \frac{dy}{dx} \varphi_i(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy}{dx} \varphi_i'(x) dx = \\ &= 0 - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[C_{i-1} \left(-\frac{1}{\Delta x_{i-1}} \right) + C_i \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \right] \frac{1}{\Delta x_{i-1}} dx - \\ &\quad - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[C_i \left(-\frac{1}{\Delta x_i} \right) + C_{i+1} \frac{1}{\Delta x_i} \right] \frac{1}{\Delta x_i} dx = \\ &= \frac{C_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} - C_i \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} - \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \frac{C_{i+1}}{\Delta x_i}. \end{aligned}$$

(Тот же результат получится без интегрирования по частям, если при вычислении $d^2 y/dx^2$ применить правило п. 2 Добавления о дифференцировании разрывных функций, а затем воспользоваться формулой (Д.14).) Таким образом, из (Д.24) мы получаем систему уравнений для нахождения C_1, C_2, \dots, C_{n-1} :

$$\begin{aligned} \frac{C_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} - C_i \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \frac{C_{i+1}}{\Delta x_i} - \\ - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \left(x, C_{i-1} \varphi_{i-1}(x) + C_i \varphi_i(x), \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right) \varphi_i(x) dx - \\ - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \left(x, C_i \varphi_i(x) + C_{i+1} \varphi_{i+1}(x), \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x_i} \right) \varphi_i(x) dx = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (\text{Д.25}) \end{aligned}$$

где $\Delta x_j := x_{j+1} - x_j$.

Применим для примера описанный метод к задаче (Д.20), приняв $n = 5$, $x_i = 0,2i$ ($i = 0, 1, \dots, 5$). Равенства (Д.23) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{C_{i-1}}{0,2} - \frac{2C_i}{0,2} + \frac{C_{i+1}}{0,2} + \frac{0,2}{6} C_{i-1} + \frac{0,2}{3} C_i - \frac{0,2}{2} + \\ + \frac{0,2}{3} C_i + \frac{0,2}{6} C_{i+1} - \frac{0,2}{2} = 0, \end{aligned}$$

т. е. после упрощений

$$30,2C_{i-1} - 59,2C_i + 30,2C_{i+1} = 1,2 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Решение этой системы по методу Гаусса с учетом значений C_0 и C_5 приводит к значениям

$$C_1 = 0,1477, C_2 = 0,3292, C_3 = 0,5375, C_4 = 0,7640.$$

В частности, приближенное значение решения при $x = 0,5$ получается равным 0,4333 с погрешностью 0,7 %.

Конечно, в данном примере первый метод и проще второго и дает более высокую точность. Однако метод конечных элементов оказывается весьма эффективным при решении уравнений с частными производными, когда число пространственных переменных не менее двух, а область, в которой строится решение, имеет сложную форму. Пусть, например, область (D) имеет вид восьмиугольника, показанного на рис. 28, а на ее границе (∂D) поставлены однородные условия первого рода: $u|_{(\partial D)}$ задано. Произведем триангуляцию этой области, т. е. разобьем ее на треугольники так, что любые два из них либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону; на рис. 28

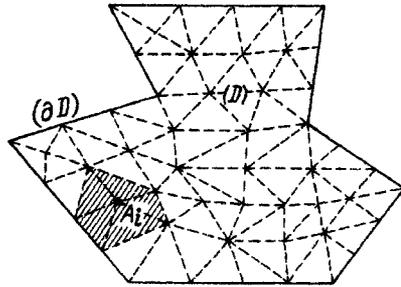


Рис. 28

триангуляция изображена штриховыми линиями. Занумеруем все вершины (на рис. 28 их 50) и поставим каждой A_i из них в соответствие конечный элемент $\varphi_i(x, y)$. Это непрерывная функция, линейная в каждом треугольнике выбранной триангуляции и равная единице в A_i и нулю во всех прочих вершинах; на рис. 28 выделена одна из

вершин A_i и заштрихована область, в которой функция $\varphi_i(x, y)$ отлична от нуля (ее график напоминает шатер). Дальнейшее построение приближенного решения проходит аналогично тому, как в одномерном случае.

Сейчас метод конечных элементов имеет большое число вариантов, приспособленных к решению разнообразных задач. Все эти методы основаны на применении функций — «конечных элементов», каждая из которых отлична от нуля лишь в небольшой области.

4. Итерационные методы. При приближенном решении математических задач широко применяются различные ите-

рационные *) методы. В каждом из таких методов некоторая единообразная вычислительная процедура повторяется вновь и вновь, причем каждый раз результат проведенного вычисления кладется в основу последующего вычисления. В благоприятных случаях это приводит к построению приближенного решения со все большей и большей точностью; поэтому итерационные методы называются также *методами последовательных приближений*. Ясно, что они наиболее удобны для организации циклов при составлении программ для ЭВМ.

Поясним структуру итерационного метода на примере конечного уравнения

$$f(x) = 0. \quad (Д.26)$$

Перепишем его в какой-либо из равносильных форм вида

$$x = \varphi(x); \quad (Д.27)$$

это можно сделать многими способами, что приводит к различным результатам в применении итераций. Затем выберем более или менее произвольно нулевое приближение $x = x_0$; желательно только, если о точном решении что-либо известно, выбрать x_0 поближе к нему — чем ближе, тем меньше итераций придется проводить. Подставив $x = x_0$ в правую часть уравнения (Д.27), получаем первое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$; проделав то же с $x = x_1$, получаем $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Общая *рекуррентная **)* формула (т. е. формула, выражающая последующие члены последовательности через предыдущие) здесь имеет вид

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (Д.28)$$

Теоретически мы можем, вообще говоря, продолжать этот процесс бесконечно. Если он сходится, т. е. x_n имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$, то в пределе получается точное решение уравнения (Д.27), т. е. (Д.26). (На практике сходимость обычно обнаруживается уже после нескольких итераций и вычисления прекращаются, когда x_{n+1} отличается от x_n меньше чем на некоторое разумно выбранное заранее малое число.) Если процесс расходится, то это не значит, что и решения нет: может быть, оно есть, но уравнение (Д.27) или значение x_0 выбраны неудачно.

*) От латинского слова «итерацио» — повторение.

***) От латинского слова «рекуррентис» — возвращающийся.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x^3 - x + 0,3 = 0. \quad (Д.29)$$

Для его решения перепишем его в виде

$$x = x^3 + 0,3$$

и проведем итерации, начиная с $x_0 = 0$. Получим

$$x_1 = 0^3 + 0,3 = 0,3, \quad x_2 = 0,3^3 + 0,3 = 0,327, \dots$$

Вычисления с точностью до 10^{-7} , которые мы предоставляем читателю, показывают, что $x_{14} = x_{13} = 0,3389361$. Считая последнюю цифру сомнительной вследствие округлений, можем написать точное решение: $x = 0,338936$ с точностью до 10^{-6} . Нетрудно проверить, что уравнение (Д.29) имеет еще два вещественных решения, их также можно найти по методу итераций, но иначе организованному.

Геометрический смысл метода итераций для уравнения (Д.27) показан на рис. 29, причем вариант *a* соответствует случаю $0 < \varphi'(\bar{x}) < 1$ (\bar{x} — точное решение), вариант *b* — случаю $-1 < \varphi'(\bar{x}) < 0$ и вариант *в* — случаю $\varphi'(\bar{x}) > 1$ (разберите случай $\varphi'(\bar{x}) < -1$!). Мы видим, что если

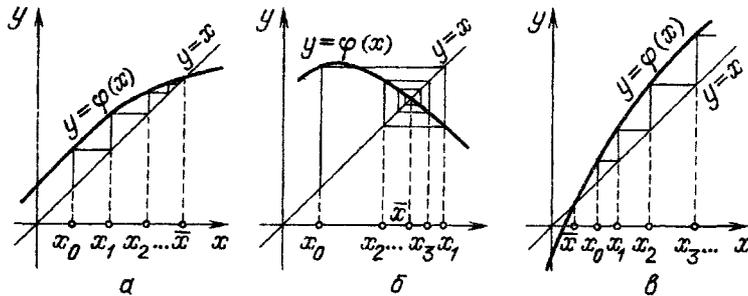


Рис. 29

$|\varphi'(\bar{x})| < q < 1$ и x_0 выбрано не слишком далеко от \bar{x} , то процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, т. е. $|x_n - \bar{x}| < \text{const} \cdot q^n$. Наиболее благоприятен случай, когда $\varphi'(\bar{x}) = 0$: тогда процесс сходится со сверхгеометрической скоростью, т. е. быстрее геометрической прогрессии с любым знаменателем. Если $|\varphi'(\bar{x})| > 1$, то процесс итераций либо расходится либо сходится, но не к \bar{x} .

(Проведите итерации для равносильных уравнений $x = 1 + 0,1x$ и $x = 10x - 10$ и объясните результат.)

Методы последовательных приближений применяются также при решении систем конечных уравнений, дифференциальных, интегральных и других уравнений и их систем, при нахождении экстремумов функций и функционалов и т. д.

5. Число степеней свободы и многомерные многообразия. Эти понятия сейчас довольно часто появляются при описании математических моделей; кратко поясним их содержание.

Как известно, положение точки в пространстве можно охарактеризовать в различных системах координат — декартовой, цилиндрической, сферической и др., но для всех них является общим то, что это положение определяется тремя координатами. С другой стороны, положение точки на плоскости или криволинейной поверхности определяется двумя координатами, а на линии — одной координатой. Это выражают словами: при выборе точки в (обычном) пространстве имеется три степени свободы, на поверхности — две и на линии — одна степень свободы. Иначе говоря, пространство трехмерно, тогда как поверхности двумерны, а линии — одномерны.

В общем случае понятие числа степеней свободы вводится так. Пусть имеется некоторая совокупность объектов (в предыдущем примере — совокупность всех точек в пространстве), каждый из которых можно охарактеризовать указанием значений некоторых скалярных непрерывных параметров (в предыдущем примере — координат). Пусть эти параметры являются:

1) *независимыми*, т. е. могут принимать произвольные значения: например, если зафиксировать все параметры, кроме одного, то этот один можно еще произвольно менять, быть может, в некоторых пределах;

2) *существенными*, т. е. при любом малом изменении параметров рассматриваемый объект фактически меняется.

Тогда, если таких параметров k , то говорят, что при выборе объекта из рассматриваемой совокупности имеется k степеней свободы, а сама совокупность называется k -мерным многообразием. Параметры называются (обобщенными) координатами на этом многообразии; как и в случае обычных координат в обычном пространстве, их можно выбирать различными способами, как это окажется удобнее в том или ином исследовании, но при этом их число остается неизменным. Объекты, составляющие многообразие, называются его точками. Таким образом, многомерное многообразие получает конкретное истолкование.

Если рассматривается механическая система, то можно говорить о ее *положении* в данный момент времени, определяемом как бы ее фотоснимком, и о ее *состоянии* в этот момент, которое фиксирует также и скорости движения компонентов системы. Когда говорят о числе степеней свободы и об обобщенных координатах такой системы, «объектами», о которых говорилось выше, служат все ее возможные положения. Таким образом, если система имеет k степеней свободы, то многообразие (говорят также — пространство) ее положений k -мерно с обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_k . Многообразие же состояний (говорят также — *фазовое многообразие*) этой системы $2k$ -мерно, координатами в нем (*фазовыми координатами*) служат $q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k$, где $p_i = dq_i/dt$, а t — время.

Рассмотрим в качестве примера систему из зубчатых колес, в которой каждое последующее колесо зацеплено с предыдущим. Здесь имеется всего одна степень свободы, причем за обобщенную координату можно принять угол поворота первого колеса, так как задание этого угла полностью определяет и положение остальных колес. Если же колеса не зацеплены, то число степеней свободы системы равно числу колес.

Подсчитаем, сколько степеней свободы имеет отрезок данной длины l при движении в пространстве. Каждый такой отрезок полностью определяется декартовыми координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) его концов. Эти координаты можно принять за параметры, определяющие положение отрезка. Они, очевидно, существенны, но не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l.$$

Таким образом, только пять параметров можно считать независимыми, а шестой выражается через них из этого соотношения. Значит, отрезок данной длины при движении в пространстве имеет пять степеней свободы.

В общем случае, если параметров n и они существенны, но связаны m независимыми уравнениями (т. е. такими уравнениями, из которых ни одно не вытекает из остальных), то $n - m$ параметров можно принять за независимые, а остальные m можно — во всяком случае, в принципе — выразить через них, т. е. имеется $n - m$ степеней свободы. Отсюда, например, получаем, что при движении жесткого треугольника в пространстве имеется $9 - 3 = 6$ степеней свободы (проверьте!). Этот пример важен в связи с тем, что

положение абсолютно твердого тела произвольной формы полностью определяется указанием положений трех его точек, не лежащих на одной прямой. Значит, при движении такого тела в пространстве также имеется шесть степеней свободы.

Приведем еще один поучительный пример: найдем число степеней свободы при выборе прямой на плоскости. Можно рассуждать так: выберем произвольно две точки A и B на плоскости (каждая имеет по две координаты) и проведем через них прямую p_{AB} , которая определяется, таким образом, четырьмя параметрами. Так как эти параметры независимые, то, казалось бы, получается четыре степени свободы. Однако такое рассуждение неверно, так как при изменении этих параметров (координат) точки A и B будут, правда, меняться, но прямая p_{AB} может при этом оставаться неизменной; значит, требование существенности параметров не выполняется. Так как прямая p_{AB} не меняется, если точка A скользит по ней (одна степень свободы) или точка B скользит по ней (еще одна степень свободы), то при нашем подсчете получилось две лишних степени свободы и на самом деле число степеней свободы равно $4 - 2 = 2$. За независимые и существенные параметры можно взять, например, коэффициенты k и b в уравнении $y = kx + b$; правда, прямые, параллельные оси y , не описываются такими уравнениями, но эти особые случаи не могут сказаться при подсчете числа степеней свободы. Многообразие всех прямых на плоскости двумерно.

6. Локальные и интегральные характеристики полей. Здесь мы укажем на некоторые принципиальные моменты, возникающие при математическом моделировании физических полей. Напомним, что в пространстве задано поле некоторой величины u , если в каждой точке пространства или некоторой его области определено значение этой величины. Поле может быть скалярным или векторным в зависимости от характера исследуемой величины: например, поля температур или плотностей являются скалярными, а поля скоростей или сил — векторными. Если обозначить буквой M произвольную (текущую) точку пространства, то для стационарного поля — а также для нестационарного поля, рассматриваемого в фиксированный момент времени, — имеем $u = u(M)$, т. е. u является *функцией точки* пространства; если рассматривается эволюция нестационарного поля, то $u = u(M, t)$, где t — время.

Если ввести в пространство произвольную (вообще говоря, криволинейную) систему координат λ, μ, ν , то функ-

ция точки переходит в функцию трех переменных: $u = u(\lambda, \mu, \nu)$. Однако для полей, моделирующих реальные ситуации, функция точки первична по отношению к функции координат, так как поле $u(M)$ по своему смыслу задается и может быть исследовано без всяких систем координат. К тому же, надо иметь в виду, что одно и то же поле в различных системах координат может записываться совсем по-разному.

Поэтому надо следить за тем, чтобы основные математические характеристики физического поля, применяемые для описания его свойств, были связаны с ним *инвариантно*, т. е. не зависели от выбора системы координат, даже если эти характеристики выражены с помощью координат. Типичным примером служит лапласиан скалярного поля, выраженный в декартовых координатах (см. формулу (Д.4)): каждое слагаемое, конечно, неинвариантно, оно зависит от выбора направлений осей координат, но вся сумма инвариантно связана с полем, что легко вытекает из представления лапласиана в виде $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$. Подробное изучение идеи инвариантности приводит к понятию тензора, на котором мы здесь не будем останавливаться.

Величины, трактуемые как функции точки, являются *локальными характеристиками* поля. Имеется и другой класс величин — величин, распределенных по пространству и потому являющихся *интегральными характеристиками* поля. Рассмотрим, например, неоднородное материальное тело с массой, непрерывно распределенной в пространстве. Тогда каждой мысленно выделенной области (Ω) отвечает значение ее интегральной характеристики, $m = m_{(\Omega)}$. При этом имеет место закон сложения (аддитивности): если область (Ω) как-то разбита на части, например, (Ω_1) и (Ω_2), то $m_{(\Omega)} = m_{(\Omega_1)} + m_{(\Omega_2)}$; в этом и состоит смысл выражения «масса распределена в пространстве».

Распределенной массе отвечает плотность, являющаяся уже функцией точки:

$$\rho(M) = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{m_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega} \quad (\text{Д.30})$$

(под $\Delta\Omega$ здесь понимается объем области ($\Delta\Omega$)); это действие аналогично обычному определению производной. Величины $d\Omega = \Delta\Omega$ и $dm = \rho(M) d\Omega$ называют соответственно «элементом объема» и «элементом массы» в точке M . При $(\Delta\Omega) \rightarrow M$ величины dm и $\Delta m = m_{(\Delta\Omega)}$ различаются на малую высшего порядка по сравнению с каждой из них.

Обратный переход от плотности к массе осуществляется с помощью интегрирования. Таким образом, в данном примере локальная и интегральная характеристики поля связаны соотношениями

$$\rho(M) = \left. \frac{dm}{d\Omega} \right|_M, \quad m_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \rho d\Omega.$$

Возможность появления точечных масс в математических моделях не противоречит подходу к массе как к распределенной величине: если масса m_0 сосредоточена в точке M_0 , то ее можно считать распределенной в пространстве с плотностью $m_0 \delta(M_0 \vec{M})$, где δ — дельта-функция векторного аргумента.

По этому же образцу рассматриваются другие величины, распределенные по пространству, — такие, как заряд, энергия и т. п. — и их плотности. Распределенной может быть и векторная величина — например, количество движения; тогда и значение плотности векторное. Отметим, что для того чтобы некоторую величину можно было считать распределенной по пространству, не требуется, чтобы она была «размазана» наподобие массы или заряда. Например, статический момент или момент инерции материального тела могут считаться величинами, распределенными по объему, хотя они не являются непосредственно «размазанными», а зависят от плоскости или оси отсчета. Важно только, чтобы можно было выписать элемент этой величины, пропорциональный $d\Omega$, и выполнялся закон сложения.

Величина может быть распределена не по объему, а по поверхности (плоской или кривой) или по линии. В этом случае все рассуждения остаются в силе, если под (Ω) понимать часть поверхности или линии, а под Ω — соответственно площадь или длину этой части.

Вернемся к примеру массы, распределенной в пространстве. Если среда движется, то важную роль играет вектор потока массы («массовой скорости») ρv , где v — вектор мгновенной скорости среды в рассматриваемой точке; этот вектор является локальной характеристикой направления и интенсивности переноса массы. Его поток через воображаемую поверхность (S) (впрочем, говорят не «поток потока массы», а просто — поток массы), т. е. интеграл $\int_{(S)} \rho v \cdot dS$ равен массе, переносимой через (S) за единицу времени в направлении изнутри наружу. Аналогично вводится поток других распределенных величин.

Вопросы, затронутые в этом пункте, подробно обсуждаются в книге [12].

7. Сплайны. При интерполяции и вообще при приближенном представлении функций формулами сейчас широко применяются так называемые сплайны. Пусть речь идет о представлении функции на интервале $[a, b]$. Разобьем его на n частей с помощью точек (Д.21). Сплайном (точнее, полиномиальным сплайном, так как бывают и другие) степени k ($= 1, 2, 3, \dots$), отвечающим этому разбиению, называется функция, заданная на $[a, b]$, имеющая там непрерывные производные $k - 1$ -го порядка и на каждом интервале $[x_{j-1}, x_j]$ совпадающая с некоторым многочленом степени не выше k . В частности, сплайн 1-й степени — это непрерывная на $[a, b]$ функция, линейная на каждом интервале $[x_{j-1}, x_j]$. В приложениях сейчас наиболее распространены сплайны 3-й степени; если $P(x)$ — такой сплайн, то в точках x_1, x_2, \dots, x_{n-1} смены формулы для $P(x)$ значения P, P' и P'' остаются непрерывными, тогда как P''' , вообще говоря, испытывает скачок. Каждый такой сплайн можно записать и притом единственным образом в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \sum_{i=1}^j \alpha_i (x - x_{i-1})^3 \quad (\text{Д.31})$$

$(x_{j-1} \leq x \leq x_j; j = 1, 2, \dots, n).$

Сохранение «гладкости» в точках смены формул приводит к тому, что сплайны осуществляют в целом лучшее приближение функций, чем «классические» интерполяционные формулы. Однако при построении сплайна для сколько-нибудь большого n вычисления довольно объемны, хотя и легко программируются, а потому требуют привлечения ЭВМ.

Если решается задача интерполяции с помощью сплайна 3-й степени, т. е. требуется построить такой сплайн по условиям

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

то, так как формула (Д.31) включает $n + 3$ параметра, для однозначного выбора сплайна требуется указать еще два условия типа равенств. Например, можно задать значения $P'(a)$ и $P'(b)$. Тогда, переходя от $P(x)$ к функции $P(x) - y_0 - P'(a)(x - a)$, можно считать, что $y_0 = 0$ и $P'(a) = 0$, а потому в формуле (Д.31) надо положить $a_0 = a_1 = 0$.

Рассмотрим пример. Пусть на интервале $0 \leq x \leq 5$ надо построить сплайн 3-й степени по условиям

$$\begin{aligned} P(0) = 0, \quad P(1) = 1, \quad P(2) = 1, \quad P(3,2) = 0, \\ P(4) = -1, \quad P(5) = -3, \quad P'(0) = 0, \quad P'(5) = -1. \end{aligned}$$

Применение формулы (Д.31) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} a_2 + \alpha_1 &= 1, \quad 4a_2 + 8\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ 10,24a_2 + 32,768\alpha_1 + 10,648\alpha_2 + 1,728\alpha_3 &= 0, \\ 16a_2 + 64\alpha_1 + 27\alpha_2 + 8\alpha_3 + 0,512\alpha_4 &= -1, \\ 25a_2 + 125\alpha_1 + 64\alpha_2 + 27\alpha_3 + 5,832\alpha_4 + \alpha_5 &= -3, \\ 10a_2 + 75\alpha_1 + 48\alpha_2 + 27\alpha_3 + 9,72\alpha_4 + 3\alpha_5 &= -1. \end{aligned}$$

Ее решение по методу Гаусса дает значения

$$\begin{aligned} a_2 = 2,0998, \quad \alpha_1 = -1,0998, \quad \alpha_2 = 1,3993, \\ \alpha_3 = -0,21000, \quad \alpha_4 = -0,6045, \quad \alpha_5 = 1,6225. \end{aligned}$$

Таким образом, искомый сплайн можно выразить формулами

$$P(x) = \begin{cases} 2,0998x^2 - 1,0998x^3 & (0 \leq x \leq 1), \\ -1,3993 + 4,1979x - 2,0981x^2 + 0,2995x^3 & (1 \leq x \leq 2), \\ 0,2807 + 1,6779x - 0,8381x^2 + 0,0895x^3 & (2 \leq x \leq 3,2), \\ 20,0874 - 16,8909x + 4,9647x^2 - 0,5150x^3 & (3,2 \leq x \leq 4), \\ -83,7534 + 60,9897x - 14,5055x^2 + 1,1075x^3 & (4 \leq x \leq 5). \end{cases}$$

Мы видим, в частности, что максимальное значение $P_{\max} = 1,1894$ достигается при $x = 1,4515$.

Обращаем внимание на важную особенность сплайн-интерполяции: изменение хотя бы одного значения в исходных данных влечет за собой изменение всех коэффициентов интерполирующего сплайна, т. е. полный пересчет этих коэффициентов, хотя они и обладают свойством робастности (п. 6 § 1).

О сплайнах см., например, [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А ко ф Р., С а с и е н и М. Основы исследования операций.— М.: Мир, 1971.
2. А л б е р т Дж., Н и л ь с о н Э., У о л ш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.— М.: Мир, 1972.
3. А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Наука, 1969.
4. Б а б у ш к а И., В и т а с е к Э., П р а г е р М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1969.
5. Б а х в а л о в Н. С. Численные методы.— М.: Наука, 1973.
6. Б л е х м а н И. И., М ы ш к и с А. Д., П а н о в к о Я. Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики.— 2-е изд.— М.: Наука, 1990.
7. В а с и л ь е в Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— 2-е изд.— М.: Наука, 1988.
8. В е н и к о в В. А., З у е в Э. Н. и др. Математические основы электроэнергетики.— 2-е изд.— М.: Высш. шк., 1981.
9. Д и к с о н Дж. Проектирование систем: Изобретательство, анализ и принятие решений.— М.: Мир, 1969.
10. Д ь я ч е н к о В. Ф. Основные понятия вычислительной математики.— М.: Наука, 1972.
11. З е л ь д о в и ч Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике.— 5-е изд.— М.: Наука, 1970.
12. З е л ь д о в и ч Я. Б., М ы ш к и с А. Д. Элементы математической физики. Среда из взаимодействующих частиц.— М.: Наука, 1973.
13. К е м е н и Дж., С н е л л Дж. Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения.— М.: Сов. радио, 1972.
14. К о у л Д.-Д. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
15. К о ф м а н А., Ф о р Р. Займемся исследованием операций.— М.: Мир, 1966.
16. К р а с н о щ е к о в П. С., П е т р о в А. А. Принципы построения моделей.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
17. Математическое моделирование/Под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна.— М.: Мир, 1979.
18. М о и с е е в Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1971.
19. М о и с е е в Н. Н. Математика ставит эксперимент.— М.: Наука, 1979.
20. М о и с е е в Н. Н., И в а н и л о в Ю. П., С т о л я р о в а Е. М. Методы оптимизации.— М.: Наука, 1978.
21. М о р о з о в К. Е. Математическое моделирование в научном познании.— М.: Мысль, 1969.
22. Н а й ф э А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
23. Н а л и м о в В. В., Г о л и к о в а Т. И. Логические основания планирования эксперимента.— 2-е изд.— М.: Металлургия, 1981.
24. П е р в о з в а н с к и й А. А. Поиск.— М.: Наука, 1970.
25. П е ш е л ь М. Моделирование сигналов и систем.— М.: Мир, 1981.
26. П ш е н и ч н ы й Б. Н., Д а н и л и н Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М.: Наука, 1975.
27. Р а й б м а н Н. С. Что такое идентификация?— М.: Наука, 1968.
28. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— 9-е изд.— М.: Наука, 1981.
29. Т и х о н о в А. Н., К о с т о м а р о в Д. П. Рассказы о прикладной математике.— М.: Наука, 1979.
30. Ф е о д о с ь е в В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов.— М.: Наука, 1969.
31. Х е м м и н г Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1968.
32. Х о р а ф а с Д. Н. Системы и моделирование.— М.: Мир, 1967.
33. Х у р г и н Я. И. Ну и что?— 2-е изд.— М.: Молодая гвардия, 1970.
34. Ш е н н о н Р. Имитационное моделирование систем—искусство и наука.— М.: Мир, 1978.
35. Я г л о м И. М. Математические структуры и математическое моделирование.— М.: Сов. радио, 1980.
36. Я н е н к о Н. Н., П р е о б р а ж е н с к и й Н. Г., Р а з у м о в с к и й О. С. Методологические проблемы математической физики.— М.: Наука, 1986.
37. D u m C. L., I v e y E. C. Principles of Mathematical Modelling.— N. Y.: Academic Press, 1980.
38. L o g a n J. D. Applied Mathematics: a Contemporary Approach.— N. Y.: John Wiley & Sons, 1987.
39. M e y e r W. J. Concepts of Mathematical Modelling.— N. Y.: McGraw-Hill, 1984.
40. S a a t y T. L., A l e x a n d e r J. M. Thinking with Models: Mathematical Models in the Physical, Biological and Social Sciences.— Oxford: Pergamon Press, 1981.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 127
 Автомоделное решение 116
 Автономная система
 Адекватность модели 12
 Аналитические методы 105
 Аналоговое устройство 12
 Асимптотическая сходимость 109
 — формула 105
 Асимптотическое разложение 107

 Бегущая волна 119
 Бесконечная малость практическая 75
 — физическая 75
 Биологическая модель 8
 Бифуркация 126
 Быстрое время 96

 Вариационное исчисление 69
 Вариация оператора 31
 — функция 31
 — функционала 31
 Варьирование 31
 Верификация модели 10
 Вероятностная модель 33
 Взаимности закон 114
 Влияния функция 113
 Воздействия точка 113
 Возмущение регулярное 92
 — сингулярное 92
 Возмущенный метод 86
 Возмущенная задача 92
 Волна бегущая 119
 — стоячая 122
 Волновое уравнение 59, 166
 Вход 26
 Выпуклая функция 66
 Выпуклое программирование 66
 Высвобождающая связь 65
 Выход 26

 Галеркина метод 171

 Геометрическая размерность задачи 61
 Гипотезы 9
 Градиентного спуска метод 64
 Грина функция 112
 Гука закон 166

 Дельта-функция 168
 Детерминированная модель 33
 Динамическая модель 34
 Динамического программирования метод 68
 Дискретная модель 20
 Дифференциальное уравнение 53
 — с отклоняющимся аргументом 56
 Дифференциально-функциональное уравнение 56
 Добавочные условия 53
 Достаточная простота модели 15
 Дюамеля интеграл 116

 Единичная функция 169

 Задача анализа 38
 — Коши 27, 54
 — краевая 26, 54
 — на собственные значения 58
 — начально-краевая 60
 — оптимального управления 71
 — синтеза 38
 Замораживание 83
 Закон взаимности 114
 — Гука 166
 — универсальный 39
 — феноменологический 40
 — Фурье 165

 Идентификация модели 20
 Изопериметрическая задача 69
 Изотропность материала 13
 Имитационное моделирование 140
 Импульсная функция 169

 Инвариантность 182
 Интеграл Дюамеля 116
 Интегральная характеристика поля 182
 Интегральное уравнение Вольтерра I рода, II рода 58
 — Фредгольма I рода, II рода 58
 Интегро-дифференциальное уравнение 57
 Интервал осреднения 21
 Интерпретация результата исследования 10
 Исходные данные модели 16
 Итерационные методы 176

 Качественная модель 12
 Качественные методы 104
 Квадратичное программирование 67
 Квазистатическая модель 35
 Квазистационарная модель 35
 Количественная модель 12
 Конечное уравнение 48
 Конечных элементов метод 174
 Консервативность системы 114
 Контигуализация 75
 Координата лагранжева 166
 — эйлера 166
 Координатная функция 172
 Координаты обобщенные 179
 — фазовые 180
 Коши задача 27, 54
 — функция 115
 Коэффициент подобия 45
 Краевая задача 26, 54
 Краевое условие I рода, II рода, III рода 59
 Краевые условия 53, 59
 Критерий подобия 46

 Лагранжева координата 166
 Лапласа уравнение 59
 Лапласиан 166
 Линеаризация 29
 Линейная модель 26
 Линейное программирование 66
 Локальная характеристика поля 182

 Малого параметра метод 86
 Математическая модель 8
 Математическое моделирование 6
 Матье уравнение 145
 Медленное время 84
 Метод возмущений 86
 — Галеркина 171
 — градиентного спуска 64

 Метод динамического программирования 68
 — итерационный 176
 — конечных элементов 174
 — малого параметра 86
 — наименьших квадратов 42
 — наискорейшего спуска 63
 — Ньютона 31
 — отражения 155
 — последовательных приближений 177
 — прямых 61
 — Ритца 71
 Методы аналитические 105
 — качественные 104
 — численные 106
 Механическая модель 8
 Многомерное многообразие 179
 Многообразие 179
 — фазовое 180
 Мода 58, 122
 Моделирование имитационное 140
 — математическое 6
 Модель биологическая 8
 — вероятностная 33
 — детерминированная 33
 — дискретная 20
 — качественная 12
 — квазистатическая 35
 — квазистационарная 35
 — количественная 12
 — линейная 26
 — математическая 8
 — механическая 8
 — нелинейная 26
 — непрерывная 20
 — смешанная 20
 — содержательная 8
 — социальная 8
 — статическая 34
 — стационарная 35
 — стохастическая 33
 — структурная 17
 — физическая 8
 — функциональная 17
 — эволюционная 34

 Наблюдения точка 113
 Наглядность модели 17
 Наименьших квадратов метод 42
 Наискорейшего спуска метод 63
 Начальные условия 53
 Начально-краевая задача 60
 Невозмущенная задача 92
 Невязка 55
 Независимость параметров 179

Независимость уравнений 49
 Нелинейная модель 26
 Немая переменная 24
 Непериодическая траектория 124
 Непрерывная модель 20
 Неустойчивость вычислительная 137
 Неявный r -шаговый метод 55
 Ньютона метод 31

 Обобщенное решение 128
 Обобщенные координаты 179
 Обострение решения 85
 Обратная связь 72
 Общее решение 105
 Объект 8
 Обыкновенное дифференциальное уравнение 53
 Однородность материала 13
 Оператор 26
 Определяющие соотношения 39
 Оптимального управления задача 71
 Ортогональная система 28
 Осреднение 21
 Осциллятор 11
 Отражения метод 155

 Параметрический резонанс 145
 Параметры задачи 39
 Переходный процесс 35
 Плохая обусловленность 49
 Пограничный слой 95
 Подгоночный коэффициент 158
 Подготовка задачи к программированию 141
 Подобие 45
 Подобия коэффициент 46
 — критерий 46
 Позиционное управление 72
 Поле 181
 Полная система функций 28, 172
 Полнота модели 15
 Положение системы 180
 Полуэмпирическое соотношение 40
 Последовательных приближений метод 177
 Постулаты модели 9
 Практическая бесконечная малость 75
 — сходимости 138
 Предельный цикл 127
 Представление результатов 142
 Преобразователь 26
 Принцип суперпозиции 26
 Присоединенная масса 37

Проблема представления результатов 142
 Программирование выпуклое 66
 — квадратичное 67
 — линейное 66
 — целочисленное 66
 Программное управление 72
 Продуктивность модели 16
 Проекционный метод 174
 Прямые методы вариационного исчисления 70
 Прямых метод 61
 Пуассона уравнение 59

 Рабочая гипотеза 78
 Разделение переменных 122
 Разложение асимптотическое 107
 Размазывание 75
 Размерная однородность 44
 Размерность 44
 Размытая величина 139
 Размытое понятие 138
 Разностное уравнение 55
 Рассуждение по аналогии 139
 — рациональное 140
 Рациональное рассуждение 140
 Регулярное возмущение 92
 Резонанс параметрический 145
 Рекуррентная формула 177
 Релаксационный этап 82
 Решение автоматическое 116
 — общее 105
 — частное 105
 Ритца метод 71
 Робастность модели 16

 Связь 64
 — высвобождающая 65
 Сингулярное возмущение 92
 Система автономная 123
 — уравнений треугольная 51
 Собственная функция 27, 58
 Собственное значение 27, 58
 Содержательная модель 8
 Соотношение полуэмпирическое 40
 — чисто эмпирическое 41
 Состояние системы 180
 Социальная модель 8
 Сплэйн 184
 Статическая модель 34
 Стациональная модель 35
 — точка 67
 Степени свободы 179
 Стохастическая модель 33
 Стоячая волна 122
 Структурная модель 17

Суперпозиции принцип 26
 Существенность параметров 179
 Сходимость практическая 138

 Телеграфное уравнение 167
 Теплопроводности уравнение 13, 165
 Точка воздействия 113
 — наблюдения 113
 — покоя 124
 Точность модели 12
 Траектория 124
 — неперидическая 124
 Треугольная система уравнений 51

 Универсальный закон 37
 Управление позиционное 72
 — программное 72
 Уравнение волновое 59, 166
 — дифференциальное 53
 — с отклоняющимся аргументом 56
 — дифференциально-функциональное 56
 — запаздывающего типа 56
 — интегральное Вольтерра I рода, II рода 58
 — Фредгольма I рода, II рода 58
 — интегро-дифференциальное 57
 — конечное 48
 — Лапласа 59
 — математической физики 58
 — Матье 145
 — нейтрального типа 56
 — Пуассона 59
 — разностное 55
 — с частными производными 58
 — телеграфное 167
 — теплопроводности 13, 165
 — характеристическое 52
 — эволюционное 59
 — Эйлера 70
 Условие краевое I рода, II рода, III рода 59
 Условия добавочные 53
 — краевые 53, 59
 — начальные 53
 Условный экстремум 64
 Установившийся процесс 35
 Установление 62

Фазовая плоскость 123
 Фазовое многообразие 180
 Фазовые координаты 180
 Фазовый портрет 125
 Феноменологический закон 40
 Физическая бесконечная малость 75
 — модель 8
 Формула эмпирическая 41
 Функционал 31, 69
 Функциональная модель 17
 Функция влияния 113
 — Грина 112
 — координатная 172
 — Коши 115
 — точки 181
 — Хевисайда 169
 — целевая 39
 Фурье закон 165

 Характеристика поля интегральная 182
 — локальная 182
 Характеристическое уравнение 52
 Характерное значение 80

 Целевая функция 39
 Целевой функционал 63
 Целочисленное программирование 66
 Цикл 124
 — предельный 127

 Частное решение 105
 Черный ящик 17
 Численные методы 106
 Число степеней свободы 179
 Чисто эмпирическое соотношение 41
 Чувствительность функции 135

 Эволюционная модель 34
 Эволюционное уравнение 59
 Эйлера уравнение 70
 Эйлера координата 166
 Экстремум с ограничениями 65
 — условный 64
 Элемент объема, массы и т. д. 75
 Эмпирическая формула 41

 Явный r -шаговый метод 55
 Ядро интегрального уравнения 58

А. Д. МЫШКИС

Элементы теории МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ



МЫШКИС Анатолий Дмитриевич (1920 г. р.). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика-1» Московского государственного университета путей сообщения, заслуженный работник высшей школы. Заслуженный соросовский профессор. Действительный член Академии нелинейных наук. Область научных интересов: дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными), функционально-дифференциальные уравнения, методология приложений математики, математические проблемы механики. Автор и соавтор 330 опубликованных научных работ и 17 книг, вышедших 42 изданиями на 10 языках.

НАПИСАНИЕ УРАВНЕНИЙ

УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

ВЫБОР РЕШЕНИЙ

4775 ID 50158



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



E-mail URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете
<http://URSS.ru>

Тел /факс 7 (495) 135-42-16
Тел /факс 7 (495) 135-42-46



URSS

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>